

UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE INGINERIE HUNEDOARA

Prof. dr. ing. ANTON SAIMAC

# ELECTROTEHNICĂ ȘI MAȘINI ELECTRICE

PARTEA I - a

- pentru uzul studenților -

HUNEDOARA

1997

  
250.283



UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" TIMIȘOARA  
FACULTATEA DE INGINERIE HUNEDOARA

Prof. dr. ing. ANTON SAIMAC

36402

# ELECTROTEHNICĂ ȘI MAȘINI ELECTRICE

PARTEA I - a

36404



0 00000920432

BCU LAȘI

- pentru uzul studenților -

HUNEDOARA

1997



## Capitolul 1

# LEGILE TEORIEI MACROSCOPICE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

## 1.1. NOTIUNI INTRODUCTIVE

### 1.1.1. Câmpuri

Câmpul electric este starea fizică particulară a spațiului, în care se produc forțe electrice (forțe care se exercită asupra corpurilor încărcate cu sarcină electrică și care depind de intensitatea câmpului electric local). Câmpul electric poate fi produs fie aducând sarcini electrice în regiunea în care urmează să se producă câmpul, fie folosind în acea regiune un câmp magnetic a cărui valoare variază în timp. Câmpul magnetic este starea fizică particulară a spațiului, în care se exercită forțe magnetice (forțe care se exercită asupra corpurilor parcurse de curenți electrici macroscopici sau moleculari, aceștia din urmă producând magnetizarea corpurilor respective).

Câmpul electromagnetic este starea fizică particulară a spațiului, în care există simultan câmp magnetic și câmp electric, ambele câmpuri fiind variabile în timp.

Studiul fenomenelor din câmpul electromagnetic s-a dezvoltat în cinci etape, caracterizate de teoriile: acțiunii la distanță, macroscopică, microscopică, relativității, cuantică.

### 1.1.2. Teoria acțiunii la distanță

Până la începutul secolului al XIX-lea s-a crezut că forțele și momentele de natură electrică sau magnetică se exercită direct și instantaneu între ele. De exemplu, s-a considerat că oricât de mare ar fi distanța dintre două corpuri electrizate, modificarea stării de electrizare a unuia dintre ele atrage după sine schimbarea, în același moment a forței care acționează asupra celuilalt corp.

### 1.1.3. Teoria macroscopică clasică a fenomenelor electromagnetice

M. Faraday a emis ipoteza existenței unor câmpuri electrice și magnetice în spațiul din jurul conductoarelor electrice, care au proprietatea de a acționa prin forțe asupra altor corpuri electrizate, magnetizate sau parcurse de curent aflate în câmp.



Pomind de la ideile lui M. Faraday, în 1864 J.C. Maxwell a formulat "teoria câmpului electromagnetic pentru corpurile în repaus", care a fost publicată în 1873 în lucrarea "Tratate despre electricitate și magnetism". H. Hertz (1857-1894) a extins teoria și asupra corpurilor în mișcare.

La baza teoriilor lui Maxwell și Hertz stă concepția despre câmpul electromagnetic, potrivit căreia acțiunile electrice și magnetice se transmit în spații și în timp din aproape în aproape cu o viteză foarte mare, dar finită. De aceea, teoria macroscopică a câmpului electromagnetic se mai numește și teoria Maxwell-Hertz sau teoria acțiunii din aproape în aproape. Teoria macroscopică a câmpului electromagnetic nu ține seama de strările sistemelor fizice la scară atomică.

#### 1.1.4. Teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice

După cum se știe, teoria clasică a electronilor a fost elaborată de H.A. Lorentz (1853-1928) datorită succeselor teoriei atomice a materiei, care a impus să se ia în considerare și în electromagnetism structura discontinuă a corpurilor la scară atomică. Teoria microscopică clasică admite ca unică mărime de stare a corpurilor sarcina electrică microscopică prin care se caracterizează particulele elementare, permițând astfel explicarea unui mare număr de fenomene în contradicție cu teoria macroscopică clasică.

#### 1.1.5. Teoria electrodinamică relativistă

Pe baza teoriei relativității restrânse, publicată în 1905 de A. Einstein, s-a extins revizuirea fundamentală a conceptelor electrodinamicii clasice macroscopice și microscopice. Această teorie, în care unele mărimi (lungime, masă, timp) depind de starea cinematică a sistemului de referință la care ele se raportează, a explicat discordanța dintre teoriile clasice, precum și dintre rezultatele experiențelor efectuate cu corpuri și particule cu viteze apropiate de cea a luminii.

#### 1.1.6. Teoria electrodinamică cuantică

A apărut din necesitatea de a explica stabilitatea particulelor elementare, momentul magnetic propriu al acestora, efectul foto-electric, efectul Compton (1923) etc., efecte și legi care nu au putut fi explicate nici în cadrul teoriei microscopice relativiste. Teoria electrodinamică cuantică a rezultat din "teoria cuantelor" inițiată în 1900 de Plank, continuată și dezvoltată de mai mulți cercetători contemporani.



### 1.1.7. Mărimi ale teoriei macroscopice

Există mărimi primitive, care nu pot fi definite cu ajutorul altora (lungime, timp, masă) sau se pot defini prin intermediul altor mărimi, dar numai recurgând la un experiment (forța) și derivate, care sunt introduse cu ajutorul altora prin relațiile de definiție (viteza, accelerația etc.). Mărimile primitive ale căror unități de măsură se aleg arbitrar se numesc mărimi fundamentale, iar mărimile care rezultă din relațiile de legătură cu mărimile fundamentale se numesc mărimi secundare. De exemplu, în mecanică, din cele patru mărimi primitive, trei sunt fundamentale (lungimea, timpul, masa) și una este secundară (forța).

### 1.1.8. Regimurile fenomenelor electromagnetice

Se admite că în funcție de variația mărimilor care descriu fenomenele electromagnetice din teoria macroscopică există următoarele regimuri distincte, care se regăsesc și în prezenta lucrare:

- Regimul static, în care mărimile nu variază în timp, nu se produc transformări energetice, fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice, iar cele două laturi ale câmpului electromagnetic (electric și magnetic) se pot studia separat;

- Regimul staționar, în care mărimile nu variază în timp, dar, spre deosebire de regimul static, interacțiunile câmpului cu substanța sunt însoțite de transformări energetice;

- Regimul quasistaționar, în care mărimile variază suficient de lent pentru a se putea neglija radiația câmpului electromagnetic (pentru a se putea neglija câmpul magnetic produs de variația în timp a fluxului electric);

- Regimul nestaționar sau regimul variabil, în care mărimile variază în timp, în cazul cel mai general.

## 1.2. SISTEME DE UNITĂȚI DE MĂSURĂ UTILIZATE ÎN ELECTROMAGNETISM

În relațiile de legătură între mărimile fundamentale ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic se introduc constantele  $\gamma_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  și  $r_0$ , ale căror valori (prestabilite) echivalează cu definirea sistemului respectiv. În principiu, în orice relație de legătură se pot introduce constante, însă, în sistemele de unități existente, constantele suplimentare, altele decât cele menționate sunt egale cu unu. Între constantele din legile și teoremele diferitelor sisteme de unități există relațiile de legătură. De exemplu, se poate



demonstra că între viteza undei electromagnetice în vid (identică cu viteza luminii în vid-constantă universală) :  $C_0=3 \cdot 10^8$  m/s și constantele  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\gamma_0$  există relația de legătură :

$$C_0 = \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1.1)$$

Cele patru constante se regăsesc în mai multe relații ale teoriei macroscopice a câmpului electromagnetic, dintre care menționăm următoarele :

$$\vec{F} = \gamma_0 q \vec{v} \times \vec{B}_v; \quad (1.2)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + X_e) \vec{E}; \quad (1.3)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1 + X_m)}; \quad (1.4)$$

$$F = \frac{r_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2}; \quad (1.5)$$

$$F = \frac{r_0 \mu_0 \gamma_0^2}{4\pi} \cdot 2 \frac{i^2}{R} \cdot l, \quad (1.6)$$

care exprimă: relații de definire a inducției magnetice în vid (1.2), a inducției electrice în corpuri (1.3), a intensității câmpului electric (1.4), precum și forțele de repulsie între două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini egale, plasate în vid (1.5) și de atracție pe lungimea  $l$  a două conductoare plasate în vid la distanța  $R$ , parcurse de curenți egali și de același sens (1.6).

Ultimele două relații, precum și altele au fost inițial considerate legi și s-a căutat să se dea acestora forme cât mai simple, cu constante unitare. În acest sens s-au construit sisteme de unități adecvate. Ulterior când s-au stabilit legi mai generale, iar (1.5), (1.6) etc. au devenit teoreme, s-au construit alte sisteme de unități, care asigurau forme simple pentru legile acceptate în perioada respectivă. În acest fel, constante diferite de unu pot trece de la o relație la alta, în funcție de sistemul de unități în care se lucrează. Operația de trecere a coeficientului  $r_0 = 4\pi$  din legile generale în alte relații particulare se numește raționalizare. În acest caz, constanta adimensională  $r_0$  se numește coeficient de raționalizare. Pentru sistemele raționalizate  $r_0 = 1$ , iar pentru cele neraționalizate (clasice), rezultă  $r_0 = 4\pi$ . Astfel, există sistemele de unități: CGS electrostatic, CGS electromagnetic, CGS-Gauss și MKSA, toate neraționalizate (clasice), conform tabelului 1.

Sistemul MKSA raționalizat menține ca mărime fundamentală curentul, cu unitatea A și constanta universală  $\gamma_0 = 1$ . Diferă de sistemul MKSA clasic prin  $r_0 = 1$ , deci:  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m;  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$  F/m. Raționalizarea nu afectează mărimile des

utilizate: curentul electric  $i$ , sarcina electrică  $q$ , tensiunea electrică  $u$ , fluxul magnetic  $\phi$ , rezistența  $R$ , capacitatea  $C$ , inductivitatea  $L$ , câmpul electric  $E$  etc; se modifică însă



Tabelul 1.

Sistemul de unități electromagnetice		CGS es. neraț.	CGS em. neraț.	CGS Gauss neraț.	MKSA neraț.	MKSA raț. (SI)
Sistemul de unități mecanice de bază		CGS	CGS	CGS	MKS	MKS
Coeficientul de raționalizare		$\epsilon_0$	$4\pi$	$4\pi$	$4\pi$	1
Constantele universale	$\gamma_0$	1*	1*	$\sim \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$	1*	1*
	$\epsilon_0$	1*	$\sim \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$	1*	$\sim \frac{1}{9 \cdot 10^9}$	$\sim \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$
	$\mu_0$	$\frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$	1*	1*	$10^{-7*}$	$4\pi \cdot 10^{-7*}$
Mărimile fundamentale :		q	i	q, i	i	i
* Constantele marcate cu asterisc definesc sistemul						

unitățile de măsură pentru inducția electrică  $D$ , fluxul electric  $\psi$ , câmpul magnetic  $H$ , tensiunea magnetică  $U_m$ , reluctanța  $R_m$  și constantele de material  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $X_e$ ,  $X_m$ . În sistemul MKSA s-au adoptat denumiri și pentru unitățile mărimilor secundare.

În 1960 s-a adoptat sistemul MKSA raționalizat (completat cu unitățile fundamentale pentru temperatură-gradul Kelvin și pentru intensitatea luminoasă-candela), sub denumirea de Sistemul Internațional de unități (SI), care a fost adoptat și la noi în țară, în 1961, ca singurul sistem de unități de măsură legal și obligatoriu.

### 1.3. LEGILE TEORIEI MACROSCOPICE

Se știe că legile oricărei teorii, deci și ale teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice, se stabilesc pe baza constatărilor experimentale și se verifică în practică. Pe parcursul dezvoltării teoriei unele devin teoreme.

În paragrafele următoare sunt prezentate opt legi generale și patru legi de material.

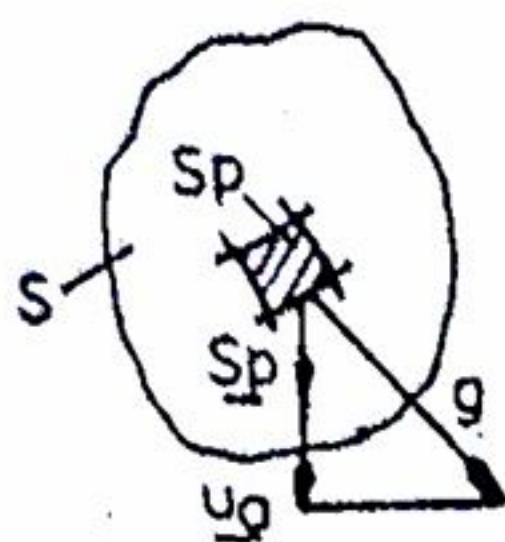
#### 1.3.1. Legea fluxului electric. Legea legăturii dintre $D$ , $E$ , $P$

Legea fluxului electric se poate enunța astfel: Fluxul electric  $\psi$  prin orice suprafață închisă  $S$  este în orice moment egal cu sarcina electrică  $q$  din interiorul suprafeței considerate :

$$\psi_S = \int_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad (1.7)$$

unde  $D$  este o mărime derivată numită inducție electrică [ $C/m^2$ ], iar  $d\vec{S}$ -element din suprafața  $S$  [ $m^2$ ], conform fig. 1.1.





Inducția electrică este definită de expresia:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.8)$$

unde  $\epsilon_0$  este o constantă universală numită permisivitate electrică a vidului, cu valoarea :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ [F/m]} \quad (1.9)$$

Fig. 1.1

Expresia (1.8) se numește legea de legătură dintre inducția electrică  $\vec{D}$ , intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  și polarizația electrică  $\vec{P}$ .

Din (1.7) și (1.8) se obține sarcina electrică adevărată  $q$ :

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \epsilon_0 \int_S \vec{E} d\vec{S} + \int_S \vec{P} d\vec{S} = q$$

unde  $\int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_e}{\epsilon_0}$  (1.10)

se numește fluxul intensității câmpului electric în vid, iar

$$\int_S \vec{P} d\vec{S} = q_p \quad (1.11)$$

se numește fluxul polarizării electrice printr-o suprafață închisă  $S$ , ambele fiind mărimi derivate. Suma algebrică a sarcinilor  $q_e$  și  $q_p$  (de polarizare) reprezintă sarcina electrică totală din volumul limitat de suprafața închisă  $S$  (sarcina electrică adevărată):

$$q = q_e + q_p \quad (1.12)$$

### 1.3.2. Legea fluxului magnetic

Această lege se exprimă astfel: Fluxul magnetic printr-o suprafață închisă  $S$  este în orice moment egal cu zero:

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (1.13)$$

unde  $\vec{B}$  este inducția magnetică [ $\text{Wb/m}^2$ ], iar  $d\vec{S}$  -element din suprafața închisă  $S$  [ $\text{m}^2$ ].

Din (1.7) și (1.13) se deduce că nu există sarcini magnetice care să producă câmp magnetic, așa cum sarcinile electrice produc câmp electric. Câmpurile de vectori cu flux nul se numesc câmpuri solenoidale, deci vectorii inducției magnetice formează un câmp solenoidal, ale cărui linii nu au extremități în interiorul suprafeței închise  $S$  din câmp.

Dacă  $S_1$  și  $S_2$  sunt două suprafețe limitate de un contur comun  $C$ , ambele suprafețe formând o suprafață închisă  $S$ , atunci fluxurile  $\phi_1$  și  $\phi_2$  prin suprafețele menționate (fig. 1.2) sunt:  $\phi_1 = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1$  și  $\phi_2 = \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2$ , iar fluxul total dat de legea fluxului magnetic este:

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}_2 = 0.$$

Suprafețele  $S_1$  și  $S_2$  sunt părți ale suprafeței închise  $S$ , la care elementul  $d\vec{S}$  este



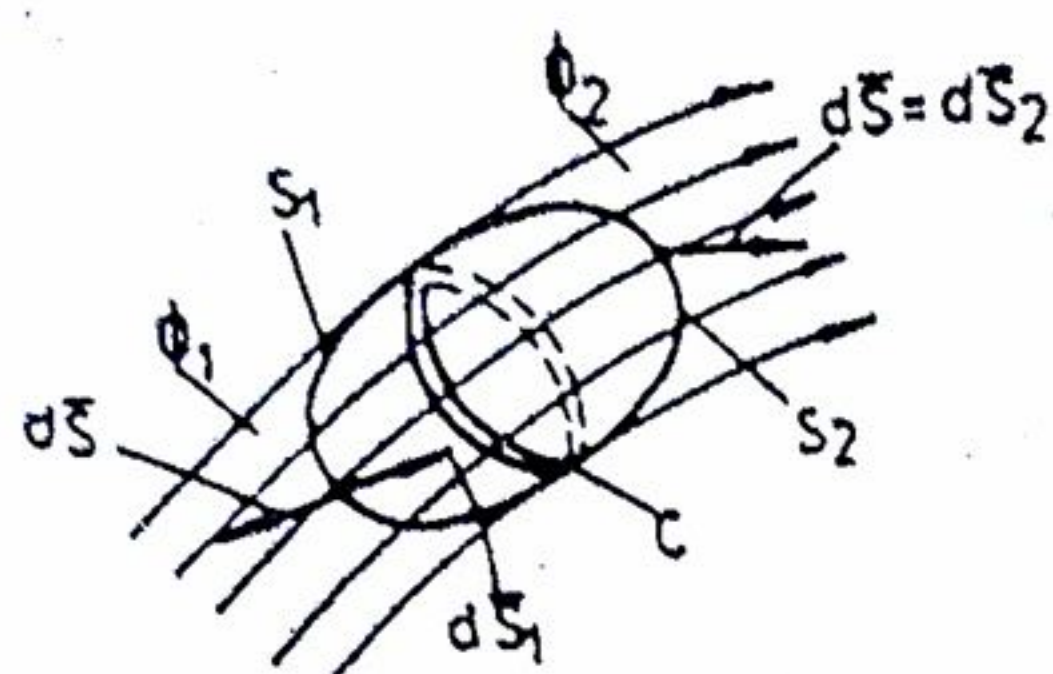


Fig. 1.2

mereu îndreptat către exterior, deci  $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}$  și  $d\vec{S}_2 = d\vec{S}$ . Rezultă:

$$\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_{S_1} \vec{B} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} d\vec{S} = \phi_2 - \phi_1 = 0.$$

$$\text{deci: } \phi_1 = \phi_2 \quad (1.14)$$

adică fluxul magnetic este conservativ. Rezultă că fluxul magnetic prin orice secțiune limitată de conturul C este același în orice moment.

### 1.3.3. Legea inducției electromagnetice

Se enunță astfel: Tensiunea electromotoare  $u$  produsă prin inducție electromagnetă de-a lungul unei curbe închise C oarecare este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic  $\phi$  printr-o suprafață S care se sprijină pe curba C (fig. 1.3):

$$u = - \frac{d\phi}{dt} \quad (1.15)$$

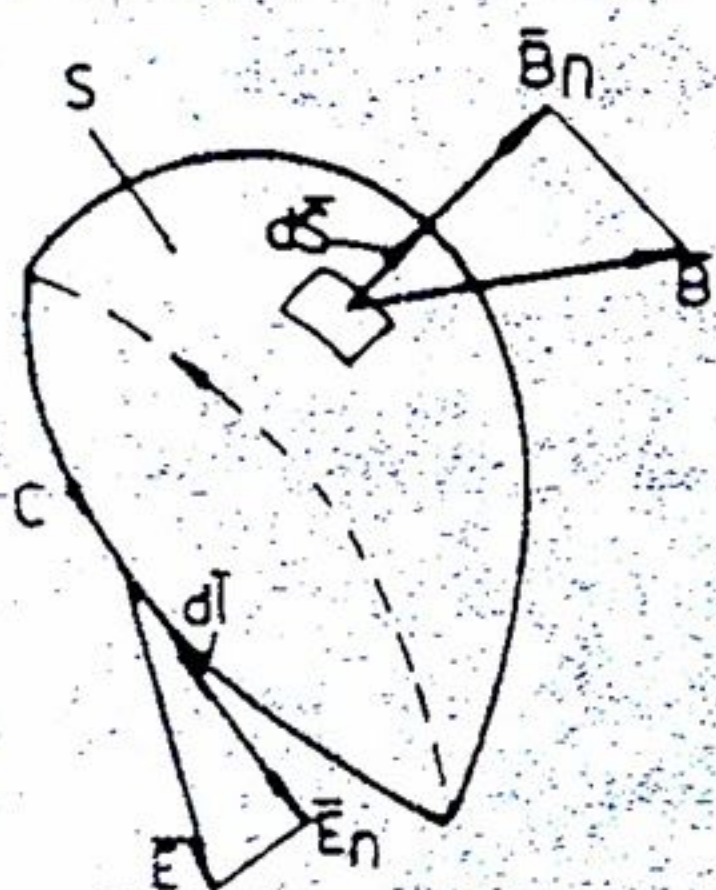


Fig. 1.3

$$\text{Se știe că } u = \oint_C \vec{E} d\vec{l} \text{ și } \phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

deci:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.16)$$

care reprezintă a doua formă a legii inducției electromagnetice. Legea inducției electromagnetice a fost stabilită în 1831 de M. Faraday pentru contururi C conductoare. Faraday a observat că într-un inel conductor omogen se stabilește un curent electric de conducție dacă, și atâta timp cât, fluxul magnetic prin suprafața limitată de inel variază (de exemplu, în timpul apropierei unui magnet permanent de inel). Apariția curentului în inel este datorată faptului că s-a imprimat sarcinilor o mișcare ordonată, sub acțiunea unor forțe, deci înseamnă că a apărut un câmp electric. Această lege exprimă astfel legătura dintre câmpul magnetic și câmpul electric.

### 1.3.4. Legea circuitului magnetic. Legea legăturii dintre B, H, M

Legea circuitului magnetic se exprimă astfel: Tensiunea magnetomotoare  $U_m$  de-a lungul conturului închis C este egală cu suma dintre curentul de conducție total ce străbate o suprafață S sprijinită pe curba C și viteza de creștere în timp a fluxului electric prin S (fig. 1.4):



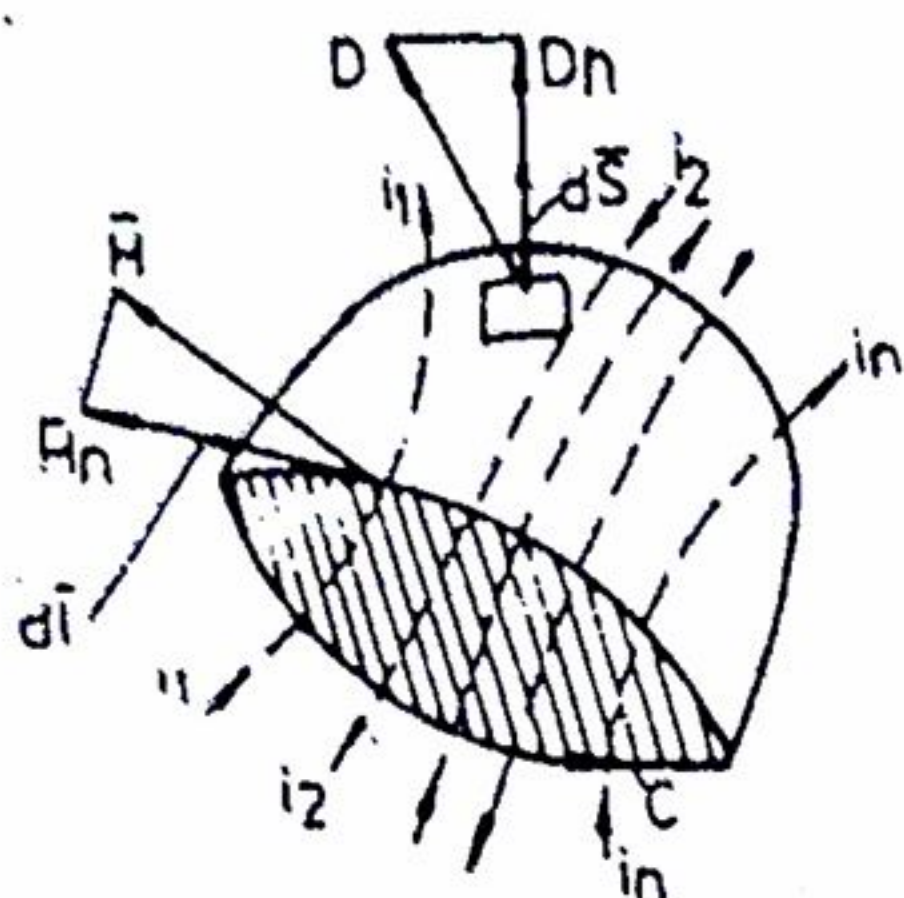


Fig. 1.4

$$U_m = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}, \quad (1.17)$$

unde  $\vec{H}$  este o mărime derivată numită intensitatea câmpului magnetic [A/m], iar  $d\vec{l}$  -element din conturul C.

Intensitatea câmpului magnetic este definită de expresia:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (1.18)$$

unde  $\mu_0$  este o constantă universală numită permeabilitate magnetică a vidului, cu valoarea :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (1.19)$$

iar  $\vec{B}$  [Wb/m<sup>2</sup>] și  $\vec{M}$  [A/m] - mărimi cunoscute. Unitatea [Wb/A] se numește Henry (H), deci unitatea de măsură a permeabilității magnetice a vidului este [H/m].

Expresia (1.18) pusă sub forma

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.20)$$

se numește legea de legătură dintre inducția magnetică B, intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  și magnetizația  $\vec{M}$ .

Primul termen al legii circuitului magnetic se mai scrie (făcând suma algebrică a curenților  $i_1, i_2, \dots, i_n$  din fig.1.4):

$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = \sum_{j=1}^n i_j = \theta, \quad (1.21)$$

unde  $\theta$  se numește solenajie.

Al doilea termen al legii circuitului magnetic se mai scrie (v.relația 1.17) :

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{d\psi}{dt} = i_h \quad (1.22)$$

și se numește intensitatea curentului hertzian.

### 1.3.5. Legea conservării sarcinii electrice

În fig.1.4 conturul C se poate restrânge la un punct, deci suprafața S devine o suprafață închisă, iar tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) de-a lungul conturului redus la un punct devine zero :

$$U_m = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad (1.23)$$

Prin urmare din legea circuitului magnetic (1.17) și-din legea fluxului electric (1.7) se obține:



$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (1.24)$$

in care:  $\int_S \vec{J} d\vec{S} = i$ .

Rezultă că relația (1.24) se mai poate scrie

$$i = -\frac{dq}{dt}, \quad (1.25)$$

care reprezintă o formă a legii conservării sarcinii electrice și care se enunță astfel: **fluxul densității curentului de conducție prin orice suprafață închisă S este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice din volumul limitat de suprafața S, sau: Intensitatea curentului de conducție total I, care părăsește o suprafață închisă S este egală cu viteza de scădere în timp a sarcinii electrice (adevărate) din interiorul suprafeței S.**

Dacă suprafața închisă S se află în întregime în dielectric, atunci  $\vec{J} = 0$ , deci

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad (1.26)$$

adică sarcina q din interiorul suprafeței S rămâne constantă, sau, cu alte cuvinte sarcina electrică se conservă:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \text{constant} \geq 0 \quad (1.27)$$

care reprezintă o altă formă a legii conservării sarcinii electrice.

Din această lege rezultă că sarcinile electrice nu pot fi nici create, nici distruse, ele pot să fie numai deplasate, iar cele două feluri de sarcini electrice (sarcini negative și sarcini pozitive) apar simultan și au module egale.

În cazul unui sistem neutru din punct de vedere electric, rezultă:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = 0. \quad (1.28)$$

### 1.3.6. Legea transformării energiei electromagnetice în procesul de conducție electrică. (Legea Joule-Lenz)

Una din formele de exprimare a acestei legi este: Densitatea de volum a puterii p [W/m<sup>3</sup>], cedată sau primită de câmpul electromagnetic în procesul de conducție electrică este egală cu produsul scalar între intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$  [V/m] și densitatea curentului electric de conducție J [A/m<sup>2</sup>]:

$$p = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (1.29)$$

Puterea dezvoltată într-o porțiune de conductor filiform cu secțiunea transversală constantă S și lungimea l este:



$$P = \int_V p dV, \quad (1.30)$$

unde  $dV = Sd$  este elementul de volum al conductorului, iar  $d$  este elementul de lungime.

Știind că  $\vec{E} \parallel \vec{J} \parallel \vec{n} d\vec{l}$  rezultă

$$P = \int_V p dV = \int_l EJS dl = i \int_l E dl = ui. \quad (1.31)$$

unde  $u = \int_l \vec{E} d\vec{l} = \int_l E dl$  este tensiunea în lungul conductorului pe lungimea  $l$ , iar

$i = \vec{J} \vec{S} = JS$  este curentul electric de conducție din conductorul filiform (fig. 1.5). Știind că

$u = Ri$ , legea se mai poate scrie:

$$W = \int_0^t Ri^2 dt, \text{ în Joule [J]} \quad (1.32)$$

sau:

$$Q = 0.24 \int_0^t Ri^2 dt, \text{ în calorii [cal]} \quad (1.33)$$

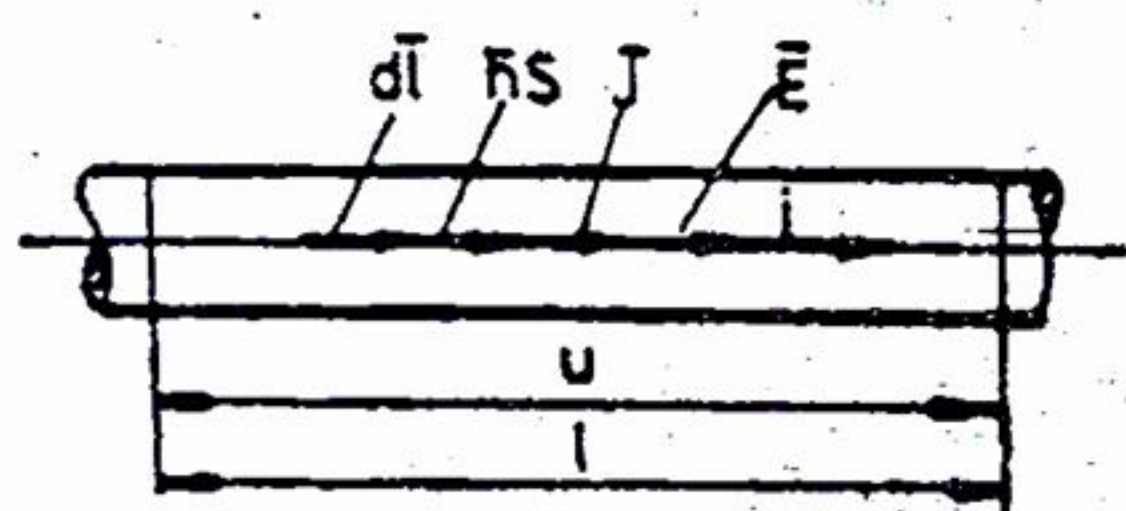


Fig. 1.5

Puterea dezvoltată de o sursă cu tensiunea electromotoare  $u_e$  și rezistența internă  $r$  este:

$$P_g = u_e i = P + ri^2 = i^2 (R + r). \quad (1.34)$$

### 1.3.7. Legea electrolizei

Legea poate fi enunțată astfel: masa de substanță depusă în unitate de timp  $dm/dt$  la unul din electrozii unei băi electrolitice parcursă de curent electric de conducție este egală cu produsul dintre intensitatea curentului electric  $i$  și raportul

dintre echivalentul electrochimic  $[A/n]$  prin constanta lui Faraday  $F_0$ :  $\frac{dm}{dt} = \frac{A}{nF_0} i$ .

în care  $F_0 = 96490$  C. Rezultă:  $m = \frac{A}{nF_0} \int i dt = \frac{A}{nF_0} \cdot q = Kq \quad (1.35)$

Legea electrolizei este o lege de material, deoarece  $K$  depinde de natura electrolitului.

### 1.3.8. Legea polarizației electrice temporare

Această lege de material arată că: Polarizația electrică temporară  $P_t$  este proporțională cu intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ :



$$\bar{P}_1 = \epsilon_0 X_e \bar{E} , \quad (1.36)$$

unde  $\epsilon_0$  [F/m] este permitivitatea electrică a vidului, iar  $X_e$  este o mărime adimensională, numită susceptivitate electrică și care depinde de natura materialului polarizat. Pentru medii liniare și izotrope din (1.8) și (1.36) se obține, succesiv:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} ; \quad \bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_p \\ \bar{D} &= \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}_1 + \bar{P}_p \\ \bar{D} &= \epsilon_0 \bar{E} + \epsilon_0 X_e \bar{E} + \bar{P}_p \\ \bar{D} &= \epsilon_0 (1 + X_e) \bar{E} + \bar{P}_p = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} + \bar{P}_p \\ \bar{D} &= \epsilon \bar{E} + \bar{P}_p \end{aligned} \quad (1.37)$$

unde  $P_1$  este polarizația temporară și  $P_p$  - polarizația permanentă.

$$\text{Expresia: } \epsilon_r = 1 + X_e \quad (1.38)$$

este permitivitatea relativă a materialului respectiv, iar:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.39)$$

este permitivitatea absolută a acestuia. În cazul  $\bar{P}_p = 0$ , cel mai des întâlnit în aplicații practice, relația (1.37) se scrie

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (1.40)$$

### 1.3.9. Legea magnetizației temporare

Această lege se poate exprima astfel: Magnetizația temporară  $M_1$  este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic  $\bar{H}$ :

$$\bar{M}_1 = X_m \bar{H} , \quad (1.41)$$

unde  $X_m$  este o mărime adimensională, numită susceptibilitate magnetică și care depinde numai de natura materialului magnetizat.

Pentru materiale magnetice liniare și izotrope, din (1.20) și (1.41) se obține, succesiv:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) ; \quad \bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_p \\ \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}_1 + \bar{M}_p) \\ \bar{B} &= \mu_0 (\bar{H} + X_m \bar{H} + \bar{M}_p) \\ \bar{B} &= \mu_0 (1 + X_m) \bar{H} + \mu_0 \bar{M}_p \\ \bar{B} &= \mu_0 \mu_r \bar{H} + \mu_0 \bar{M}_p \\ \bar{B} &= \mu \bar{H} + \mu_0 \bar{M}_p , \end{aligned} \quad (1.42)$$



unde  $\bar{M}_t$  este magnetizația temporară, iar  $\bar{M}_p$  - magnetizația permanentă.

Expresia:

$$\mu_r = 1 + X_m \quad (1.43)$$

este permeabilitatea relativă a materialului, iar

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (1.44)$$

este permeabilitatea absolută a acestuia.

În cazul  $\bar{M}_p = 0$ , cel mai des întâlnit în aplicații practice, relația (1.42) se scrie

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (1.45)$$

### 1.3.10. Legea conducției electrice. (Legea lui Ohm)

Una din formele de exprimare a acestei legi este: **Suma vectorială dintre intensitățile câmpului electric  $\bar{E}$  și câmpului electric imprimat  $\bar{E}_i$  este proporțională cu densitatea curentului de conducție  $\bar{J}$ :**

$$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \bar{J} \quad (1.46)$$

unde factorul de proporționalitate  $\rho$  se numește rezistivitatea materialului.

Pentru un conductor oarecare, neaccelerat, omogen din punct de vedere fizic și chimic, câmpul electric imprimat este nul ( $\bar{E}_i = 0$ ), iar (1.46) se scrie:

$$\bar{E} = \rho \bar{J}, \quad (1.47)$$

reprezentând cazul cel mai des întâlnit în practică.

Integrând relația (1.46) de-a lungul unui conductor filiform, liniar și izotrop (fig. 1.6) se obține forma integrală a legii conducției electrice:

$$\int_A^B \bar{E} d\bar{l} + \int_A^B \bar{E}_i d\bar{l} + \int_A^B \bar{E}_i d\bar{l} = \int_A^B \rho \bar{J} d\bar{l}, \quad (1.48)$$

unde:

$$\int_A^B \bar{E} d\bar{l} = \int_A^B E d\bar{l} = u, \quad (1.49)$$

este tensiunea electrică între punctele A și B ale conductorului,

$$\int_A^B \bar{E}_i d\bar{l} = \int_A^B E_i d\bar{l} = u_i, \quad (1.50)$$

este t.e.m. a câmpului electric imprimat pe porțiunea AB, iar:

$$\int_A^B \rho \bar{J} d\bar{l} = \int_A^B \rho J d\bar{l} = JS \int_A^B \rho \frac{d\bar{l}}{S} = iR \quad (1.51)$$

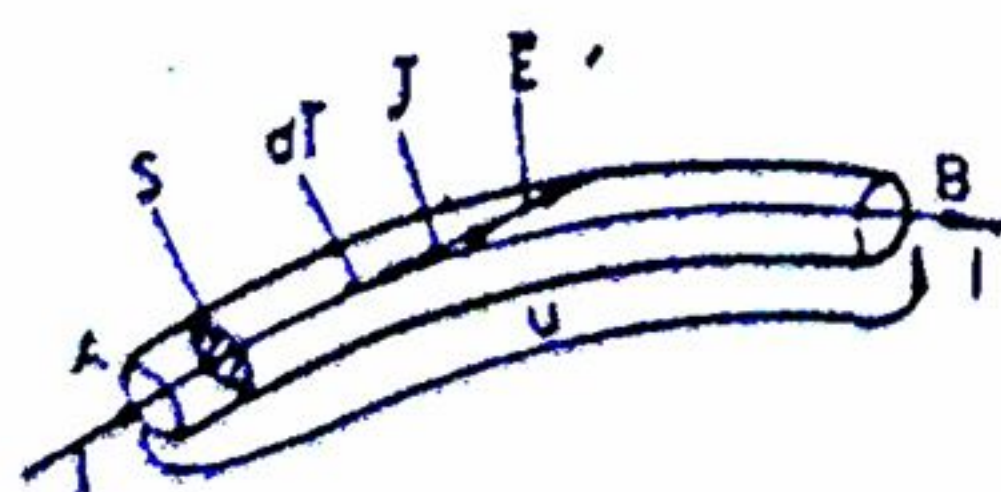


Fig. 1.6



este căderea de tensiune între punctele A și B. Rezultă a doua formă integrală a legii conducției electrice,

$$u = u_i = iR \quad (1.52)$$

unde:  $i = JS$ , este curentul de conducție, iar

$$R = \int_A^B \rho \frac{dl}{S} = \rho \frac{l}{S} \quad (1.53)$$

este rezistența electrică a conductorului cu secțiunea  $S$  [ $m^2$ ] și lungimea  $l$  [ $m$ ].

Pentru porțiuni de conductoare fără câmp electric imprimat, legea conducției electrice în formă integrală este

$$u = iR; \quad i = \frac{u}{R} \quad (1.54)$$

iar pentru o sursă de t.e.m. ( $u_e$ ) cu rezistența interioară  $r$ , la bornele căreia se leagă rezistența  $R$ , rezultă în circuit curentul:

$$i = \frac{u_e}{R + r} \quad (1.55)$$

Inversul rezistenței se notează cu  $G$  și se numește conductanță

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.56)$$

iar unitatea ei [ $\Omega^{-1}$ ] se numește Siemens [ $S$ ].

Inversul rezistivității se notează cu  $\sigma$  (uneori cu  $\gamma$ ) și se numește conductivitate [ $1/\Omega m$ ]:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (1.57)$$

### 1.3.11. Rezistivitatea electrică

În cele ce urmează se va arăta că rezistivitatea electrică a materialelor ( $\rho$ ) depinde de natura materialului, adică de: sarcina ( $e_0$ ) și masa ( $m_0$ ) a electronului, numărul electronilor liberi ( $n$ ) în unitatea de volum a conductorului, timpul mediu ( $t_0$ ) dintre două ciocniri consecutive (haotice) a electronului de ioni existenți în nodurile rețelei cristaline a metalului (conductorului).

Dacă se admite o porțiune ( $l$ ) din conductorul cu secțiunea constantă ( $S$ ), atunci din legea conservării sarcinii electrice (1.25) scrisă în modul, rezultă succesiv:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(ne_0Sl) = ne_0S \frac{dl}{dt}, \quad (1.58)$$

unde factorul  $\frac{dl}{dt} = v$ , poate fi interpretat ca viteză medie aritmetică între viteza inițială



(nulă) și viteza maximă axială ( $v_m$ ) în momentul ciocnirii electronului. Rezultă

$$v = \frac{0 + v_m}{2} = \frac{a_0 t_0}{2} \quad (1.59)$$

unde  $a_0$  este componenta axială a accelerației electronului:

$$a_0 = \frac{F_0}{m_0} = \frac{e_0 E}{m_0} = \frac{e_0}{m_0} \frac{u}{l} \quad (1.60)$$

în care  $F_0$  este componenta axială a forței imprimată electronului,  $E$ -intensitatea câmpului electric,  $u$ -tensiunea (căderea de tensiune) pe porțiunea de conductor ( $l$ ) considerată.

Din (1.58), (1.59) rezultă, succesiv:

$$i = ne_0 S v = ne_0 S \frac{a_0 t_0}{2} ; \quad i = ne_0 S \frac{t_0}{2} \frac{e_0}{m_0} \frac{u}{l} ; \quad i = \frac{u}{\frac{2m_0}{ne_0^2 t_0} \frac{l}{S}} \quad (1.61)$$

Comparând (1.61) cu (1.54) se obține

$$R = \frac{2m_0}{ne_0^2 t_0} \frac{l}{S} \quad (1.62)$$

și ținând seama de (1.53) rezultă:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{2m_0}{ne_0^2 t_0} \frac{l}{S} \quad (1.63)$$

adică 
$$\rho = \frac{2m_0}{ne_0^2 t_0} \quad (1.64)$$

În relația (1.64) se cunosc valorile mărimilor  $m_0$  și  $e_0$ :

$$m_0 = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad (1.65)$$

$$e_0 = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1.66)$$

deci (cu  $K$ -constantă și produsul " $nt_0$ "-variabil cu temperatura) rezultă:

$$\rho = \frac{K}{nt_0} \quad (1.67)$$

### 1.3.12. Variația rezistivității cu temperatura

Din (1.65) și (1.66) introduse în (1.64) se obține expresia rezistivității în forma (1.67):

$$\rho = \frac{7,1 \cdot 10^7}{nt_0}, \quad (1.68)$$

Practic se constată că la o creștere a temperaturii conductorului de la  $\theta_0$  la  $\theta$ :



$$\Delta\theta = \theta - \theta_0, \quad (1.69)$$

n crește,  $t_0$  scade, iar produsul  $nt_0$  scade pentru metale și crește pentru cărbune, astfel încât rezistivitatea variază de la valoarea  $\rho_0$  la valoarea  $\rho$  după o relație aproximativă (pentru variații relativ mici ale temperaturii):

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta\theta), \quad (1.70)$$

unde  $\alpha$  este o mărime de material, numită coeficientul de temperatură al rezistivității, pozitiv pentru metale și negativ pentru cărbune.

O relație cu aproximație mai bună este (1.71) care poate fi utilizată și pentru variații de temperatură  $\theta$  mai mari

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta\theta + \beta\Delta\theta^2), \quad (1.71)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt coeficienți de temperatură ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$  și respectiv  $^{\circ}\text{C}^{-2}$ ).

Rezistivitatea materialelor semiconductoare scade după o relație de forma

$$\rho = \rho_0 e^{-a} \quad (1.72)$$

unde  $a$  este o funcție de temperatura inițială  $\theta_0$ , temperatura finală  $\theta$ , energia de activare (constantă de material)  $W_a$  și de constanta lui Boltzman ( $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J}^{\circ}\text{C}$ ):

$$a = \frac{W_a}{k} \left( \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta} \right) \quad (1.73)$$

La temperaturi de câteva grade Kelvin (K) rezistivitatea unor metale și aliaje (Pb, Sn, Tl, etc) scade la zero - fenomen numit supraconductibilitate, descoperit de fizicianul olandez H. Kamerlingh-Onnes în 1911.



## Capitolul 2

# ELECTROSTATICA

Electrostatica studiază stările electrice ale corpurilor din câmpul electric, stări în care corpurile exercită forțe și cupluri asupra altor corpuri, invariabile în timp și neînsoțite de dezvoltare de căldură în conductoare (neînsoțite de curenți electrici de conducție).

### 2.1. CÂMPUL ELECTRIC ÎN VID ȘI ÎN SUBSTANȚA DIELECTRICĂ

Câmpul electric este un sistem fizic, diferit de substanță, a cărui prezență se manifestă prin acțiuni ponderomotoare asupra corpurilor electrizate (prin frecare sau prin alte mijloace: termice, chimice, mecanice, iradiere etc.). Dacă sursele câmpului electric sunt în repaus (sarcini electrice invariabile ca mărime și poziție) atunci câmpul se numește câmp electrostatic.

#### 2.1.1. Spectre de câmpuri electrostatice

Se poate arăta că fiecărui punct din câmpul electrostatic i se poate asocia un vector reprezentând intensitatea câmpului electrostatic  $\vec{E}_v$  (în vid) sau  $\vec{E}$  (în substanță dielectrică). Pentru a obține o imagine mai clară a regiunilor de câmp mai intens față de regiunile în care câmpul este mai puțin intens, se utilizează reprezentarea grafică prin linii de câmp. În fiecare punct al liniei de câmp, vectorul  $\vec{E}_v$  este dirijat după tangentă.

Ansamblul liniilor de câmp din câmpul electrostatic se numește spectru. Diferite spectre de linii de câmp sunt prezentate în fig. 2.1

Examinând spectrele create de sarcinile electrice, rezultă următoarele: liniile de câmp sunt deschise și încep de pe corpurile cu sarcini pozitive și se termină pe corpurile sau regiunile corpului cu sarcini negative, sau încep pe corpuri cu sarcini (+) și se termină la infinit. Totalitatea liniilor de câmp trasate prin toate punctele unei curbe închise ( $C_1$  sau  $C_2$  din fig. 2.1) alcătuiesc o suprafață tubulară numită tub de câmp.

Proprietățile conductoarelor în câmpul electrostatic pot servi la protejarea acestora față de fenomenul de influență electrică, prin închiderea acestor conductoare (aparate etc.).



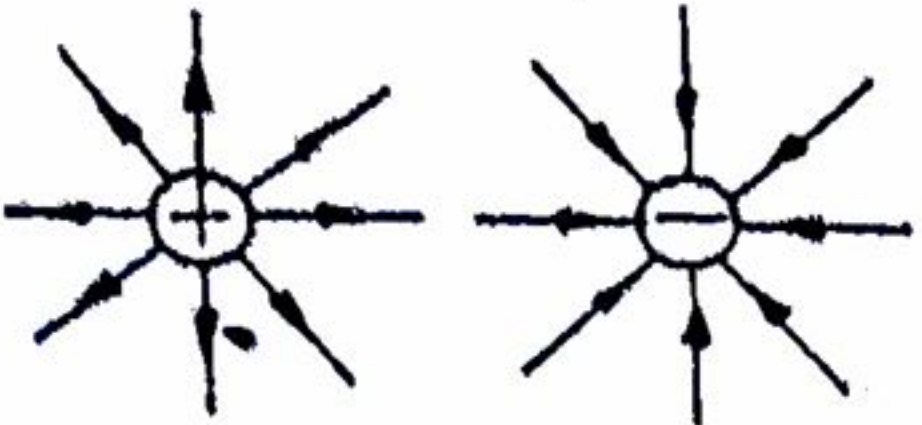
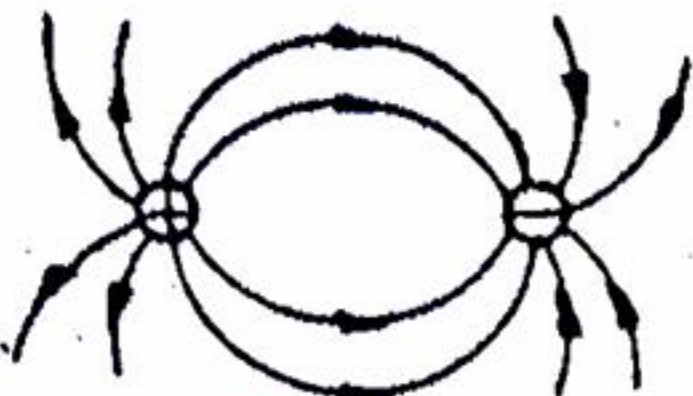
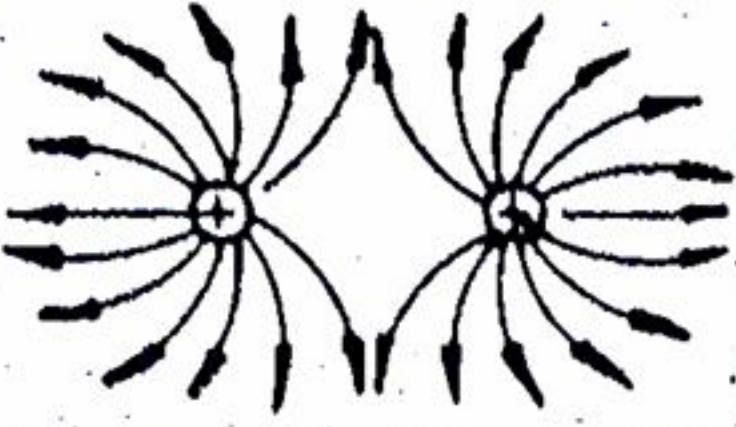
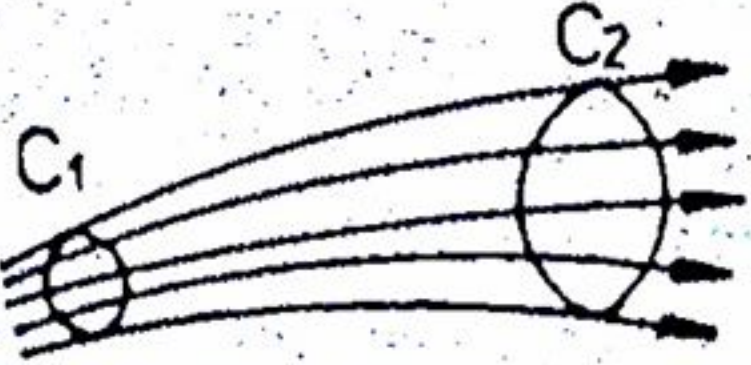
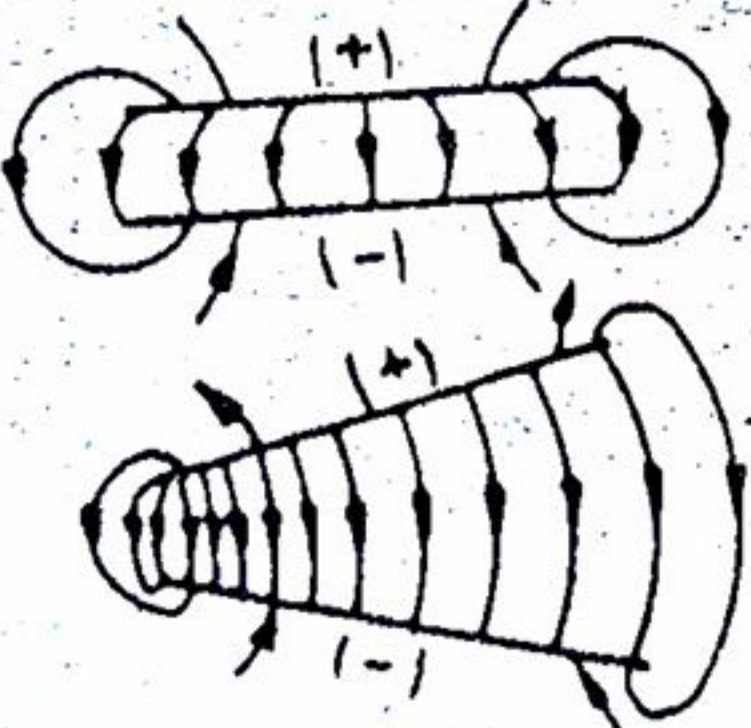
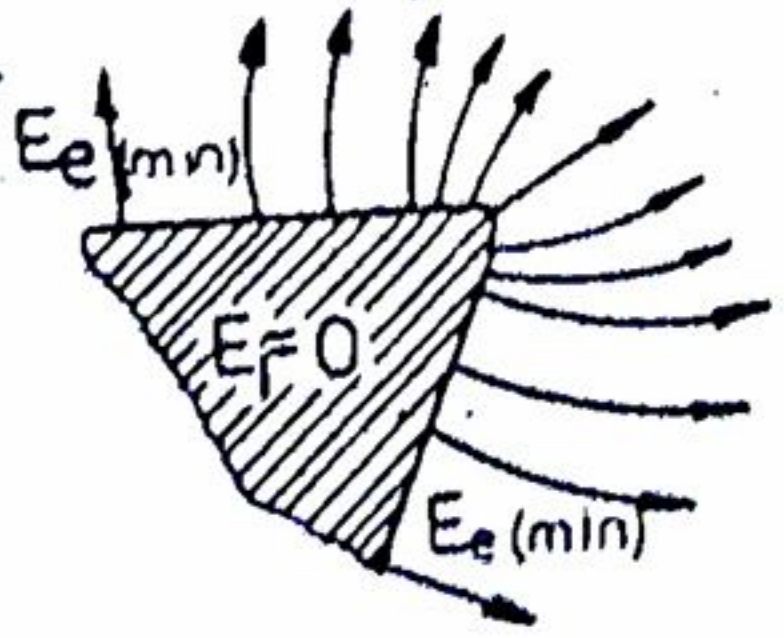
Nr. crt.	Spectrul câmpului electric	Sistemul material electrizat
a.		Sfere electrizate pozitiv (+) și negativ (-)
b.		Sfere încărcate cu sarcini electrice egale și de semne contrare
c.		Sfere încărcate cu sarcini electrice egale și de același semn
d.		Tub de câmp
e.		Plane paralele și neparalele încărcate cu sarcini egale și de semne contrare (la extremități câmpul este distorsionat).
f.		Conductor (electrod) cu vârf. Densitatea sarcinii electrice este maximă la vârf și minimă pe fața plană. În interior câmpul este nul, iar sarcinile sunt superficiale.

Fig.2.1 Diferite spectre de linii de câmp electric



intr-o carcasă metalică, numită ecran electrostatic, care conține numai sarcini electrice superficiale, în interiorul ecranului câmpul fiind nul ( $E=0$ ).

### 2.1.2. Formula lui Coulomb

Se exprimă astfel:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}, \quad (2.1)$$

unde  $\vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}$  este versorul razei vectoriale  $\vec{R}$  (fig.2.2),  $\vec{F}$  - forța exercitată asupra unuia dintre corpuri,  $q_1 q_2$  - sarcinile celor două corpuri, iar  $\epsilon_0$  - permitivitatea vidului. Pentru medii cu dielectric, relația (2.1) se scrie :

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon R^2} \vec{u} \quad (2.2)$$

unde  $\epsilon$  este permitivitatea electrică absolută ( $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ) a mediului (dielectricului).

Din formula lui Coulomb și experiențele sale, rezultă următoarele

- dacă cele două corpuri au sarcini de același semn, forța  $\vec{F}$  este orientată în sensul versorului  $\vec{u}$  și deci corpurile se resping;
- corpurile cu sarcini de semne contrare se atrag.

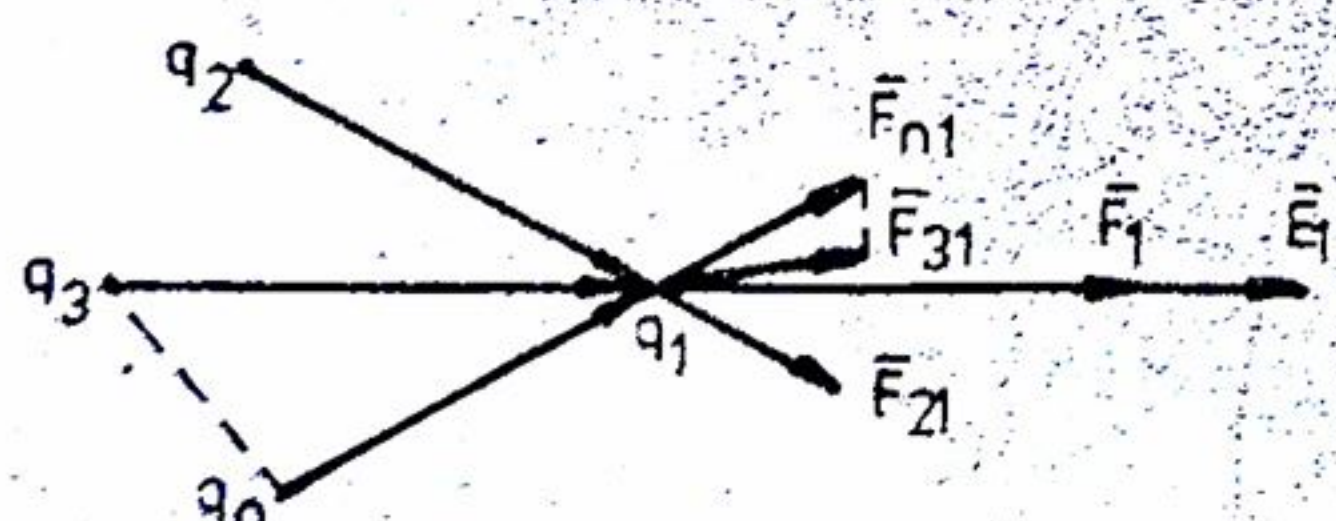


Fig.2.2

Forțele coulombiene verifică principiul suprapunerii:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{n1} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{i1} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=2}^n \frac{q_1 q_i}{R_{i1}^2} \vec{u}.$$

Dacă un corp punctual încărcat cu sarcină electrică  $q_1$ , este situat în prezența unor corpuri încărcate cu sarcini repartizate cu densități de volum, de suprafață, de linie și discrete, forța care se exercită asupra corpurilor cu sarcina  $q_1$  se obține prin superpoziție:

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left[ \int_V \frac{\rho_v dV}{R^2} \vec{u} + \int_S \frac{\rho_s dS}{R^2} \vec{u} + \int_l \frac{\rho_l dl}{R^2} \vec{u} + \sum_{i=2}^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{u} \right] \quad (2.3)$$

unde integralele se extind asupra tuturor volumelor, suprafețelor și liniilor cu densități de sarcini electrice.

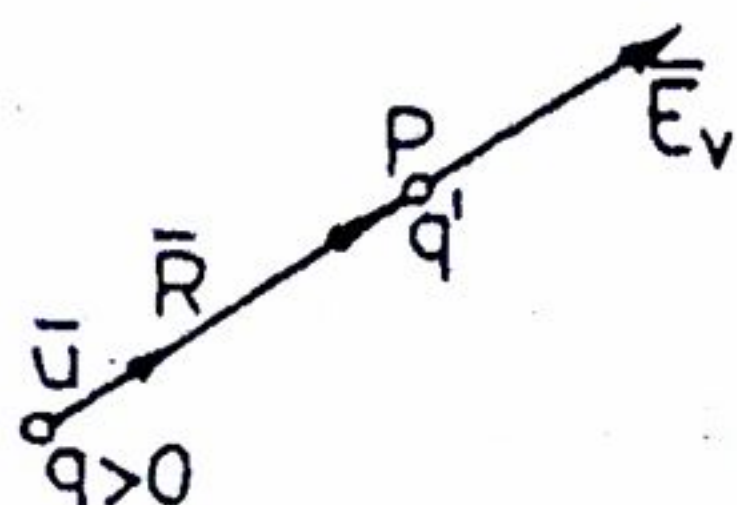
Cei patru termeni ai relației (2.3) reprezintă cele patru componente ale forței  $\vec{F}_1$ , care acționează asupra corpului încărcat cu sarcina  $q_1$ .



### 2.1.3. Intensitatea câmpului electric

Valoarea forței exercitate în vid de un corp punctual încărcat cu sarcina electrică constantă  $q$ , asupra corpului de probă încărcat cu sarcina electrică constantă  $q'$  și situat într-un punct oarecare  $P$  (fig.2.3) este :

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u} = q' \vec{E}_v \quad (2.4)$$



deci :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u} \quad (2.5)$$

Din expresia forței  $\vec{F}_1$  dată de relația (2.2) care se

Fig.2.3

exercită asupra corpului cu sarcina  $q_1$  se deduce expresia intensității câmpului pe care-l stabilesc celelalte corpuri încărcate cu sarcini electrice, în punctul ocupat de corpul cu

sarcina  $q_1$ : 
$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_{i1}^2} \vec{u}_i$$

Dacă într-o regiune a spațiului vid există corpuri încărcate cu sarcini electrice repartizate cu densități de volum, de suprafață, de linie și cu sarcini electrice discrete, intensitatea în vid a câmpului electrostatic într-un punct  $P$  din câmp este dată de expresia (fig.2.4) :

$$\vec{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho_v dV}{R^2} \vec{u} + \int_S \frac{\rho_s dS}{R^2} \vec{u} + \int_l \frac{\rho_l dl}{R^2} \vec{u} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{u} \right] \quad (2.6)$$

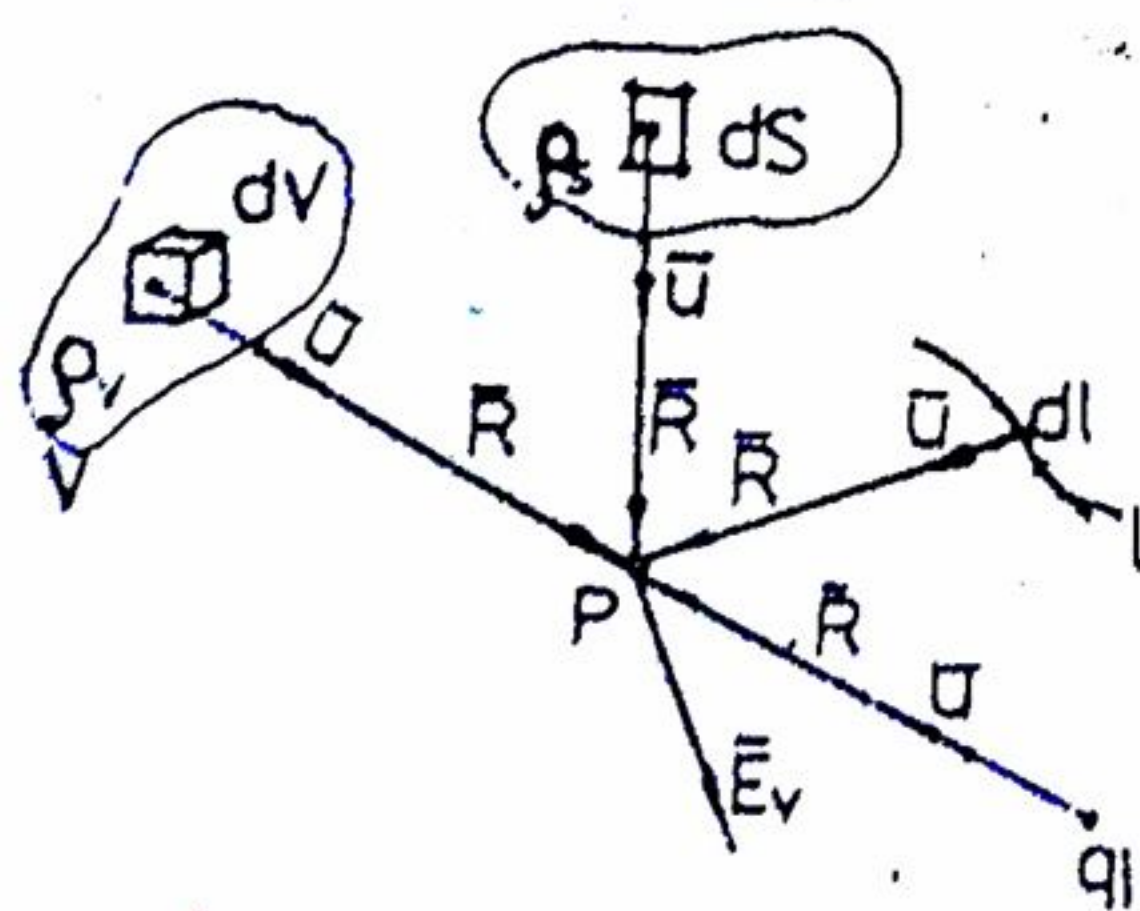


Fig.2.4

În relația (2.6) integralele de volum, de suprafață și de linie se calculează: pe volumul  $V$ , cu sarcini distribuite cu densitatea de volum  $\rho_v$ ; pe suprafața  $S$ , cu sarcini distribuite cu densitatea de suprafață  $\rho_s$  și pe curba  $l$ , cu sarcini distribuite cu densitatea de linie  $\rho_l$ ; iar suma se efectuează pentru toate sarcinile  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ , discrete (concentrate).

### 2.1.4. Potențialul electrostatic

Se admit două corpuri mici situate în vid, încărcate cu sarcinile electrice  $q$  și  $q'$ , primul fiind fix, iar al doilea mobil (cu viteză relativă mică) pe o linie curbă oarecare (fig.2.5).



În punctul oarecare P, lucrul mecanic elementar este:  $dL = \vec{F} d\vec{l}$ , unde (2.1):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \vec{u}, \text{ deci } dL = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R^2} \vec{u} d\vec{l}.$$

Se observă însă că:  $\vec{u} d\vec{l} = dl \cos \alpha = dR$ . Lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului pentru a deplasa corpul cu sarcina  $q'$  din punctul  $P_1$  în punctul  $P_2$  este:

$$L = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.7)$$

care nu depinde de forma conturului, ci numai de poziția punctelor  $P_1$  și  $P_2$  față de corpul fix ( $q$ ).

Dacă se calculează lucrul mecanic de-a lungul conturului închis ( $R_1 = R_2$ ), acesta (2.7) este nul, ceea ce înseamnă că în câmpul electrostatic nu se produce

nici o formă de energie, corpurile cu sarcinile  $q$  și  $q'$  nefiind sediul dezvoltării de căldură.

Câmpul electrostatic este caracterizat prin proprietatea că în el nu are loc dezvoltare de căldură. Deci, dacă în expresia lucrului mecanic elementar  $dL = \vec{F} d\vec{l}$  se înlocuiește  $\vec{F} = q' \vec{E}$ , rezultă o altă formă a lucrului mecanic:  $L = q' \vec{E} d\vec{l} = q' U$ . (2.8)

Dacă se alege o traiectorie din punctul P oarecare până la infinit, se obține:

$$U = V - V_\infty = \frac{L}{q'} = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.9)$$

deci, pentru un mediu cu substanță, omogen, liniar și izotrop rezultă:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.10)$$

Superpoziția potențialelor. Dacă într-un domeniu se găsesc corpuri încărcate cu sarcini electrice repartizate cu densități de volum, de suprafață, de linie, precum și corpuri cu sarcini discrete, potențialul electrostatic într-un punct oarecare din câmp are valoarea dată de superpoziția potențialelor tuturor sarcinilor în acel punct:

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \int_V \frac{\rho_v dV}{R} + \int_S \frac{\rho_s dS}{R} + \int_l \frac{\rho_l dl}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i} \right] \quad (2.11)$$

### 2.1.5. Gradientul potențialului electrostatic. Teorema potențialului electrostatic.

Din diferența potențialelor  $V_1$  și  $V_2$  rezultă tensiunea

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_{P_1}^\infty \vec{E} d\vec{l} - \int_{P_2}^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{l}$$



Dacă în ultima relație se consideră  $V_2 = V_0$  (un potențial de referință) și  $V_1 = V$  (un potențial într-un punct oarecare P), se obține:

$$V = V_0 - \int_{P_0}^P \vec{E} d\vec{l} \quad (2.12)$$

Se diferențiază relația (2.12), în care  $V_0 = \text{constant}$ :

$$dV = -\vec{E} d\vec{l}. \quad (2.13)$$

Notând  $\vec{E}$  și  $d\vec{l}$  prin proiecțiile lor:  $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$ ,  $d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ ,

rezultă:  $dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz), \quad (2.14)$

din care se deduce că potențialul V este o funcție de x, y, z:  $V = V(x, y, z)$ . a cărei diferențială totală este

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (2.15)$$

Comparând relațiile (2.14) și (2.15) se obțin componentele intensității câmpului

electric  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ;  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ;  $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Rezultă:  $\vec{E} = -\left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ , sau:  $\vec{E} = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$ , adică:

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V \quad (2.16)$$

Intensitatea câmpului electrostatic  $\vec{E}$  derivă dintr-un potențial scalar V, definit de relația (2.16).

Aplicația 1. Să se afle potențialul electric V într-un punct P situat în aer ( $\epsilon_r = 1$ ) la distanța R de un fir rectiliniu încărcat uniform cu densitatea de sarcină

$$\rho_l = \frac{q}{l}, \text{ (fig. 2.6).}$$

- Se alege un sistem de axe de coordonate oxyz cu axa oz pe direcția liniei electrizate și un punct P ( $R; 0; 0$ ) pe axa ox.

- Pentru elementul dz, potențialul este:

$$dV = \frac{\rho_l dz}{4\pi\epsilon_0 R_p}, \text{ sau } dV = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}}, \text{ și deci:}$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}}; \quad V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + R^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + R^2}}.$$

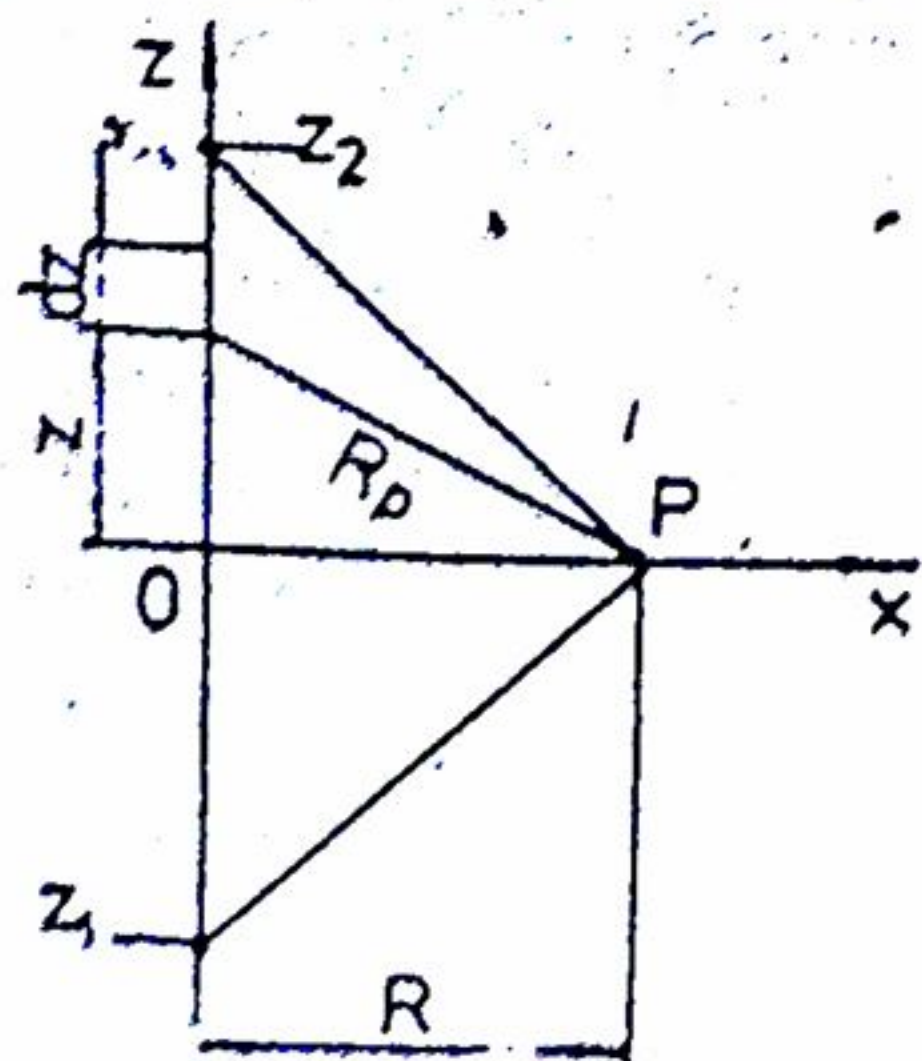


Fig. 2.6



unde  $z_1$  și  $z_2$  sunt coordonatele extremităților firului (finit) electrizat.

Aplicația 2. Să se afle potențialul  $V$  și intensitatea câmpului  $E_v$  într-un punct  $P$  situat pe axa unei spire circulare de rază  $R$ , filiformă și uniform electrizată cu sarcina electrică de densitate  $\rho_1 = \frac{q}{2\pi R}$  (fig.2.7).

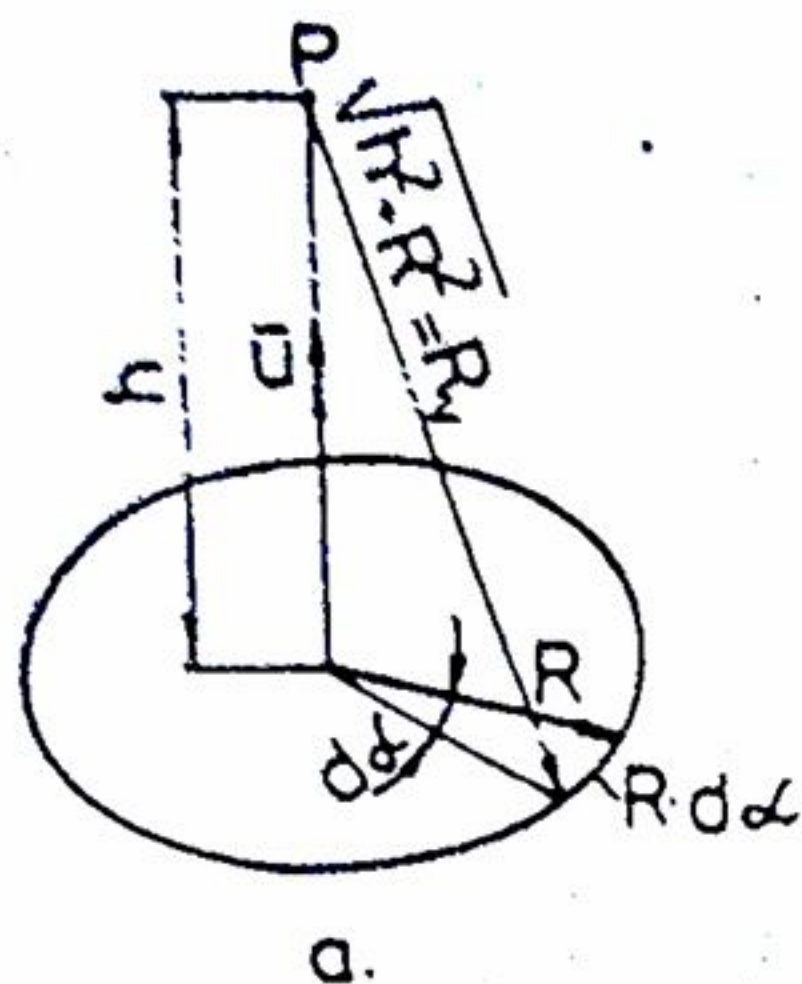


Fig.2.7

Pentru arcul  $R d\alpha$ , încărcat cu sarcina  $q_1 R d\alpha$ , potențialul  $dV$  în punctul  $P$  este:

$$dV = \frac{\rho_1 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}} d\alpha. \text{ Rezultă:}$$

$$V = \frac{\rho_1 R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}} 2\pi, V = \frac{\rho_1 R}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}}. \text{ În centrul}$$

spirei ( $h=0$ ):  $V = \frac{\rho_1}{2\epsilon_0}$ . Intensitatea câmpului electric este

$$\vec{E}_v = -\nabla V = -\nabla \left( \frac{\rho_1 R}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}} \right) = -\vec{u} \frac{\rho_1 R}{2\epsilon_0} \left[ \frac{d}{dh} \left( \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right) \right];$$

$$\vec{E}_v = -\vec{u} \frac{\rho_1 R}{2\epsilon_0} \frac{-h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\rho_1 R h}{2\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}}.$$

În centrul spirei ( $h=0$ ):

$\vec{E}_v = 0$ . Rezultă curbele de variație ale potențialului și intensității câmpului electric în funcție de  $h$  (fig.2.8).

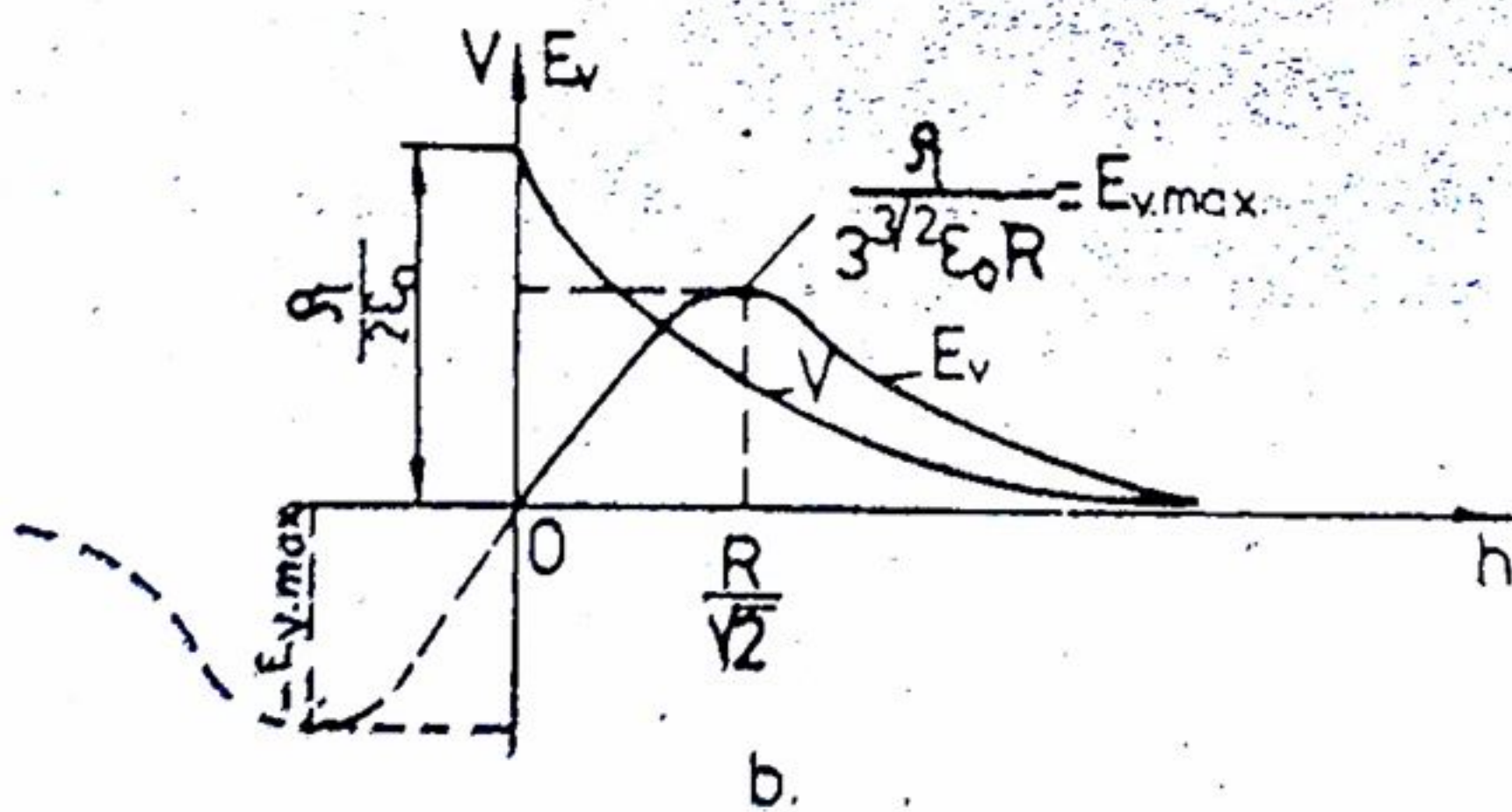


Fig.2.8

Teorema potențialului electrostatic. Se admite că un corp punctiform încărcat cu sarcină  $q'$  se deplasează încet (astfel încât să nu fie depășite limitele regimului

electrostatic) și parcurge conturul închis, din fig.2.5, situat într-un câmp electric  $\vec{E}_0$ . Sub acțiunea forței  $\vec{F} = q' \vec{E}_0$  corpul pleacă din punctul  $P$ , parcurge conturul și ajunge tot în punctul  $P$ , deci diferența de potențial este nulă,

$$V_P - V_P = \oint \vec{E}_0 d\vec{l} = 0 \quad (2.17)$$

Relația (2.17) exprimă teorema potențialului electrostatic, adică circulația vectorului intensității câmpului electric  $\vec{E}_0$  pe contur închis este nulă, deci câmpul



electrostatic se menține fără consum de energie din exterior și este un câmp irotațional:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (2.18)$$

### 2.1.6. Teorema refracției liniilor de câmp electric

Din legea fluxului electric rezultă că valoarea componentelor normale ale inducției electrice, de o parte și de alta a unei suprafețe de separație a doi dielectrici (fig.2.9)

este aceeași, dacă nu există sarcini adevărate - libere - pe suprafața respectivă:

$$\oint_S \vec{D}_1 d\vec{S} = \oint_S \vec{D}_2 d\vec{S} \text{ sau}$$

$$D_1 dS \cos \alpha_1 = D_2 dS \cos \alpha_2,$$

deci:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (2.19)$$

Din teorema potențialului electric

$$\text{rezultă: } V_M = \int_M^\infty \vec{E}_1 d\vec{l} = \int_M^\infty \vec{E}_2 d\vec{l}$$

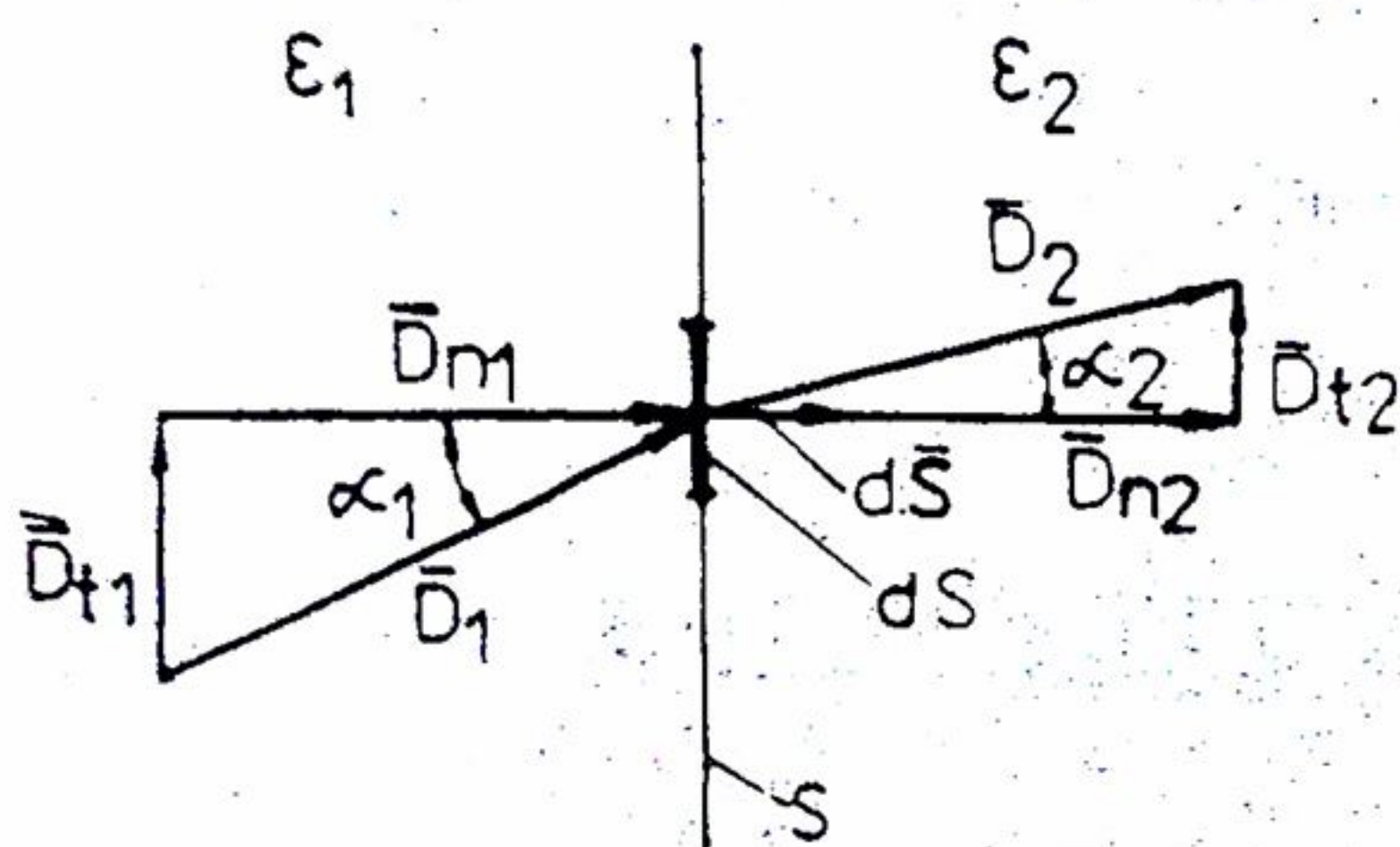


Fig.2.9

$$\text{sau: } E_1 dl \cos(90^\circ - \alpha_1) = E_2 dl \cos(90^\circ - \alpha_2), \text{ deci: } E_{t1} = E_{t2} \quad (2.20)$$

Din fig. 2.10 rezultă:

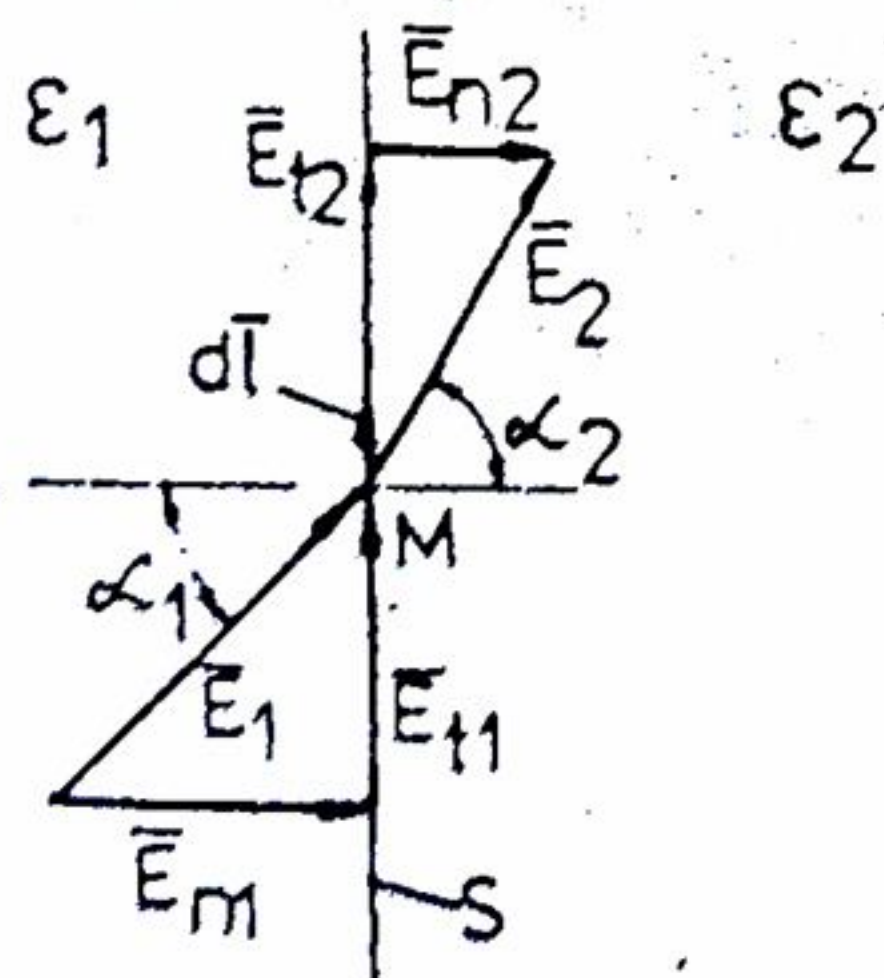


Fig.2.10

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}}$$

$$\text{Dar, } D_{t1} = \epsilon_1 E_{t1}, D_{t2} = \epsilon_2 E_{t2} \quad (2.21)$$

$$\text{și deci: } \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1 E_{t1}}{\epsilon_2 E_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (2.22)$$

care reprezintă teorema refracției liniilor de câmp electric.

### 2.1.7. Străpungerea dielectricilor

Valoarea intensității câmpului electric pentru care dielectricul își pierde calitățile de izolanț reprezintă rigiditatea electrică (sau dielectrică)  $E_0$ . În tabelul de mai jos se prezintă unele valori orientative pentru rigiditatea dielectrică a unor materiale, la 20°C, pentru o încercare de un minut.



Materialul	$E_d \cdot 10^5 \frac{V}{m}$	Materialul	$E_d \cdot 10^5 \frac{V}{m}$
Preșpan	110 - 300	Hârtie uleiată	1000
Aer uscat	21	Bachelită pură	200
Sticlă	120 - 200	Cauciuc dur	100 - 300
Cuarț	170 - 200	Ulei de transformator	80 - 120
Mică	250	Porțelan glazurat	300 - 380

Experimental se constată că  $E_d$  depinde de: natura, puritatea și capacitatea de cedare de căldură a izolanului, forma electrozilor metalici între care are loc străpungerea izolanului, distanța între ei, durata de aplicare a tensiunii, presiune, umiditate, temperatură, impuritățile din dielectric etc.

## 2.2 CIRCUITE CU CONDENSATOARE

### 2.2.1. Capacitatea electrică

Sistemul format din două conductoare (plăci sau armături) omogene, încărcate cu sarcini electrice egale și de semne contrare, separate printr-un dielectric, constituie un condensator electric. Prin capacitate electrică a unui condensator, se înțelege mărimea dată de relația:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U}, \quad (2.23)$$

în care  $q$  este sarcina pozitivă a uneia dintre armături, iar  $U$  - diferența de potențial dintre ele, astfel aleasă încât:  $V_1 - V_2 > 0$ .

Relația (2.23) este valabilă numai dacă dielectricul este neîncărcat și fără polarizație permanentă.

### 2.2.2 Legarea condensatoarelor

Se va prezenta legarea în serie, paralel, în stea și în triunghi.

1) Condensatoare legate în serie. La o conexiune în serie a  $n$  condensatoare, sarcina pozitivă (de pe armătura pozitivă) a primului condensator provoacă prin influență apariția unei sarcini egale și de semn contrar pe cealaltă armătură a aceluiași condensator. Conform teoremei conservării sarcinii electrice, apare sarcina pozitivă pe armătura pozitivă a celui de al doilea condensator. Procesul se repetă până la armătura negativă a



ultimului condensator.

Tensiunea de la bornele sistemului (fig.2.11), egală cu suma tensiunilor de la bornele condensatoarelor este, succesiv:

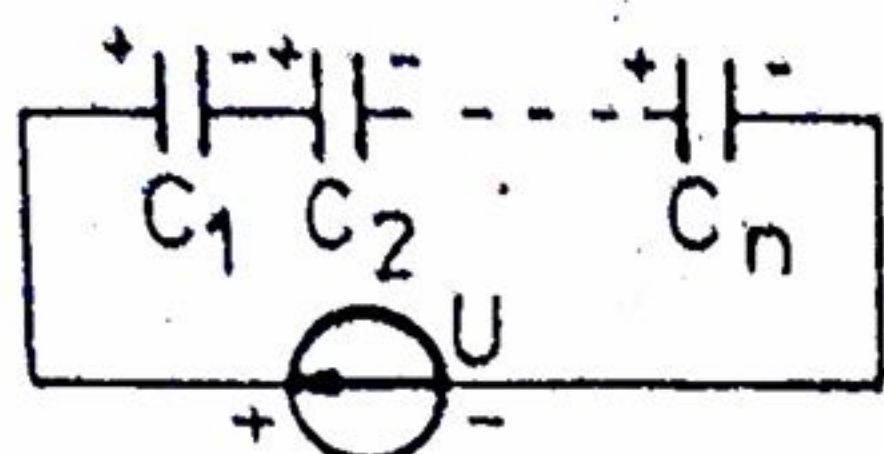


Fig.2.11

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2} \dots U_n = \frac{q}{C_n}, U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

$$U = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right), U = q \frac{1}{C_e}, \text{ unde } C_e, \text{ dat}$$

$$\text{de relația: } \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum \frac{1}{C_i} \quad (2.24)$$

reprezintă capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare legate în serie.

2) Condensatoare legate în paralel. La o conexiune în paralel a n condensatoare, având toate aceeași tensiune U la borne (fig.2.12), fiecare condensator se încarcă proporțional cu capacitatea sa:

$$q_1 = C_1 U$$

$$q_2 = C_2 U$$

$$q_n = C_n U$$

Fig.2.12

$$\text{Dar : } q_1 + q_2 + \dots + q_n = q = U(C_1 + C_2 + \dots + C_n); q = UC_e, \text{ unde } C_e, \text{ dat de}$$

$$\text{relația: } C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum C_i. \quad (2.25)$$

reprezintă capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare legate în paralel.

3) Condensatoarele legate în stea și în triunghi (fig.2.13) se pot transfigura. Transfigurările conexiunii stea în conexiune triunghi și a conexiunii triunghi în conexiune stea a condensatoarelor, sunt posibile numai dacă conexiunea echivalentă își menține după transfigurare aceleași potențiale la bornele 1,2,3 și ar absorbi prin aceste borne, aceleași sarcini electrice, ca înainte de transfigurare.

Capacitățile echivalente dintre borne, luate două câte două sunt :

$$C_{12} + \frac{C_{23}C_{31}}{C_{23} + C_{31}} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}, \quad C_{23} + \frac{C_{31}C_{12}}{C_{31} + C_{12}} = \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3},$$

$$C_{31} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{12} + C_{23}} = \frac{C_3C_1}{C_3 + C_1} \quad (2.26)$$

Rezolvând sistemul (2.26) în raport cu  $C_1, C_2, C_3$ , se găsește (pentru transfigurarea din triunghi în stea):

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12}C_{31}}{C_{23}}, \quad C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23}C_{12}}{C_{31}}, \quad C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31}C_{23}}{C_{12}} \quad (2.27)$$



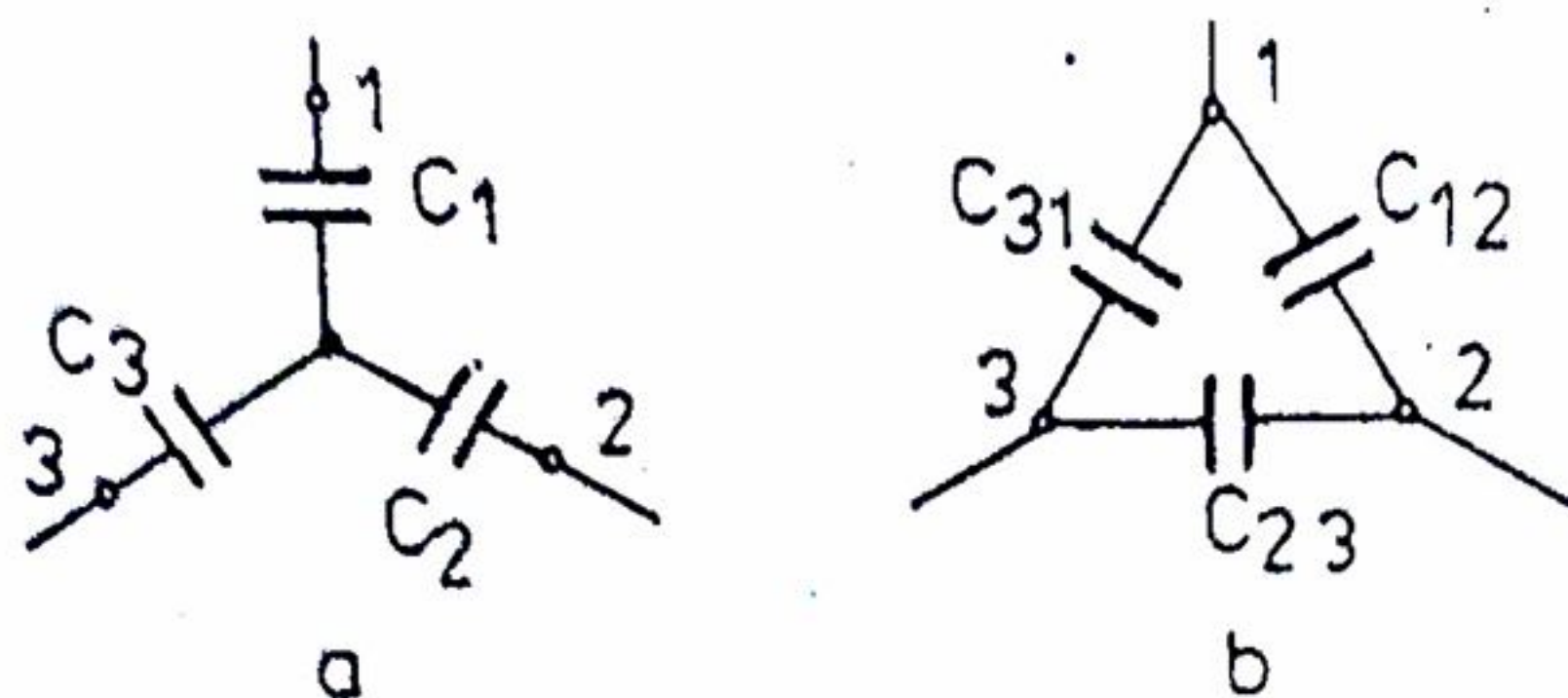


Fig. 2.13

Rezolvând sistemul (2.26) în raport cu  $C_{12}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{31}$ , se găsește (pentru transfigurarea din stea în triunghi) :

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} &= \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{31} &= \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned} \quad (2.28)$$

### 2.2.3 Calculul capacităților

Pentru calculul capacităților se admite că sistemul (condensatorul) este încărcat cu sarcinile  $(+q)$  și  $(-q)$ , se determină intensitatea câmpului electric  $E$  în funcție de  $q$ , se calculează tensiunea electrică  $U$  de-a lungul unei linii de câmp în dielectricul dintre conductoare (armături), apoi se determină capacitatea cu relația (2.23).

1) Capacitatea condensatorului plan. Condensatorul plan este format din două armături plane paralele la o distanță  $d$ , mică față de dimensiunile armăturilor, despărțite de un dielectric de permitivitate  $\epsilon$  (fig. 2.14). În acest caz, câmpul electric între armături poate fi considerat uniform.

Aplicând legea fluxului electric la suprafața  $S$ , se obține:

$\psi = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D dS = DS = q$ , deci:  $D = \frac{q}{S}$  sau  $E = \frac{q}{S}$ ,  $E$  fiind intensitatea câmpului electric între armături.

Tensiunea între armături, de-a lungul unei linii de câmp este:

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dl = Ed.$$

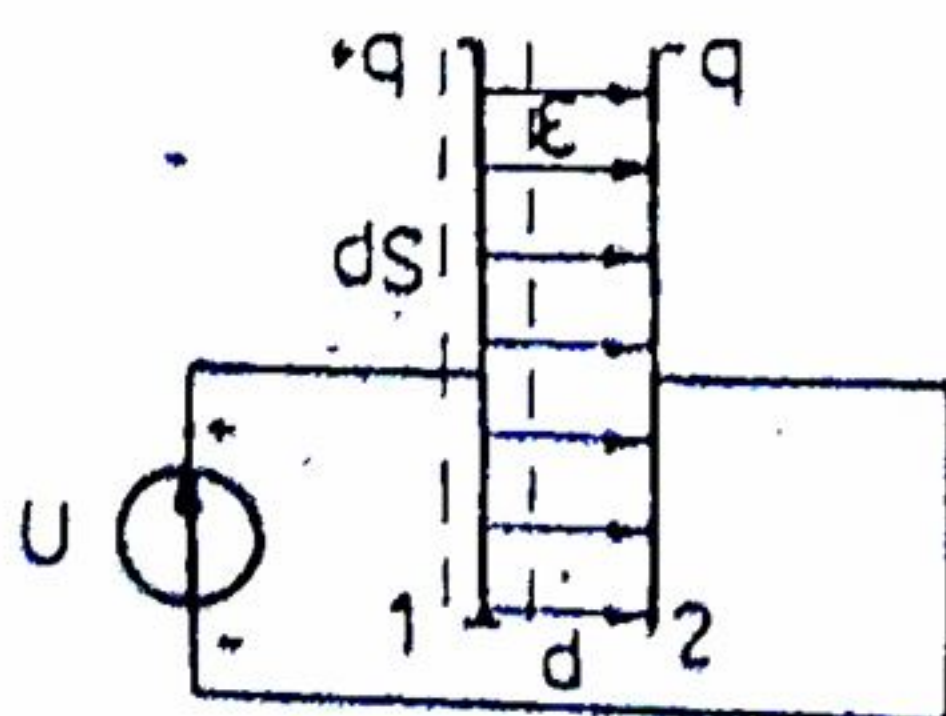


Fig. 2.14

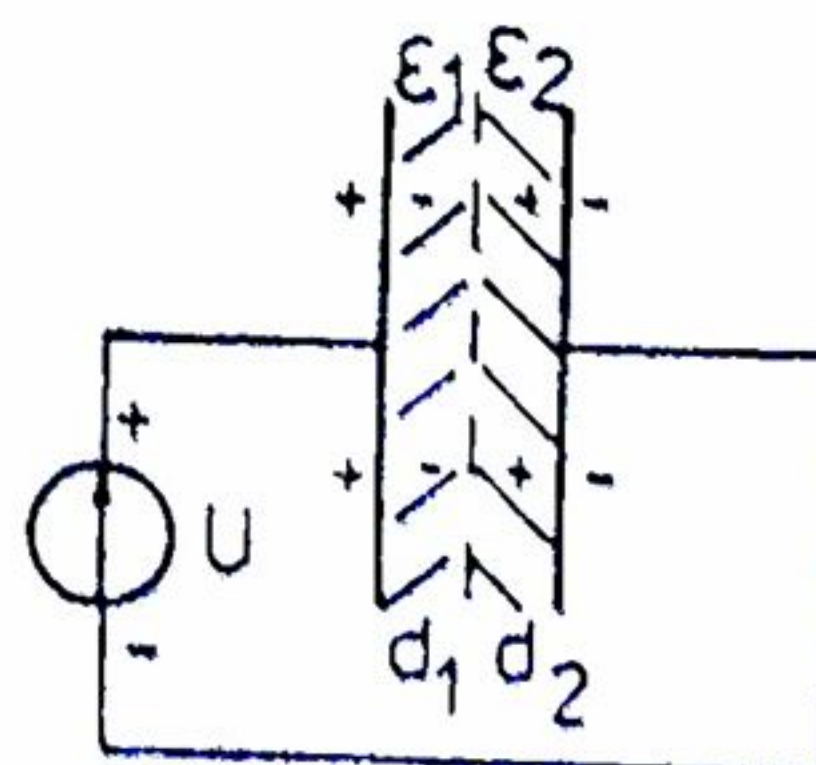


Fig. 2.15



Capacitatea are expresia:  $C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{Ed} = \frac{\epsilon S}{d}$  (2.29)

În cazul când dielectricul între armături este format din doi dielectrici diferiți, având fiecare permittivitatea  $\epsilon_1$ , respectiv  $\epsilon_2$  și de grosimi diferite  $d_1$  și  $d_2$  (fig.2.15), se poate considera planul de separație al celor doi dielectrici, ca suprafață echipotențială, încărcată pe o parte de sarcina (+q) și pe cealaltă cu (-q). Se formează astfel un sistem de două condensatoare în serie, de capacități:  $C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1}$  și  $C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2}$ .

Capacitatea echivalentă se calculează cu relația:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{S\epsilon_1} + \frac{d_2}{S\epsilon_2}$ .

sau  $C = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$  (2.30)

2) Capacitatea condensatorului cilindric Condensatorul cilindric (fig 2.16) este format din doi cilindri conductori, coaxiali, de lungime l, cu razele  $R_1$  și  $R_2$ , separați printr-un dielectric omogen de permittivitate  $\epsilon$ .

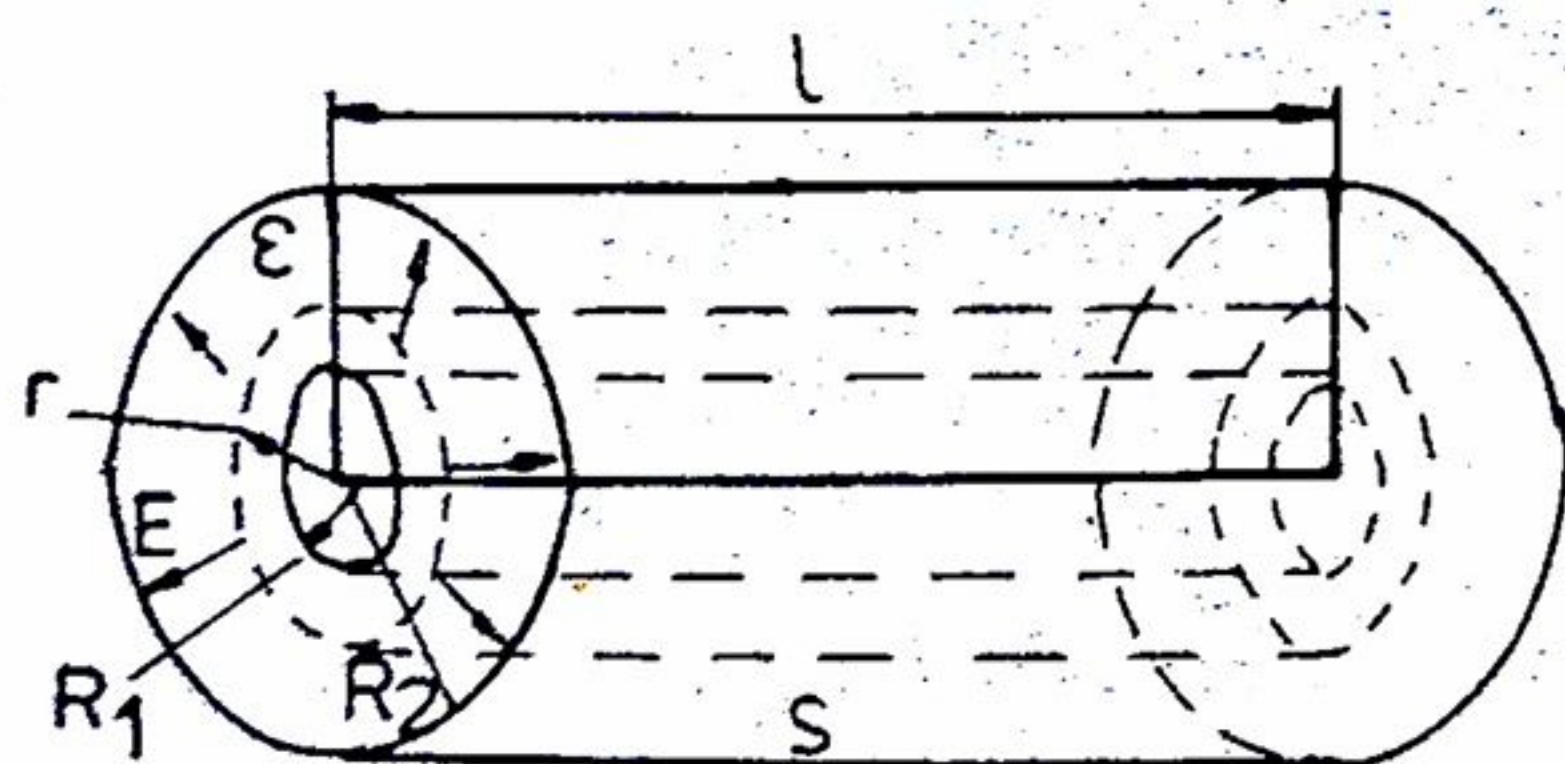


Fig.2.16

Conductorul interior este încărcat cu sarcina (+q) și, din motive de simetrie, liniile de câmp au direcția radială.

Se aplică legea fluxului electric la o suprafață cilindrică  $S$ , coaxială, de lungime l, cu o rază  $r$ , cuprinsă între  $R_1$  și  $R_2$ . Fluxul prin bazele cilindrului fiind nul, se obține

$$\psi = \int_S \vec{D} d\vec{S} = D 2\pi r l = q, \quad D = \frac{q}{2\pi r l} \quad \text{și} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{2\pi \epsilon r l}$$

Tensiunea între cele două armături, calculată de-a lungul unei linii de câmp, este

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{2\pi \epsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Rezultă capacitatea:  $C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$  (2.31)

Dacă se exprimă capacitatea în  $\mu F/km$ , rezultă formula:  $C = \frac{\epsilon_r}{18 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} [\mu F/km]$ .



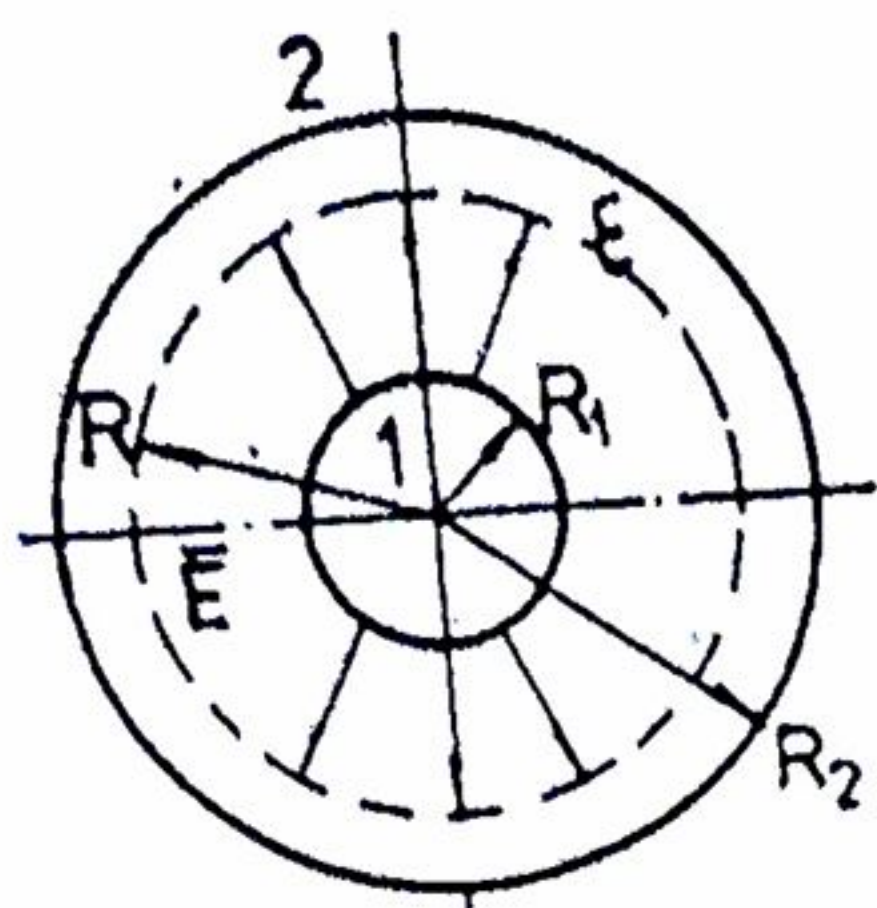


Fig.2.17

### 3) Capacitatea condensatorului sferic.

Condensatorul sferic are ca armături două sfere conductoare concentrice de raze  $R_1$  și  $R_2$ , separate printr-un dielectric omogen, de permitivitate  $\epsilon$  (fig.2.17). Armătura interioară este încărcată cu sarcina  $(+q)$ . Liniile de câmp sunt radiale.

Aplicând legea fluxului electric la o suprafață sferică de rază  $R$ , cuprinsă între  $R_1$  și  $R_2$ , se obține:

$$\psi = \int_S \vec{D} d\vec{S} = D 4\pi R^2 = q \text{ sau}$$

$$D = \frac{q}{4\pi R^2}, \text{ respectiv } E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^2}.$$

Tensiunea electrică calculată de-a lungul unei linii de câmp este :

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$\text{Rezultă capacitatea : } C = \frac{q}{U} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Pentru capacitatea unei singure sfere de rază  $R_1$  se consideră sfera exterioară la

$$\text{infinit } (R_2 = \infty): C = \frac{q}{U} 4\pi\epsilon \frac{R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}} = 4\pi\epsilon R_1$$

Aplicarea acestei formule dă posibilitatea de a se calcula de exemplu, capacitatea

$$\text{globului terestru, cu } R_1 = 6370 \text{ km și } \epsilon_r = 1: C = 4\pi\epsilon_0 R_1 = \frac{4}{4\pi 9 \cdot 10^9} 6.37 \cdot 10^6 = 700 \mu F.$$

4) Capacitatea liniei bifilare. Se consideră două conductoare aeriene, de secțiune egală, cu raza  $r$ , de lungime  $l$ , situate la distanța  $d$  și izolate față de pământ (fig.2.18.a).

În punctul  $P$  există intensitatea câmpului electric  $\vec{E}_1$  dat de conductorul 2. Intensitatea câmpului electric rezultat este  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  unde  $E_1$  și  $E_2$  se calculează din legea fluxului electric :

$$\int_S \vec{D}_1 d\vec{S} = D_1 S_1 = \epsilon E_1 2\pi x l = q, \int_S \vec{D}_2 d\vec{S} = D_2 S_2 = \epsilon E_2 2\pi (d-x) l = q.$$

$$\text{Rezultă, succesiv : } E = E_1 + E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon l x} + \frac{q}{2\pi\epsilon l (d-x)}, E = \frac{q}{2\pi\epsilon l} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Tensiunea între conductoare este:

$$U = \int_r^{d-r} \vec{E} d\vec{x} = \int_r^{d-r} E dx = \int_r^{d-r} \frac{q}{2\pi\epsilon l} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx, \quad U = \frac{q}{\pi\epsilon l} \ln \frac{d-r}{r}.$$



Capacitatea liniei aeriene cu două conductoare și izolată este

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d-r}{r}} \quad [F] \quad (2.32)$$

Dacă  $d \gg r$  rezultă capacitatea pe unitatea de lungime:  $C = \frac{\epsilon_r}{36 \ln \frac{d}{r}} \quad [\mu F/km]$ .

5) Capacitatea conductorului față de pământ. Se consideră un conductor aerian, cilindric, drept, de lungime  $l$  și rază  $r$ , paralel cu pământul, situat la distanța  $h$ .

Dacă în fig. 2.18.a,  $x = d/2$ , atunci  $P$  are potențialul zero (ca și al pământului). În acest caz, sarcina  $(-q)$  reprezintă imaginea sarcinii  $(+q)$ , iar metoda de calcul folosită în această aplicație se numește metoda imaginilor electrice (fig. 2.18.b), unde  $h \gg r$ .

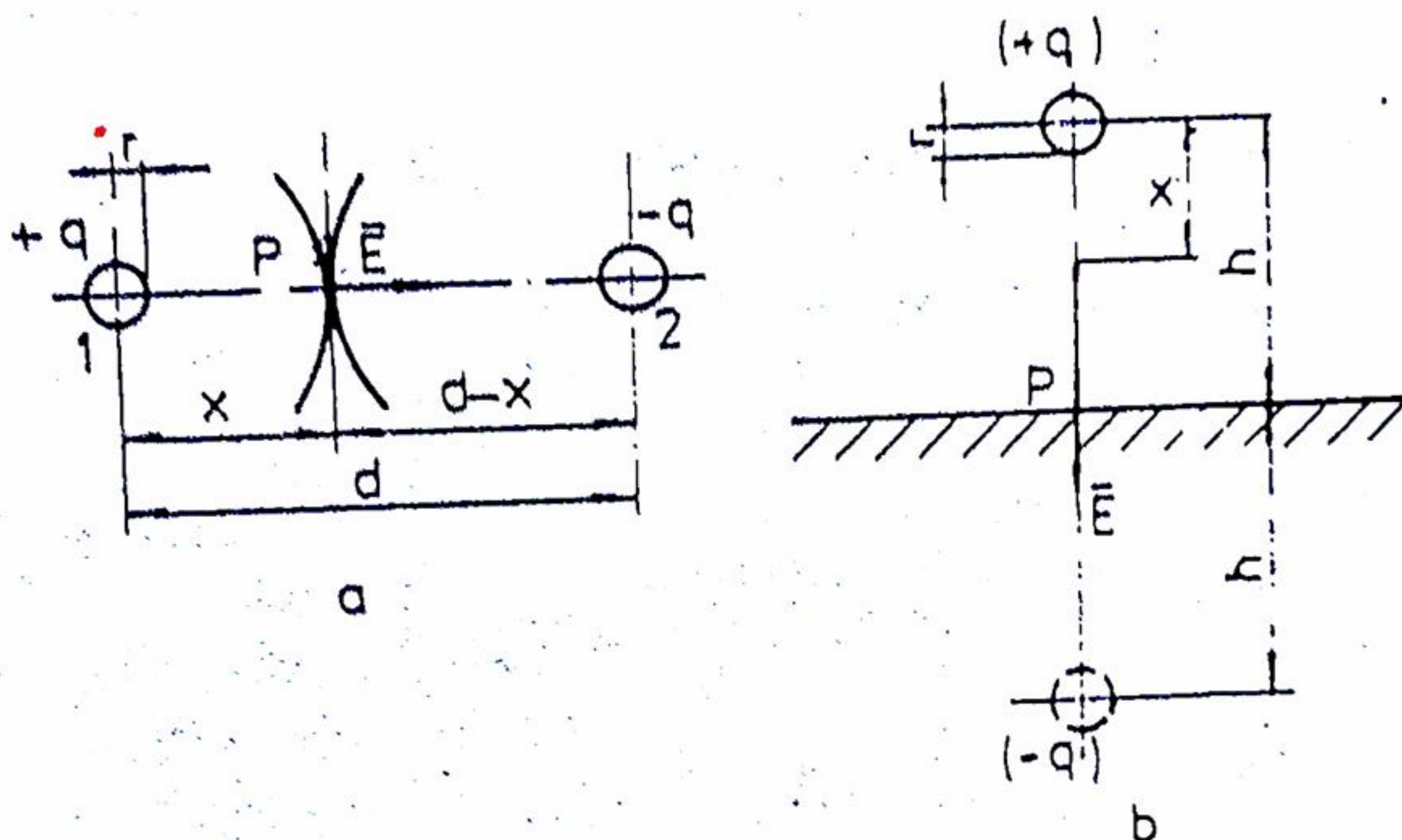


Fig. 2.18

La distanța  $x$ , intensitatea câmpului electric  $E$  este dată de legea fluxului electric

$$q = \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D dS = \epsilon E 2\pi x l, \text{ deci: } E = \frac{q}{2\pi \epsilon l x}. \text{ Tensiunea între conductorul aerian și}$$

$$\text{imaginea lui este: } U = \int_r^{2h} E dx = \int_r^{2h} \frac{q}{2\pi \epsilon l x} dx = \frac{q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{2h}{r}.$$

Capacitatea conductorului aerian față de pământ este:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{2h}{r}} \quad [F] \quad (2.33)$$

sau:

$$C = \frac{\epsilon_r}{18 \ln \frac{2h}{r}} \quad [\mu F/km].$$



6) Capacitatea de serviciu a liniilor electrice. Prin capacitatea de serviciu  $C_{s\ ki}$  se înțelege raportul dintre sarcina electrică  $q_k$  a unui conductor dintr-un sistem de conductoare și tensiunea electrică  $U_{ki}$  de la conductorul (k) la un alt conductor (i) al sistemului:

$$C_{s\ ki} = \frac{q}{U_{ki}} \quad (2.34)$$

Ultima relația se utilizează practic în regimurile (serviciile) particulare ale sistemului de conductoare (de exemplu, când suma sarcinilor conductoare este zero, sau potențialul unui conductor este zero etc.)

Aplicația 1. Capacitatea de serviciu a unui singur conductor față de pământ (fig.2.18.b) este dată de relația (2.33):

$$C_s = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h}{r}} \quad (2.34)$$

Aplicația 2. Să se determine capacitatea de serviciu între conductoarele 1 și 2 în regimul de serviciu (fig.2.19.a). Se ia:

$$q_1 = -q_2 = q \text{ și } V_3 = 0 \quad (2.35)$$

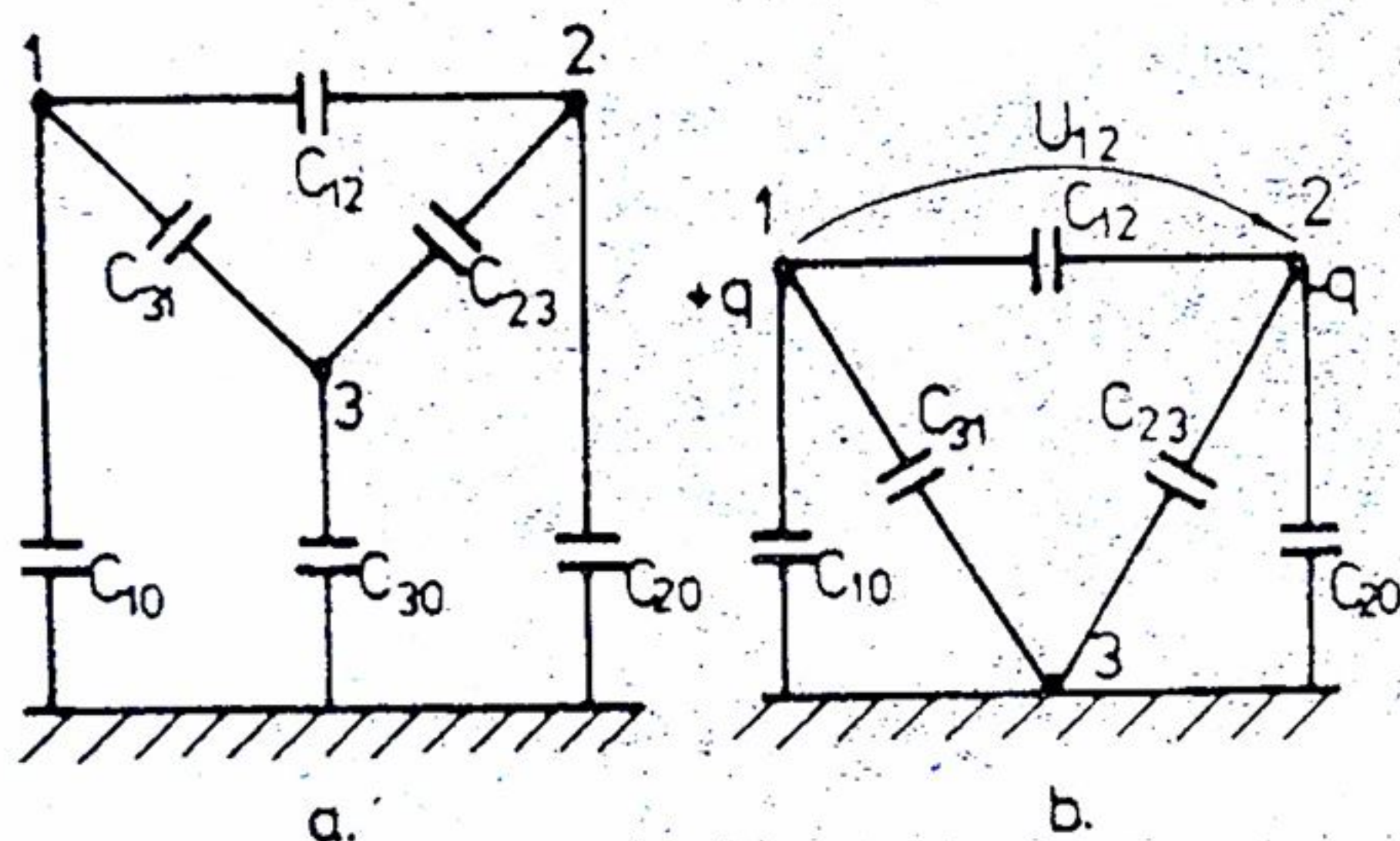


Fig.2.19

Schema din fig.2.19.a se transformă în schema echivalentă din fig.2.19.b. în care capacitatea de serviciu cerută este dată de relația:

$$C_{s\ 12} = \frac{q}{U_{12}} \text{ , sau, cu (2.24)}$$

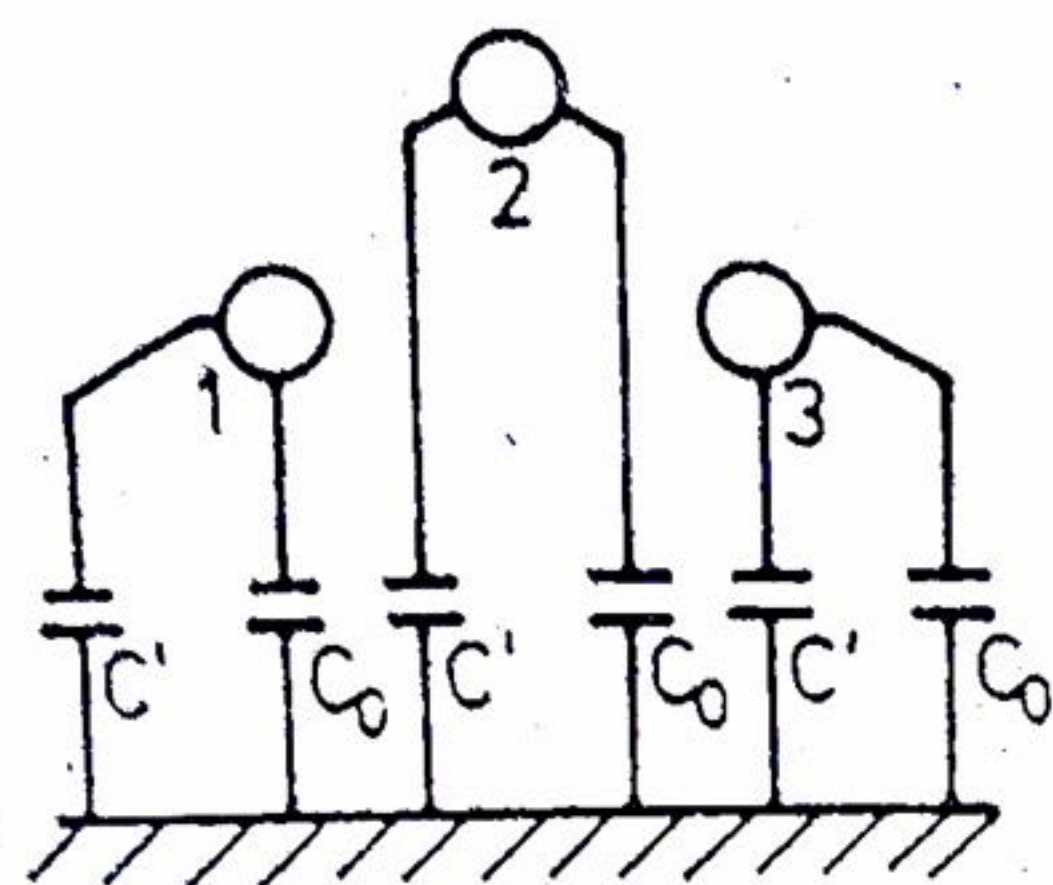
și (2.25) rezultă:

$$C_{s\ 12} = C_{12} + \frac{(C_{10} + C_{31})(C_{20} + C_{23})}{(C_{10} + C_{31}) + (C_{20} + C_{23})} \quad (2.36)$$

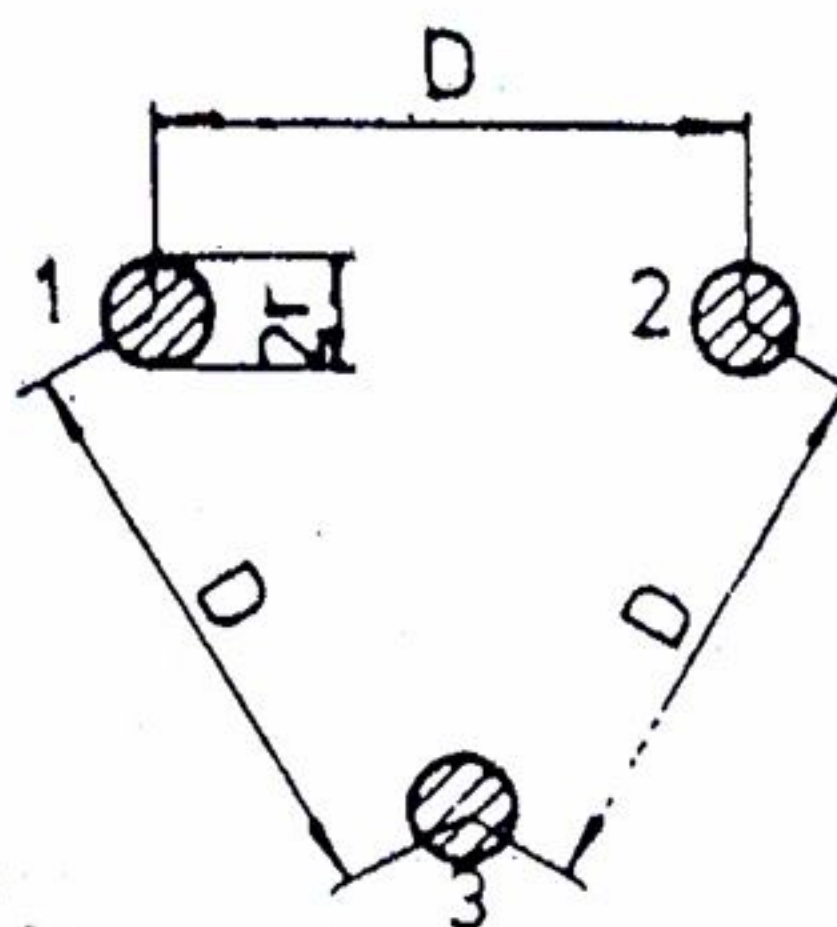
Aplicația 3. Să se determine capacitatea de serviciu a liniilor aeriene trifilare. Se calculează în mod analog cu cea a liniilor bifilare (prima metodă a imaginilor), făcându-se o simetrizare prin transpuneri succesive ale conductoarelor și obținându-se din fig.2.19:  $C_{10} = C_{20} = C_{30} = C_0$  și  $C_{12} = C_{23} = C_{31} = C$ .

Capacitatea de serviciu  $C_s$  se obține din schema echivalentă de transfigurare din triunghi (fig.2.19.a) în stea (fig.2.20) unde  $C' = 3C$ . Deci:





a.



b.

Fig.2.20

$$C_s = 3C + C_0. \quad (2.37)$$

În (2.37),  $C$  se calculează cu (2.32):

$$C = \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{D-r}{r}} \approx \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{D}{r}}$$

iar  $C_0$  se calculează cu (2.33):

$$C_0 = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{2h}{r}}$$

#### 2.2.4 Energia câmpului electrostatic

Energia câmpului electric (electrostatic) se calculează presupunând că într-un anumit sistem din câmp, particulele electrizate sunt aduse în mod continuu de forțe exterioare. Dacă starea inițială a sistemului este caracterizată pe potențialul  $V = 0$  și sarcina  $q = 0$ , atunci o stare intermediară poate fi exprimată prin potențialul  $0 \leq pV \leq V$  și sarcina  $0 \leq pq \leq q$ , unde  $0 \leq p \leq 1$ . Rezultă că energia purtătorului a crescut cu cantitatea :

$$dW_i = pV_i d(pq_i) \quad (2.38)$$

Energia purtătorului de rang  $i$  este :

$$W_i = V_i q_i \int_0^1 p dp = \frac{1}{2} q_i V_i \quad (2.39)$$

iar energia electrică a întregului sistem va fi:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (2.40)$$

Pentru un condensator:

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad (2.41)$$

unde  $C$  este capacitatea condensatorului.

Densitatea de energie este:

$$W_{0e} = \frac{W_e}{V} = \frac{W_e}{Sd} = \frac{qU}{2Sd} = \frac{1}{2} \rho_s E \quad (2.42)$$

sau :

$$W_{0e} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{\epsilon E^2}{2} \quad (2.43)$$



### 2.2.5. Teorema forțelor generalizate în câmpul electrostatic

Pentru a se deplasa pe distanța elementară  $dx$ , unui corp din câmpul electrostatic îi este necesară o energie  $dW$  egală cu lucrul mecanic  $dL$  de deplasare.

$$dW_e = dL = Xdx, \quad (2.43)$$

unde  $X$  este forța generalizată din câmp care acționează asupra corpului. În acest caz  $x$  este coordonată generalizată.

De regulă, din (2.43) se calculează forța  $X$  cu relația:

$$X = \pm \frac{dW_e}{dx} \quad (2.44)$$

Semnul (+) se folosește când în (2.40) potențialele sunt constante ( $V_i = \text{ct.}$ ), iar semnul (-) se folosește când în (2.40) sarcinile sunt constante ( $q_i = \text{ct.}$ ).

Aplicație: Forța de atracție între armăturile unui condensator.

Dacă se păstrează constantă tensiunea din (2.41) atunci (2.44) este:

$$X = + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} CU^2 \right) = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx} \quad (2.45)$$

Dacă se păstrează constantă sarcina din (2.35), atunci (2.44) este:

$$X = - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} \quad (2.46)$$

Relațiile (2.45) și (2.46) sunt echivalente, deoarece  $U^2 = \frac{q^2}{C^2}$ .

Comparând (2.45) și (2.29), unde distanța dintre armături,  $d$ , se înlocuiește cu  $x$ .

rezultă: 
$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon S}{x} \right) = - \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon S}{x^2}, \text{ sau (cu } x = d): U = d \sqrt{\frac{2F}{\epsilon S}}$$

Dacă  $F = G$  reprezintă greutatea care menține în echilibru electrometrul Kelvin (o balanță în care unul din talere este înlocuit cu un condensator plan), atunci ultima relație permite calculul t.e.m. (de exemplu unui element galvanic, ale cărui borne sunt puse în legătură cu armăturile condensatorului).

### 2.2.6. Metode de rezolvare a circuitelor cu condensatoare

În general, la circuitele cu condensatoare se cunosc valorile capacităților și surselor de tensiune și se pune problema calculării sarcinilor electrice, a tensiunilor la bornele condensatoarelor și a energiei înmagazinate în condensatoare. În continuare se prezintă principalele metode de rezolvare a circuitelor electrostatice.

1) Metoda teoremelor lui Kirchhoff. Pentru determinarea sarcinilor se folosește legea conservării sarcinii electrice (teorema I a lui Kirchhoff)



$$\sum_{i=1}^m q_i = 0 \quad (2.47)$$

unde  $m$  este numărul de sarcini electrice din nodul electrostatic considerat, precum și teorema potențialului electrostatic pe un contur închis alcătuit din laturi (teorema II a lui Kirchhoff):

$$\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{C_j} = \sum_{k=1}^p U_k \quad (2.48)$$

unde  $n$  este numărul de condensatoare din circuitul parcurs, iar  $p$  - numărul de surse de tensiune din acel circuit (bucă).

Relația (2.47) se aplică de  $(N-1)$  ori, unde  $N$  este numărul de noduri electrice (electrostatice). Un exemplu de aplicare se referă la fig. 2.21 a:  $q_1 + q_2 - q_3 - q_4 = 0$ .

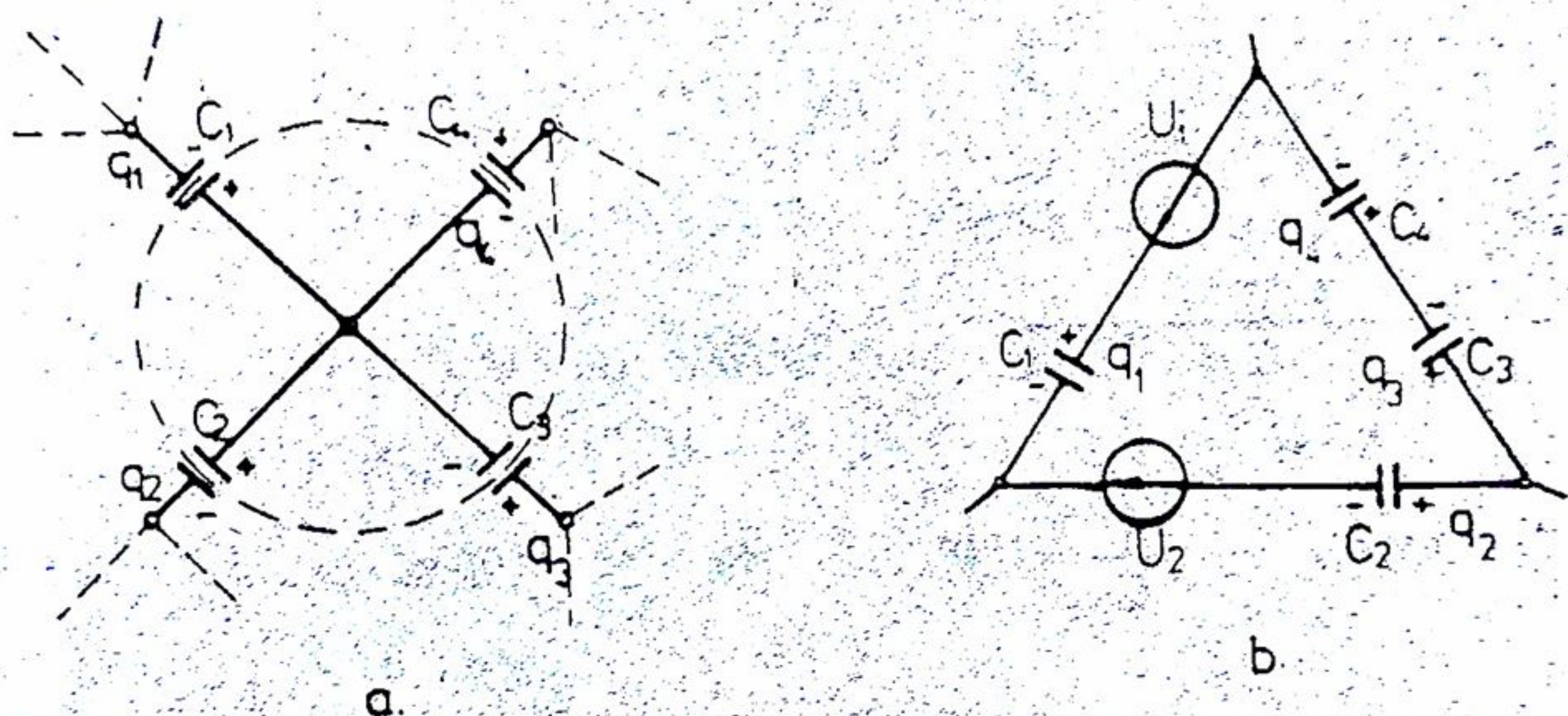


Fig. 2.21

Cea de a  $N$  - a ecuație nu este independentă, ci reprezintă o consecință a primelor  $(N-1)$  ecuații.

Relația (2.48) se aplică de  $B$  ori, unde  $B$  este numărul de bucle independente (fundamentale) din rețea. Un exemplu de aplicare se referă la fig. 2.21. b:

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = U_1 - U_2$$

Cu ecuațiile (2.47) și (2.48) se formează un sistem de  $L$  ecuații:

$$L = N - 1 + B, \quad (2.49)$$

unde  $L$  reprezintă numărul de laturi din rețea (numărul de necunoscute, de exemplu sarcinile electrice  $q$ ).

Calculul circuitelor cu condensatoare folosind metoda aceasta, necesită următoarele etape:

- determinarea numărului de noduri ( $N$ ), laturi ( $L$ ) și bucle (ochiuri sau circuite), care nu se suprapun ( $B$ );
- stabilirea (arbitrară) a semnelor sarcinilor electrice pe armăturile condensatoare-



lor și alegerea (arbitrară) a unui sens de parcurgere:

- scrierea sistemului de  $L$  ecuații. La acest sistem se adaugă și ecuațiile rezultate din egalitatea sarcinilor condensatoarelor înseriate (sau din egalitatea tensiunilor condensatoarelor derivație);

- rezolvarea sistemului de ecuații. Dacă pentru una sau mai multe sarcini se obțin valori negative, se va schimba polaritatea armăturilor respective;

- determinarea tensiunilor și energiei înmagazinată în condensatoare.

Aplicația 1. Să se rezolve prin metoda teoremelor lui Kirchhoff prezentate mai sus, circuitul cu condensatoare din fig. 2.22, în care:

$$C_1 = 7 \mu\text{F}, C_2 = 4 \mu\text{F}, C_3 = 1 \mu\text{F}, C_4 = 2 \mu\text{F}, U = 250 \text{ V}.$$

Se formează sistemul: (A) :  $-q_1 + q_2 + q_3 = 0$ ;

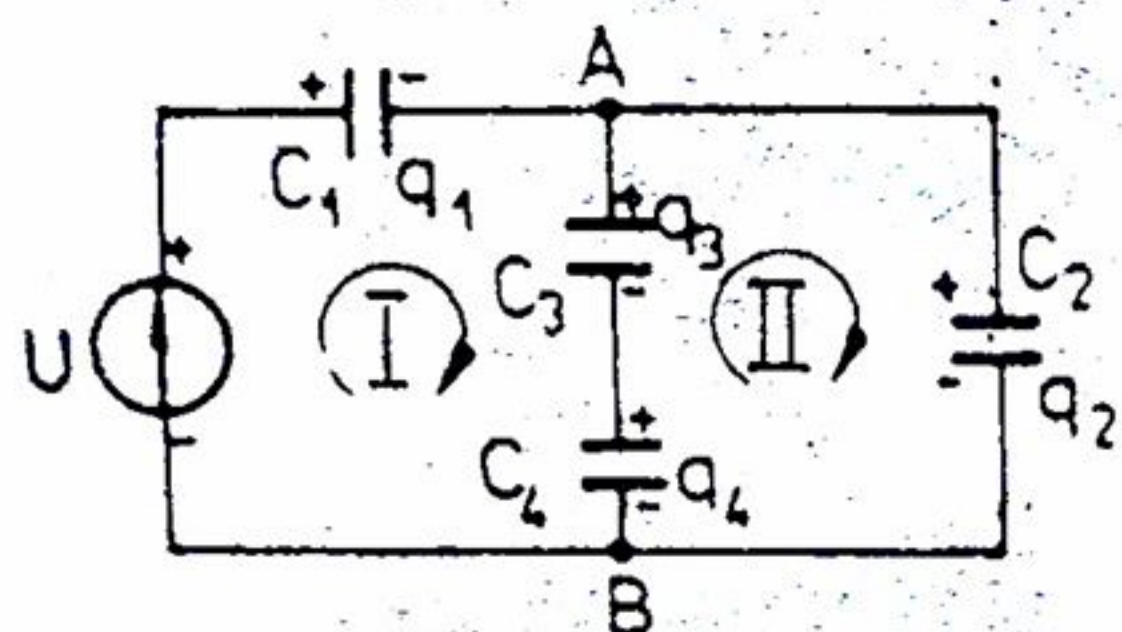


Fig.2.22

$$(I) : \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = U;$$

$$(II) : \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} = 0$$

în care:  $q_3 = q_4$ . Se obține :  $q_1 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ,

$$q_2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}, q_3 = q_4 = 10^{-4} \text{ C}.$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 100 \text{ V}, U_2 = \frac{q_2}{C_2} = 150 \text{ V}, U_3 = \frac{q_3}{C_3} = 100 \text{ V}, U_4 = \frac{q_4}{C_4} = 50 \text{ V},$$

$$W_1 = \frac{1}{2} q_1 U_1 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ J}, W_2 = \frac{1}{2} q_2 U_2 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ J}, W_3 = \frac{1}{2} q_3 U_3 = 10^{-2} \text{ J},$$

$$W_4 = \frac{1}{2} q_4 U_4 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}, W = \sum_{i=1}^4 W_i = 17,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

2) Metoda transfigurării. Transfigurarea grupului de condensatoare din triunghi în stea, sau a grupului de condensatoare din stea în triunghi (fig. 2.13), se folosește în scopul de a reduce numărul de laturi (noduri) dintr-un circuit electrostatic și a rezolva, deci, un sistem cu mai puține ecuații date de teoremele lui Kirchhoff. Se revine apoi la circuitul inițial, urmând să se mai rezolve de regulă un sistem cu trei ecuații, pentru a determina sarcinile din grupul triunghi (sau stea) transfigurat. Pentru transfigurare se folosesc relațiile (2.27) și (2.28), în funcție de structura rețelei cu condensatoare.

Aplicația 2. Să se rezolve prin metoda transfigurării circuitul electrostatic reprezentat în fig. 2.23, în care :  $U = 60 \text{ V}$ ,  $C_1 = 1,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 4 \mu\text{F}$ ,  $C_5 = 2,5 \mu\text{F}$ .

Se transfigurează  $C_1 C_2 C_3$  în stea (fig. 2.24) și se obțin capacitățile echivalente:

$$C_{12} = C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_3} = 16,5 \mu\text{F}, C_{23} = C_2 + C_3 + \frac{C_2 C_3}{C_1} = 2,75 \mu\text{F},$$



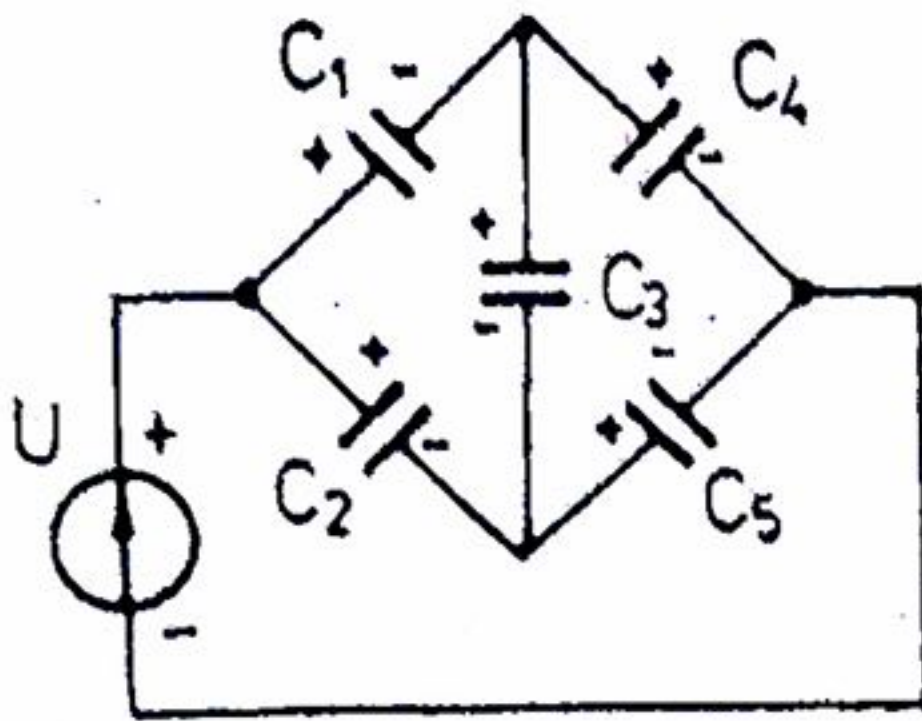


Fig.2.23

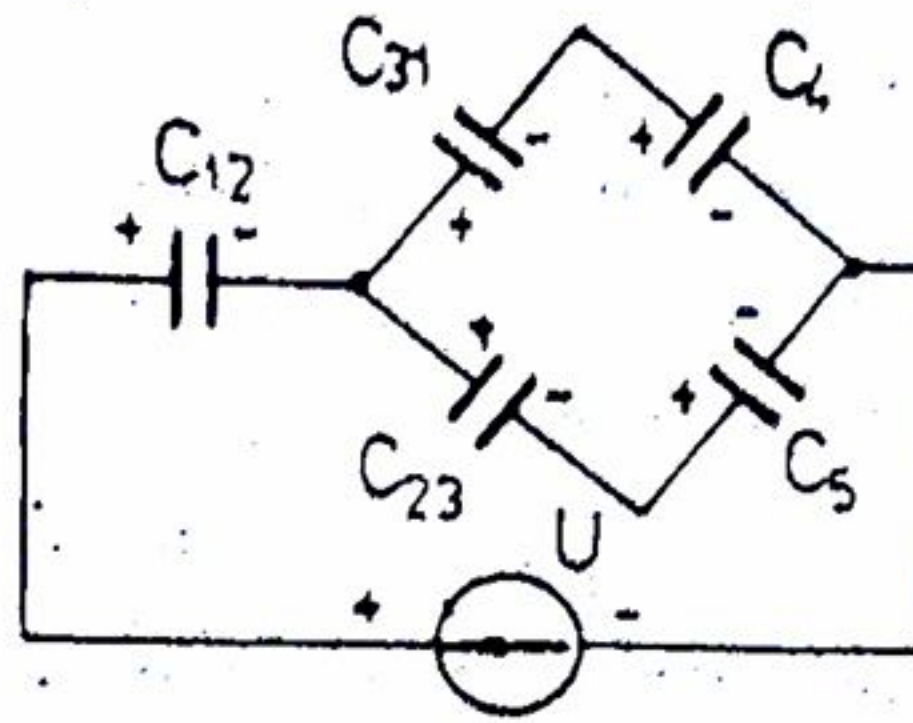


Fig.2.24

$C_{31} = C_3 + C_1 + \frac{C_3 C_1}{C_2} = 2,75 \mu F$ . Se formează sistemul de ecuații:

$$-q_{12} + q_{23} + q_{31} = 0, \quad \frac{q_{31}}{C_{31}} + \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_{23}}{C_{23}} = 0, \quad \frac{q_{12}}{C_{12}} + \frac{q_{23}}{C_{23}} + \frac{q_5}{C_5} = U,$$

în care  $q_{31} = q_4$ ,  $q_{23} = q_5$  și se obțin soluțiile:  $q_{12} = 180 \mu C$ ,  $q_5 = q_{23} = 100 \mu C$ ,  $q_4 = q_{31} = 80 \mu C$ .

Se revine la circuitul inițial și se formează sistemul de ecuații:

$$q_1 + q_2 = q_{12}, \quad q_2 + q_3 = q_{23}, \quad \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = 0,$$

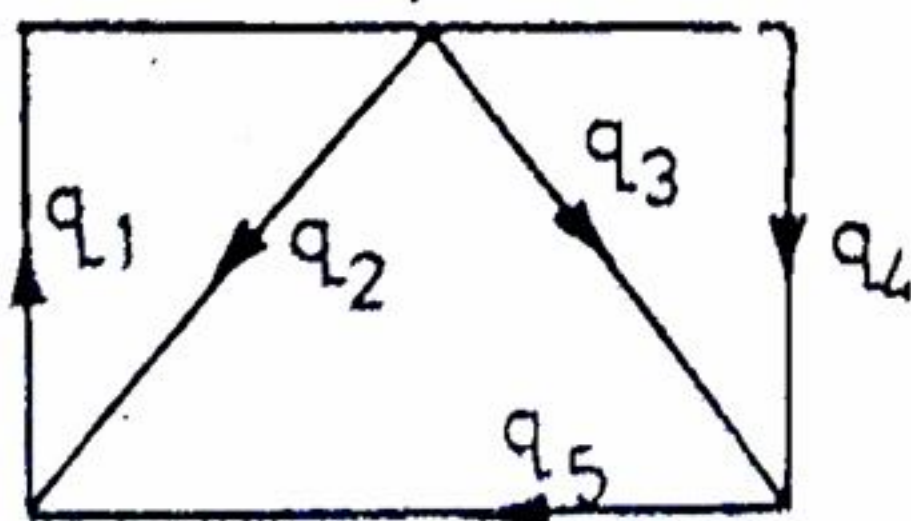
care are soluțiile:  $q_1 = 60 \mu C$ ,  $q_2 = 120 \mu C$ ,  $q_3 = -20 \mu C$ .

Cu relația  $U_i = \frac{q_i}{C_i}$  se obține:  $U_1 = 40V$ ,  $U_2 = U_3 = U_4 = 20V$ ,  $U_5 = 40V$ .

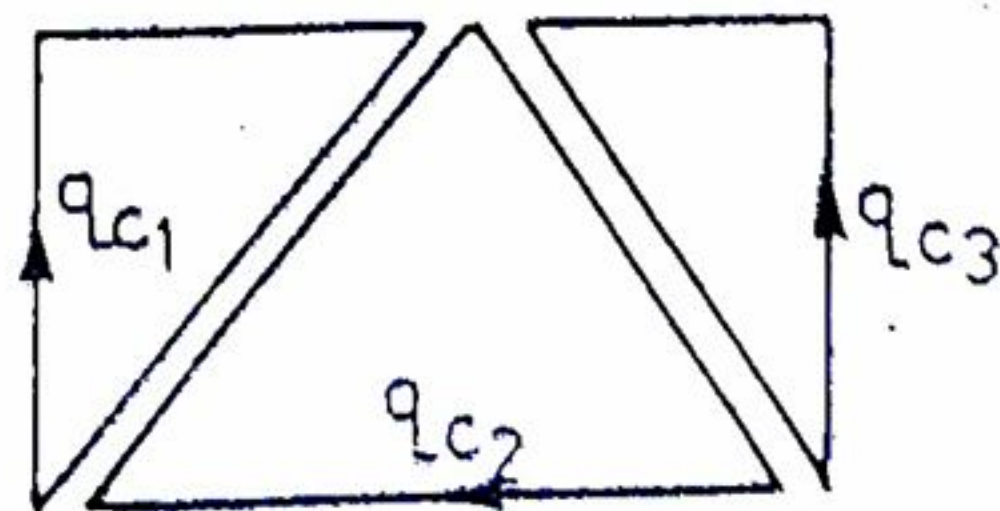
iar cu relația  $W_i = \frac{1}{2} q_i U_i$  se obține  $W_1 = 1,2 \text{ mJ}$ ,  $W_2 = 1,2 \text{ mJ}$ ,  $W_3 = 0,2 \text{ mJ}$ ,  $W_4 = 0,8 \text{ mJ}$ ,  $W_5 = 2 \text{ mJ}$ .

Energia totală este:  $W_e = \sum W_i = 5,4 \text{ mJ}$ .

3) Metoda sarcinilor de contur. Se folosesc sarcini electrice fictive,  $q_c$  - numite "sarcini de contur" (fig.2.25.b), care se "scurg" în circuitele (buclele) independente, identice ca număr (B) cu buclele fundamentale ale circuitului. La circuitul reprezentat



a.



b.

Fig.2.25



simplificat în fig.2.25.a ( $B=3, N=3, L=5$ ) se pot ataşa relaţiile de echivalenţă :  $q_1 = q_{c1}$  ;  $q_2 = q_{c1} - q_{c2}$  ;  $q_3 = q_{c2} + q_{c3}$  ;  $q_4 = -q_{c3}$  ;  $q_5 = q_{c2}$ , care reprezintă substituţii în ecuaţiile date de teorema I a lui Kirchhoff (pentru circuitul din fig.2.25.a), ecuaţii care devin banale. Aceleaşi substituţii introduse în ecuaţiile date de teorema a doua a lui Kirchhoff, conduc la un sistem cu  $B$  ecuaţii, având ca necunoscute sarcinile de contur  $q_c$  :

$$\begin{cases} S_{11}q_{c1} + S_{12}q_{c2} + \dots + S_{1B}q_{cB} = U_1 \\ S_{21}q_{c1} + S_{22}q_{c2} + \dots + S_{2B}q_{cB} = U_2 \\ \vdots \\ S_{B1}q_{c1} + S_{B2}q_{c2} + \dots + S_{BB}q_{cB} = U_B \end{cases} \quad (2.49)$$

în care  $S$  reprezintă elastanţa,  $S = \frac{1}{C} [F^{-1}]$ , adică inversul capacităţii laturii respective.

Toţi termenii din (2.49) reprezintă sume. De exemplu, termenul  $(S_{ij}q_{cj})$  se citeşte: "suma elastanţelor din bucla  $i$  afectate de sarcina  $q_{cj}$  înmulţită cu această sarcină". sau termenul  $U_k$  se citeşte "suma algebrică a t.e.m. din bucla de ordin " $k$ ". Se constată că  $S_{ij} \equiv S_{ji}$ .

Metoda sarcinilor de contur constă în: alegerea arbitrară a polarităţilor sarcinilor  $q$  şi  $q_c$ ; formarea sistemului (2.49) şi rezolvarea lui, având ca necunoscute  $q_c$ ; determinarea sarcinilor  $q$  din laturi, ca sume algebrice ale sarcinilor de contur; schimbarea polarităţii sarcinilor  $q$  negative; determinarea tensiunilor şi energiilor fiecărui condensator.

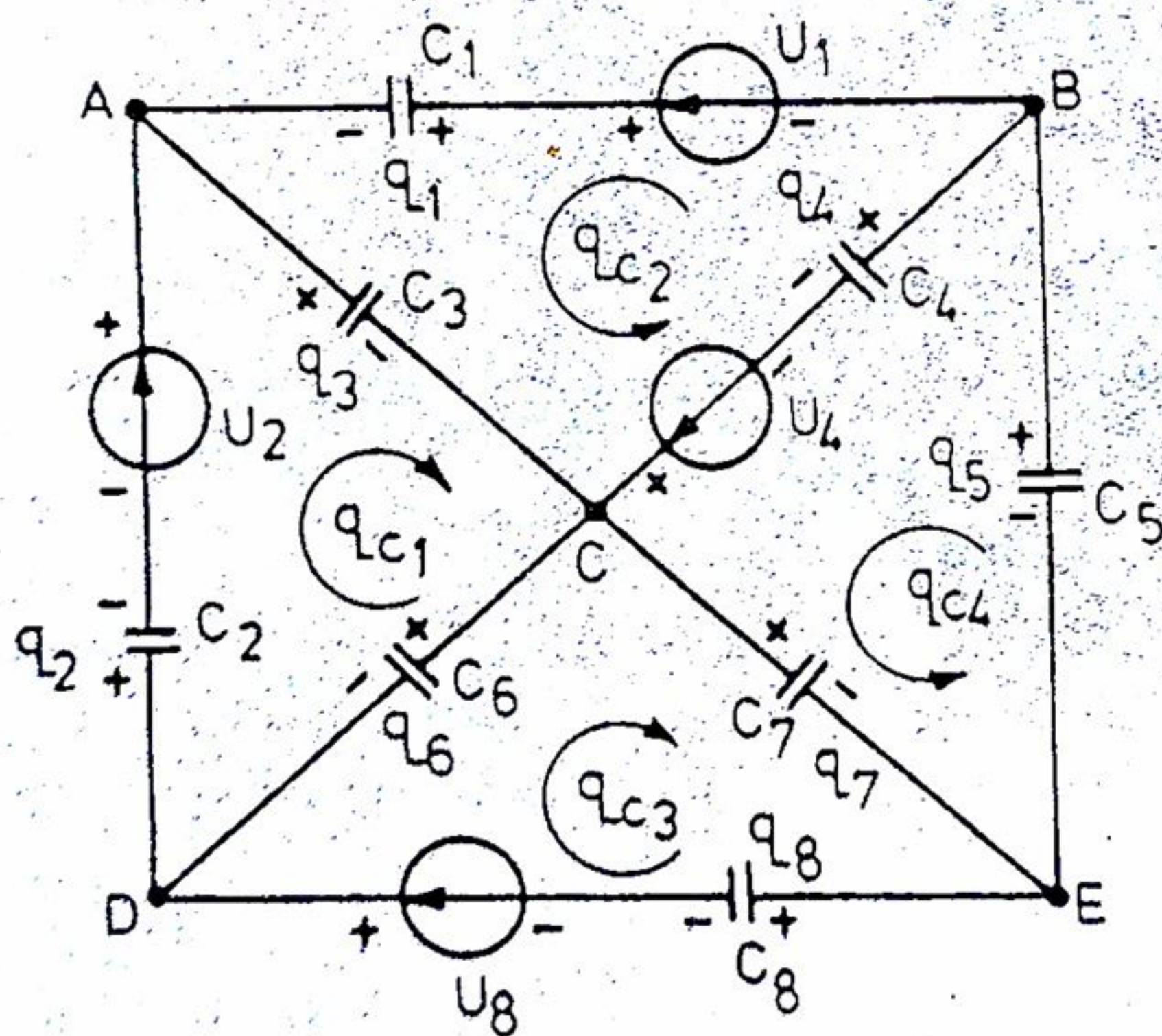


Fig.2.26

Aplicaţia 3. Să se rezolve circuitul electrostatic din fig.2.26, folosind metoda sarcinilor de contur. Se cunosc :  $U_1=150V$ ,  $U_2=50V$ ,  $U_4=160V$ ,  $U_8=200V$ ,  $C_1=400\mu F$ ,  $C_2=300\mu F$ ,  $C_3=200\mu F$ ,  $C_4=100\mu F$ ,  $C_5=60\mu F$ ,  $C_7=10\mu F$ ,  $C_8=250\mu F$ . Cu polarităţile alese arbitrar pentru sarcinile  $q$  şi  $q_c$ , se scrie sistemul (2.49):

$$\begin{cases} (S_2 + S_3 + S_6)q_{c1} + S_3q_{c2} + S_6(-q_{c3}) = U_2 \\ S_3q_{c1} + (S_1 + S_3 + S_4)q_{c2} + S_4(-q_{c4}) = U_1 - U_4 \\ S_6(-q_{c1}) + (S_6 + S_7 + S_8)q_{c3} + S_7q_{c4} = U_8 \\ S_4(-q_{c2}) + (S_4 + S_5 + S_7)q_{c4} + S_7q_{c3} = U_4 \end{cases}$$



in care  $S_i = \frac{1}{C_i}$ ; ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ). Se obțin soluțiile sistemului:  $q_{c1} = 6\text{mC}$ ;  $q_{c2} = -4\text{mC}$ ;

$q_{c3} = 5\text{mC}$ ;  $q_{c4} = -3\text{mC}$ . Rezultă sarcinile condensatoarelor :

$$q_1 = q_{c1} = -4\text{mC}; \quad q_2 = q_{c1} = 6\text{mC};$$

$$q_3 = q_{c1} + q_{c2} = 2\text{mC}; \quad q_4 = -q_{c2} - q_{c4} = 1\text{mC};$$

$$q_5 = -q_{c4} = 3\text{mC}; \quad q_6 = q_{c1} - q_{c3} = 1\text{mC};$$

$$q_7 = q_{c3} + q_{c4} = 2\text{mC}; \quad q_8 = q_{c3} = 5\text{mC}.$$

Verificarea calculelor se face cu teorema I Kirchhoff, în nodurile circuitului :

$$A \rightarrow -q_1 - q_2 + q_3 = 4 - 6 + 2 = 0$$

$$B \rightarrow +q_1 + q_4 + q_5 = -4 + 1 + 3 = 0, \text{ etc.}$$

Tensiunile condensatoarelor sunt  $U_i = \frac{q_i}{C_i}$ ; ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ). Energiile condensatoare-

lor și energia totală au valorile:  $W_i = \frac{1}{2} q_i U_i$ ; ( $i = 1, 2, \dots, 8$ );  $W = \sum_{i=1}^8 W_i = 0.43 \text{ J}$ .

4) Metoda superpoziției. Teorema superpoziției (a suprapunerii efectelor) într-un circuit electrostatic se exprimă astfel: sarcina electrică dintr-o latură oarecare este egală cu suma algebrică a sarcinilor electrice injectate succesiv în această latură de către fiecare t.e.m. în parte. Teorema este o consecință a liniarității circuitelor, deci a liniarității ecuațiilor circuitelor cu condensatoare, ale căror capacități electrice rămân constante, independent de tensiunile și sarcinile din circuit.

Metoda superpoziției constă în determinarea succesivă a sarcinilor injectate în circuit sub acțiunea unei singure surse de t.e.m. (se consideră anulate efectele celorlalte surse de t.e.m.), apoi se însumează algebric (se suprapun) sarcinile, pentru a obține în fiecare latură, sarcina electrică rezutantă. Metoda se aplică numai în cazul când circuitul conține 2, maximum 3 surse de t.e.m.

Aplicația 4. Să se afle prin metoda superpoziției sarcinile electrice acumulate de condensatoarele circuitului electrostatic din fig.2.27.a, în care se cunosc:  $U_1 = 200\text{V}$ ,  $U_2 = 80\text{V}$ ,  $C_1 = 80\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 250\mu\text{F}$ ,  $C_3 = 200\mu\text{F}$ ,  $C_4 = 60\mu\text{F}$ ,  $C_5 = 100\mu\text{F}$ ,  $C_6 = 100\mu\text{F}$ .

- Se menține în circuit numai efectul sursei  $U_1$  (fig.2.27.b) și se determină sarcina  $q'_1$ :

$$q'_1 = U_1 \frac{C_1(C_4 + C')}{C_1 + C_4 + C'}, \text{ unde}$$

$$C' = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_2 + C_5}}$$

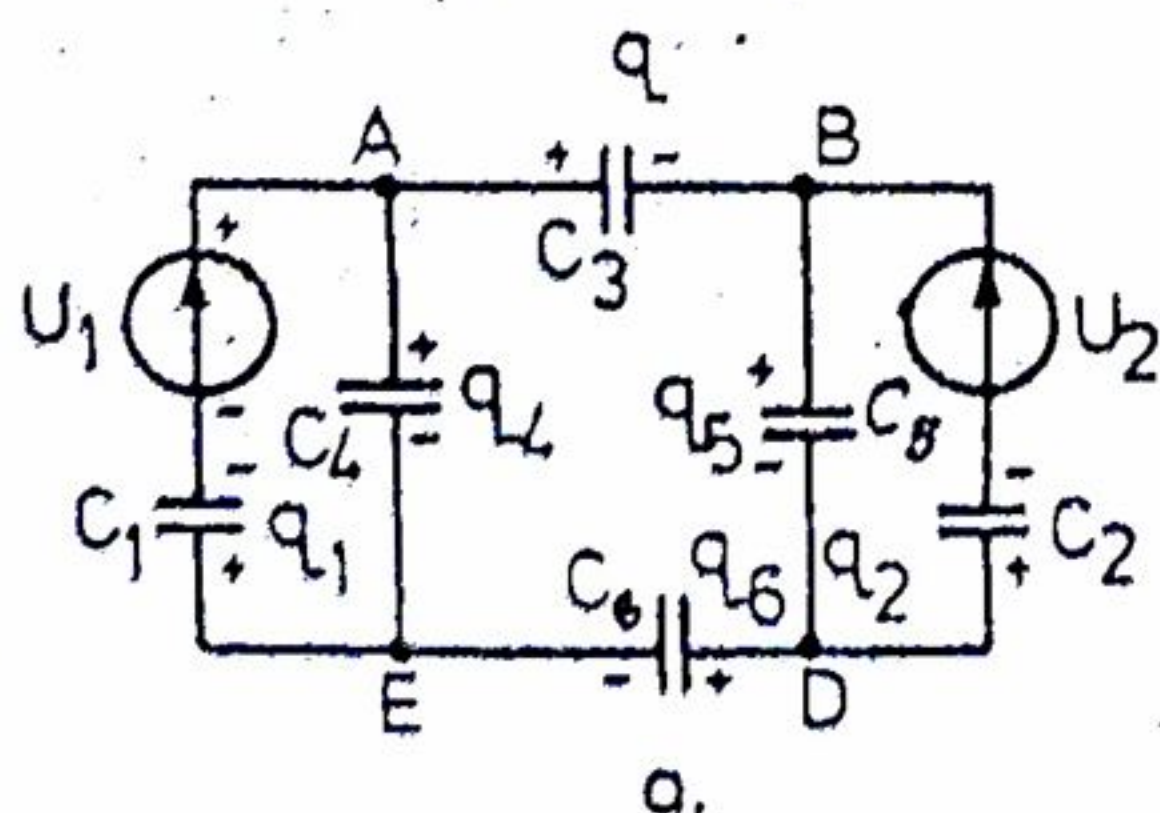


Fig.2.27.a



- Se calculează tensiunea între nodurile A - E (fig.2.27.b) precum și sarcinile  $q'_1$ .

$$q'_3 = q'_6: U'_{AE} = \frac{q'_1}{C_4 + C'}; q'_4 = C_4 U'_{AE}; q'_3 = q'_6 = C' U'_{AE}.$$

- Se află  $U'_{BD}$  și rezultă  $q'_2$  și  $q'_5$ ;  $U'_{BD} = \frac{q'_3}{C_2 + C_5}$ ;  $q'_2 = C_2 U'_{BD}$ ;  $q'_5 = C_5 U'_{BD}$ .

- Se menține în circuit numai efectul sursei  $U_2$  (fig.2.27.c) și în mod similar se determină sarcinile electrice  $q''$ .

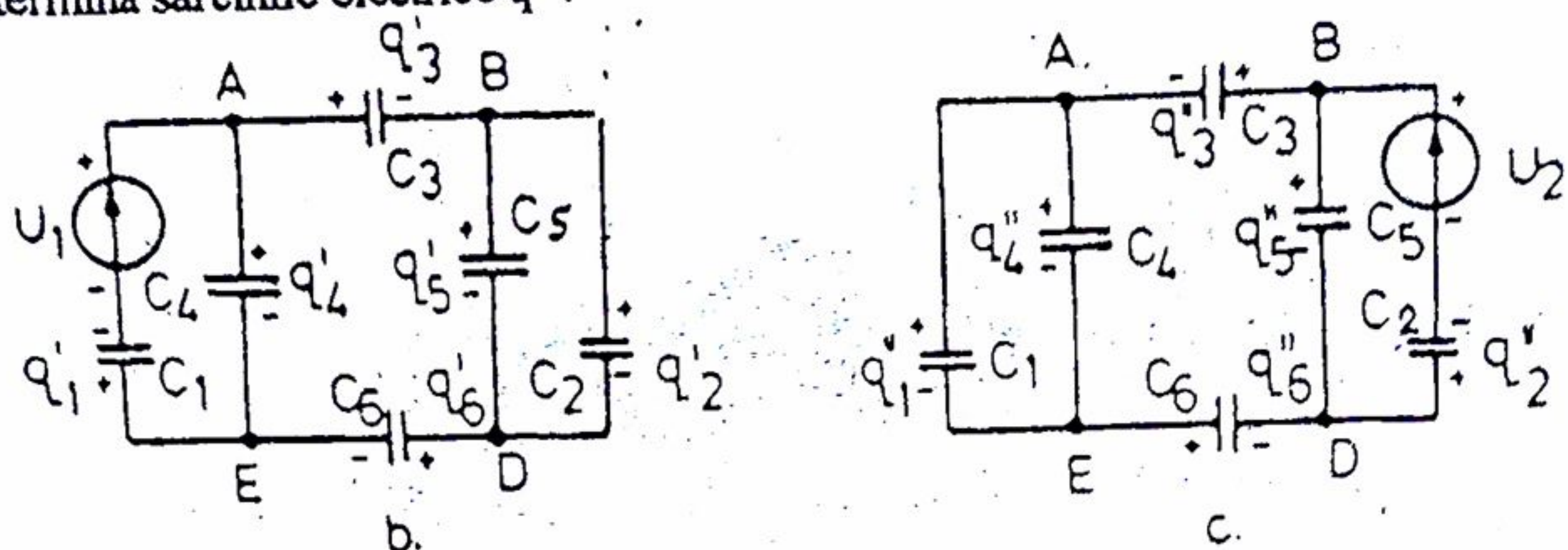


Fig.2.27. b,c

$$q''_2 = U_2 \frac{C_2(C_5 + C'')}{C_2 + C_5 + C''}, \quad \text{unde} \quad C'' = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_1 + C_4}}; \quad U''_{BD} = \frac{q''_2}{C_5 + C''};$$

$$q''_5 = C_5 U''_{BD}; q''_3 = q''_6 = C'' U''_{BD}; U''_{AE} = \frac{q''_3}{C_1 + C_4};$$

$$q''_1 = C_1 U''_{AE}; q''_4 = C_4 U''_{AE};$$

- Se calculează sarcinile din laturi, comparând polaritățile acestora în cele trei circuite (fig.2.27)

$$q_1 = q'_1 - q''_1 = 8 \text{ mC};$$

$$q_2 = -q'_2 + q''_2 = 5 \text{ mC};$$

$$q_3 = q_6 = q'_3 - q''_3 = 2 \text{ mC};$$

$$q_4 = q'_4 + q''_4 = 6 \text{ mC};$$

$$q_5 = q'_5 + q''_5 = 7 \text{ mC};$$

- Se verifică teorema I Kirchhoff în noduri ( $\sum q = 0$ ), precum și bilanțul energiilor:

$$\sum_{i=1}^2 q_i U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \frac{q_j^2}{C_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 C_j U_{ci}^2 = 1.025 \text{ J}; \text{ unde } U_{ci} = \frac{q_i}{C_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

5) Metoda tensiunii între noduri. Se recomandă în cazul circuitelor electrostatice cu două noduri, deși poate fi construită și o teorie a metodei, aplicabilă la circuite cu peste două noduri, dar volumul de lucru este relativ mare.

Fie un circuit electrostatic cu două noduri și  $n$  laturi (fig.2.28). la care tensiunea între noduri este  $U_0$ . Din teorema II a lui Kirchhoff:



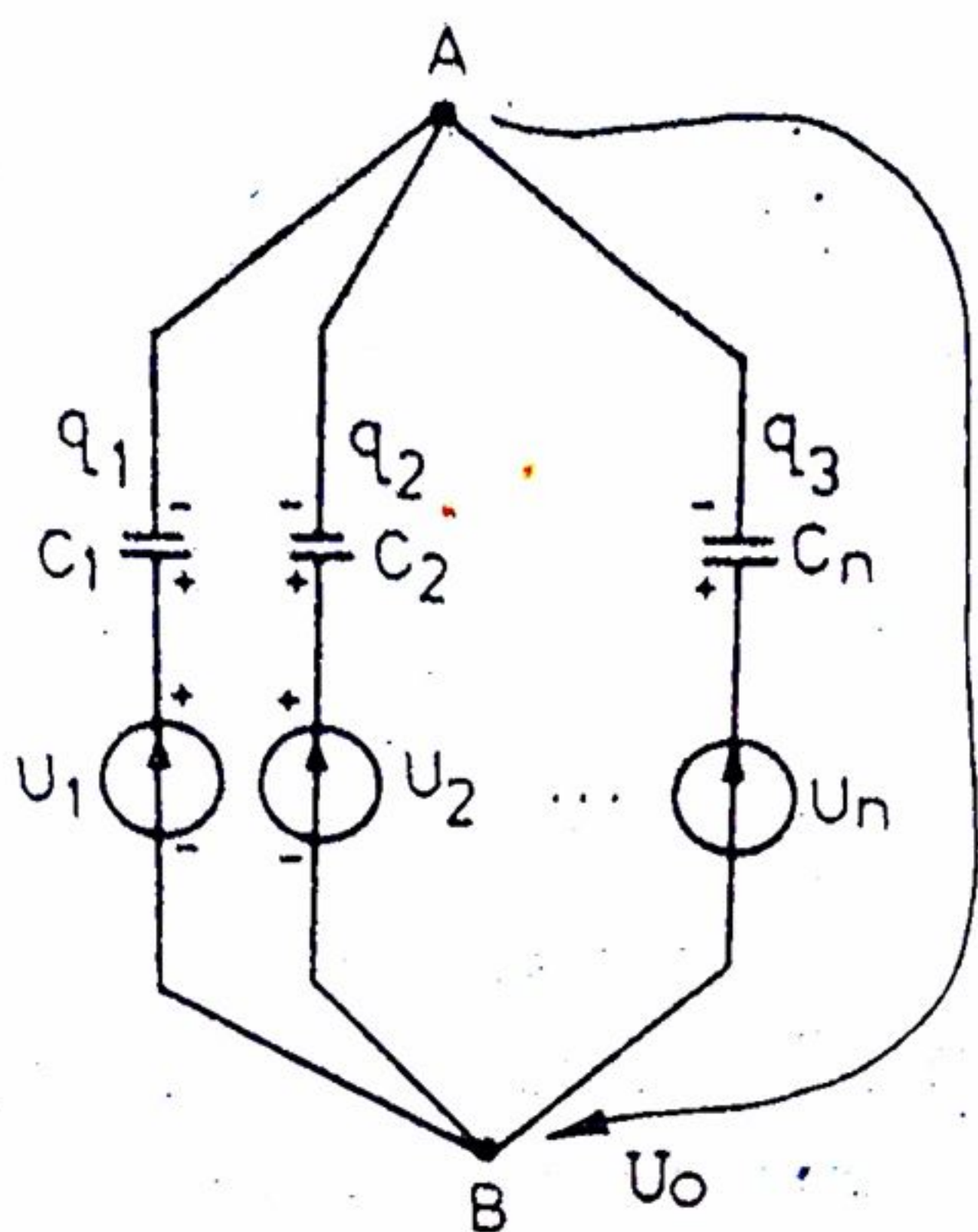


Fig.2.28

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C_1} + U_0 = U_1 \\ \frac{q_2}{C_2} + U_0 = U_2 \\ \vdots \\ \frac{q_n}{C_n} + U_0 = U_n \end{cases}$$

rezultă sarcinile condensatoarelor

$$\begin{cases} q_1 = C_1(U_1 - U_0) \\ q_2 = C_2(U_2 - U_0) \\ \vdots \\ q_n = C_n(U_n - U_0) \end{cases} \quad (2.50)$$

Din teorema I Kirchhoff aplicată nodului A :

$q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0$ , rezultă:

$$C_1(U_1 - U_0) + C_2(U_2 - U_0) + \dots + C_n(U_n - U_0) = 0$$

Se deduce tensiunea între noduri :

$$U_0 = \frac{U_1 C_1 + U_2 C_2 + \dots + U_n C_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n} = \frac{\sum UC}{\sum C} \quad (2.51)$$

Fiind cunoscută tensiunea între noduri, se calculează sarcinile  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) cu relațiile (2.50).

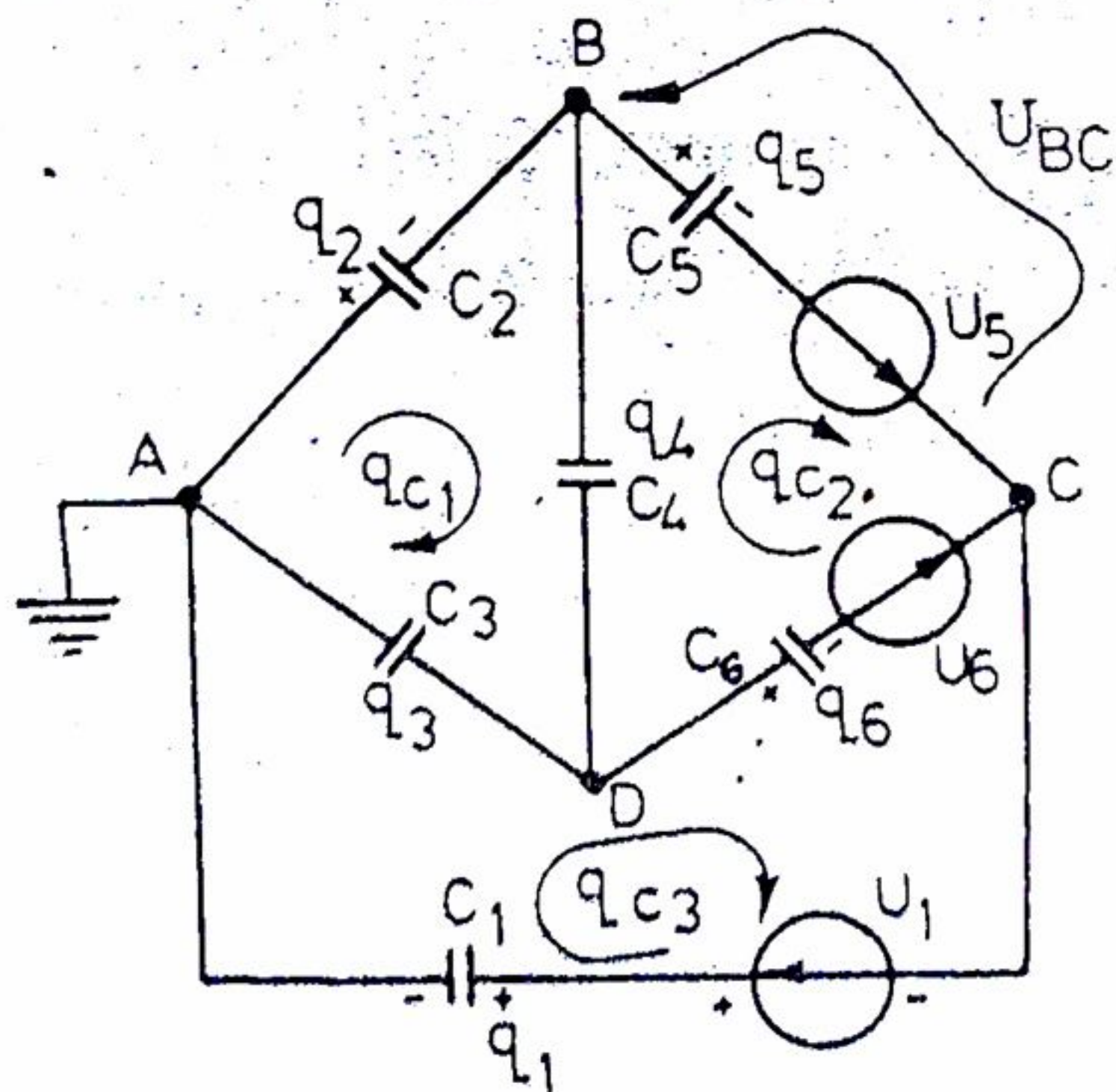


Fig.2.29

Aplicația 5. În circuitul

electrostatic din fig.2.29 se cunosc:

$U_1=200V$ ,  $U_3=150V$ ,  $U_6=120V$ ,  
 $C_1=100\mu F$ ,  $C_2=40\mu F$ ,  $C_3=30\mu F$ ,  
 $C_4=10\mu F$ ,  $C_5=20\mu F$ ,  $C_6=350\mu F$ ;

a) Să se rezolve circuitul prin metoda transfigurării, combinată cu metoda tensiunii între noduri; b) Să se afle valoarea tensiunii între nodurile B-C și valoarea sarcinii  $q_1$  în cazul scurtcircuitării și deschiderii nodurilor B-C; c) Ce valoare trebuie să aibă  $C_2$  pentru ca sarcina  $q_4$  să fie nulă?; d) Ce valoare și ce sens trebuie să aibă o sursă de t.e.m.,  $U_4$ , care, montată în serie cu  $C_4$ , impune  $U_{BD} = 0$ ?



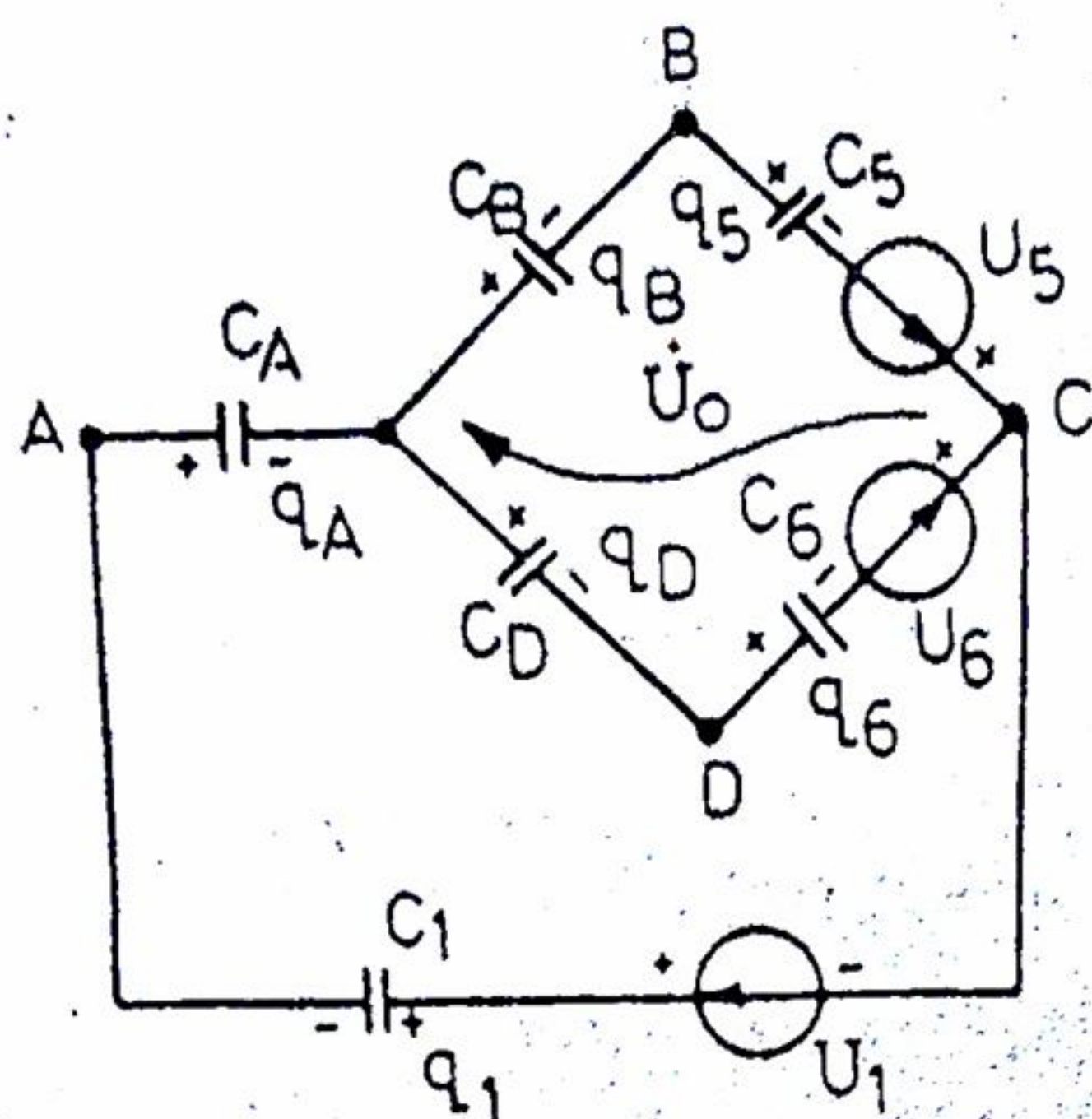


Fig. 2.30

noduri. Din (2.51) se obține:

$$U_0 = \frac{U_5 \frac{C_5 C_B}{C_5 + C_B} + U_6 \frac{C_6 C_D}{C_6 + C_D} - U_1 \frac{C_1 C_A}{C_1 + C_A}}{\frac{C_5 C_B}{C_5 + C_B} + \frac{C_6 C_D}{C_6 + C_D} + \frac{C_1 C_A}{C_1 + C_A}}$$

Rezultă:  $U_0 = -\frac{190}{19} \text{ V}$ . Cu (2.50) se obțin sarcinile:

$$q_5 = q_B = (U_5 - U_0) \frac{C_B C_5}{C_B + C_5} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_6 = q_D = (U_6 - U_0) \frac{C_D C_6}{C_D + C_6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$-q_1 = -q_A = (-U_1 - U_0) \frac{C_A C_1}{C_A + C_1} = -10 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

în care  $q_1$  și  $U_1$  sunt precedate de minus (-), deoarece au polarități inverse, comparativ cu cele din fig. 2.28.

Se revine la circuitul inițial din fig. 2.29 și se deduc celelalte sarcini electrice:

$$\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_5}{C_5} + \frac{q_1}{C_1} = U_5 + U_1 \Rightarrow q_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\frac{q_3}{C_3} + \frac{q_6}{C_6} + \frac{q_1}{C_1} = U_6 + U_1 \Rightarrow q_3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_3}{C_3} = 0; \Rightarrow q_4 = -10^{-3} \text{ C}$$

Rezultatele sunt verificate cu teorema I Kirchhoff în nodurile A, B, C.

### Rezolvare

a) Se transfigurează bucla ABD în stea (fig. 2.30) în care :

$$\begin{cases} C_A = C_2 + C_3 + \frac{C_2 C_3}{C_4} = 190 \mu\text{F} \\ C_B = C_2 + C_4 + \frac{C_2 C_4}{C_3} = \frac{190}{3} \mu\text{F} \\ C_D = C_3 + C_4 + \frac{C_3 C_4}{C_2} = \frac{190}{4} \mu\text{F} \end{cases}$$

Circuitul astfel transfigurat are două noduri, deci poate fi rezolvat, în continuare, prin metoda tensiunii între



Se calculează tensiunile pe condensatoare:  $U_{C_i} = \frac{q_i}{C_i}$ , precum și energiile:

$$W = \frac{1}{2} \sum_1^2 q_j U_j = \frac{1}{2} \sum_1^6 C_i U_{C_i}^2.$$

Metoda prezentată are avantajul că nu necesită rezolvări de sisteme de ecuații, necunoscutele obținându-se succesiv.

b) Cu teorema II Kirchhoff rezultă:  $U_{BC} + \frac{q_5}{C_5} = U_5 \Rightarrow U_{BC} = 0$ , adică nodurile

B și C au aceleași potențiale  $V_B = V_C = -100V$  (dacă nodul A se consideră pus la pământ, când  $V_A = 0$ ). Dacă B și C se scurtcircuitează,  $q_{1sc} = q_1$  și nici celelalte sarcini nu se modifică. Dacă, însă B și C se deschid, atunci:

$$q_{10} = q_{60} = (U_1 + U_6) \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_{ABD}}} = 8.2 \text{ mC}, \text{ în care } C_{ABD} = C_3 + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = 38 \mu F.$$

c) Pentru ca  $q_4 = 0$ , este necesar ca:  $V_B = V_D$ , adică:  $U_{AB} = U_{AD}$  și  $U_{BC} = U_{DC}$ , sau:  $q_B = q_2 = q_5$  și  $q_3 = q_6 = q_D$ .

Cu aceste condiții se scrie sistemul (folosind elastanțele,  $S_i = \frac{1}{C_i}$ ;  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ):

$$\begin{cases} S_2 q_B = S_3 q_D \\ U_5 - q_B S_5 = U_6 - q_D S_6 \\ (q_B + q_D) S_1 + q_D (S_3 + S_6) = U_1 + U_6 \end{cases}$$

$$\text{și rezultă elastanța } S_2 = \frac{S_1 S_3 (U_6 - U_5) + S_3 S_5 (U_1 + U_6)}{S_6 (U_1 + U_5) + (S_1 + S_3) (U_5 - U_6)}.$$

Introducând valorile numerice se obține  $S_2 = 15 \cdot 10^6 F^{-1}$ , sau,  $C_2 = 67 \cdot 10^{-3} F$ .

Se constată că, dacă  $U_5 = U_6$ , atunci  $S_2 = \frac{S_3 S_5}{S_6}$  adică se regăsește condiția

cunoscută de echilibru a punții simple.

d) Pentru a afla valoarea și sensul de debitare a unei surse  $U_4$  care să anuleze  $U_{BD}$  ( $q_4 = 0$ ), este suficient să se pună condiția de egalitate a sarcinilor de contur  $q_{C1} = q_{C2}$  (fig. 2.29), obținându-se sistemul sarcinilor de contur: patru ecuații cu patru necunoscute ( $q_{C1,2,3}$  și  $U_4$ ):

$$\begin{cases} q_{C1} = q_{C2} \\ q_{C1} (S_2 + S_3 + S_4) + S_4 (-q_{C2}) + S_3 (-q_{C3}) = -U_4 \\ -q_{C1} S_4 + q_{C2} (S_4 + S_5 + S_6) + S_6 (-q_{C3}) = U_4 + U_5 - U_6 \\ -q_{C1} S_3 + S_6 (-q_{C2}) + q_{C3} (S_1 + S_3 + S_6) = U_1 + U_6 \end{cases}$$



în care,  $U_4$  s-a admis că debitează în latura  $C_4(q_4)$  de la D spre B. Se elimină  $q_4$  și rezultă

$$\text{tensiunea } U_4 = (U_6 - U_5) + (U_1 + U_6) \frac{S_3 S_5 - S_2 S_6}{S_1(S_2 + S_3) + S_2(S_3 + S_6)}$$

Introducând valorile numerice se obține :  $U_4 = 307 \text{ V}$ .

$$\text{Se constată că dacă } U_5 = U_6, \text{ atunci } U_4 = (U_1 + U_6) \frac{S_3 S_5 - S_2 S_6}{S_1(S_2 + S_3) + S_2(S_3 + S_6)}$$

adică, depinde valoric de dezechilibrul punții  $\Delta S = S_3 S_5 - S_2 S_6$ , dar și de valorile și polaritățile relative ale surselor  $U_1$  și  $U_6$ . În sfârșit, dacă  $U_5 = U_6 = 0$ , atunci  $U_4$  depinde de valorile  $\Delta S$  și  $U_1$ , precum și de semnele (polaritățile) acestora.

6) Metoda generatorului de tensiune echivalent. Un circuit ramificat cu condensatoare și surse de t.e.m. este echivalent cu un generator de t.e.m., care injectează sarcină electrică în una din ramurile circuitului cu capacitatea  $C$  (elastanța  $S = 1/C$ ) considerată receptor unic (fig.2.31). Circuitul ramificat se înlocuiește cu generatorul de tensiune echivalent, din care se extrage latura care conține capacitatea  $C$  cu sarcina  $q$  (fig.2.31.b). În circuitul echivalent,  $U_{ABO}$  este t.e.m. a generatorului echivalent, egală cu tensiunea la bornele A-B când acesta funcționează în gol ( $U_{ABO} = V_A - V_B$ ); iar  $C_{ABO}$  este capacitatea interioară a sursei de tensiune echivalentă, calculată în aceeași condiție: ramura A -  $C_{ABO}$  - B deschisă. Rezultă (teorema Thévenin),

$$q = \frac{U_{ABO}}{S + S_{ABO}} \quad (2.52)$$

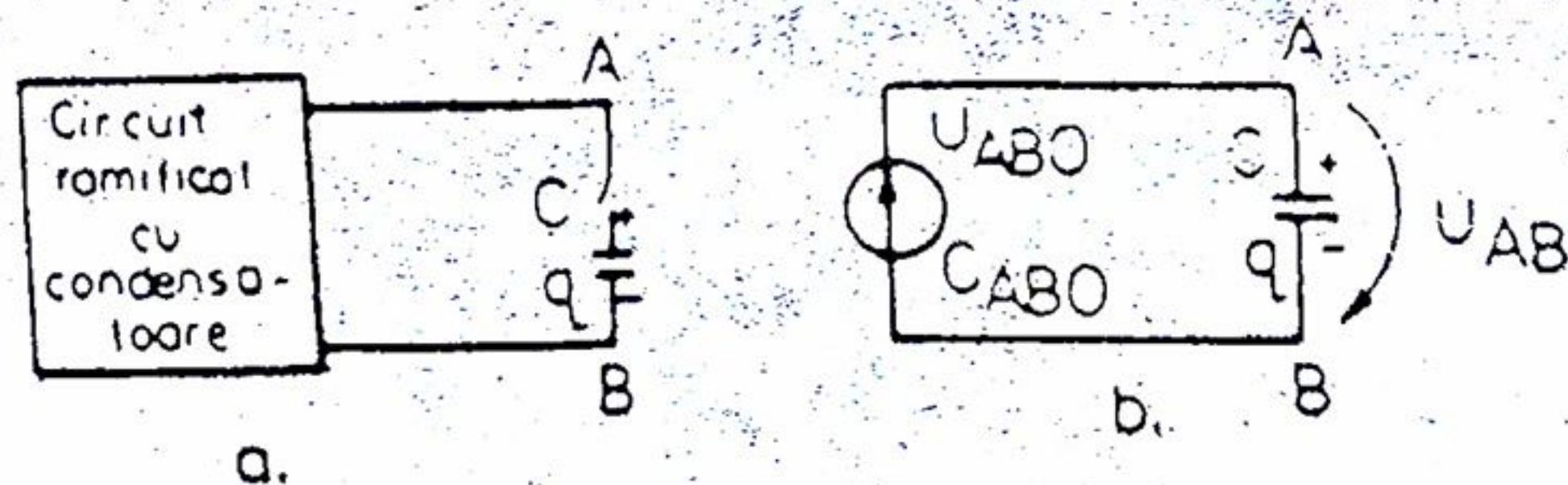


Fig.2.31

Metoda generatorului de tensiune echivalent se utilizează în cazul când se cere să se calculeze sarcina electrică dintr-o singură latură a unui circuit cu condensatoare.

Aplicația 6. În circuitul electrostatic din fig.2.32 se cunosc:  $U = 105 \text{ V}$ ,  $U_1 = 100 \text{ V}$ ,  $U_2 = 200 \text{ V}$ ,  $U_3 = 70 \text{ V}$ ,  $U_4 = 120 \text{ V}$ ,  $U_6 = 25 \text{ V}$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = C_4 = 200 \mu\text{F}$ ,  $C_5 = C_6 = 400 \mu\text{F}$ ,  $C = 250 \mu\text{F}$ ; a) Să se afle sarcina  $q$  din condensatorul cu capacitatea  $C$  prin metoda prezentată. b) Ce valori vor avea sarcinile  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  și  $q_5$  dacă se scurtcircuitează (se străpung) condensatoarele  $C_1$ ,  $C_3$  și  $C_6$ ?

Răspuns

a) Se deschide latura A-B (fig.2.33), obținându-se trei circuite independente, cu sarcinile:



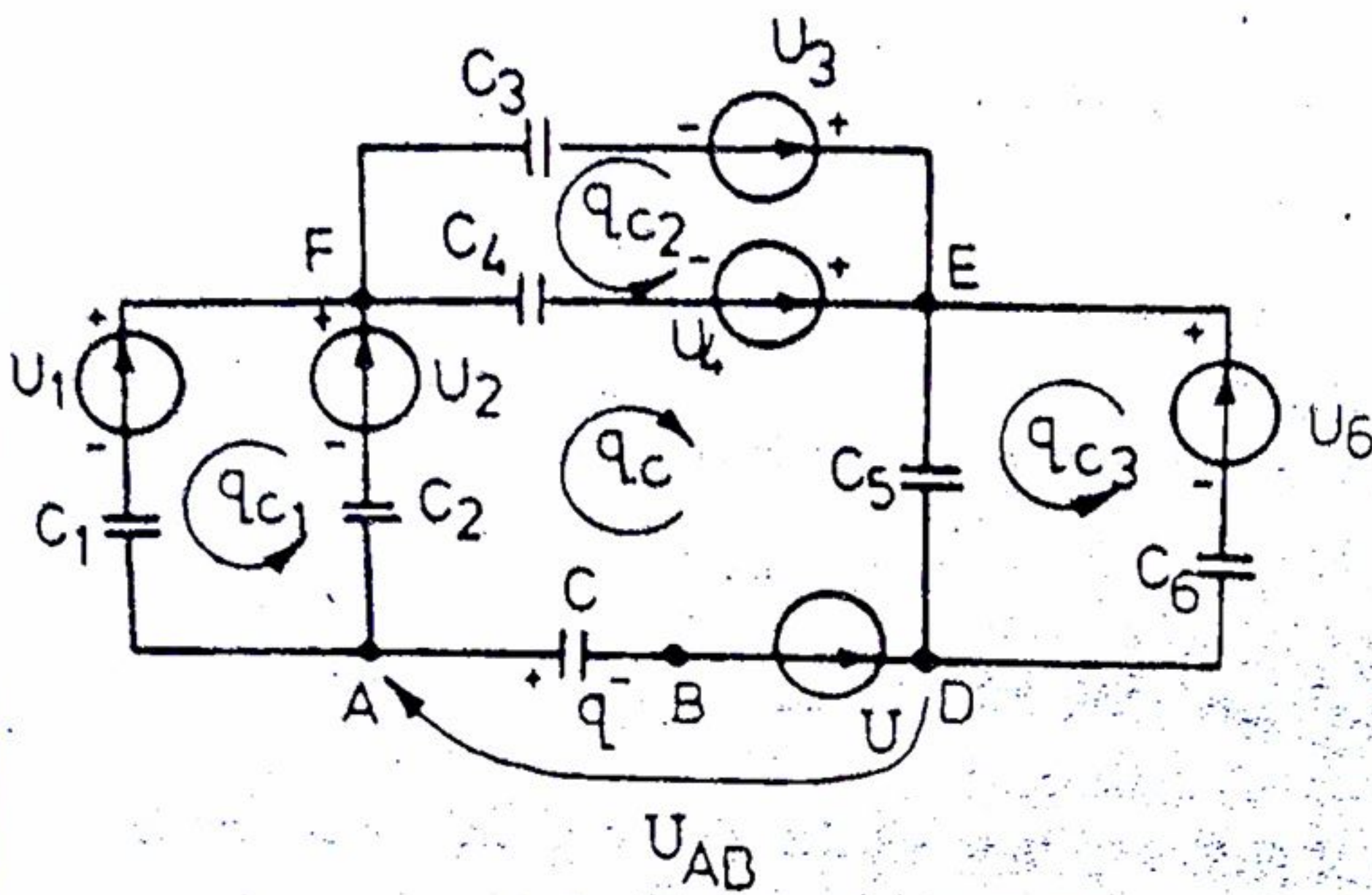


Fig. 2.32

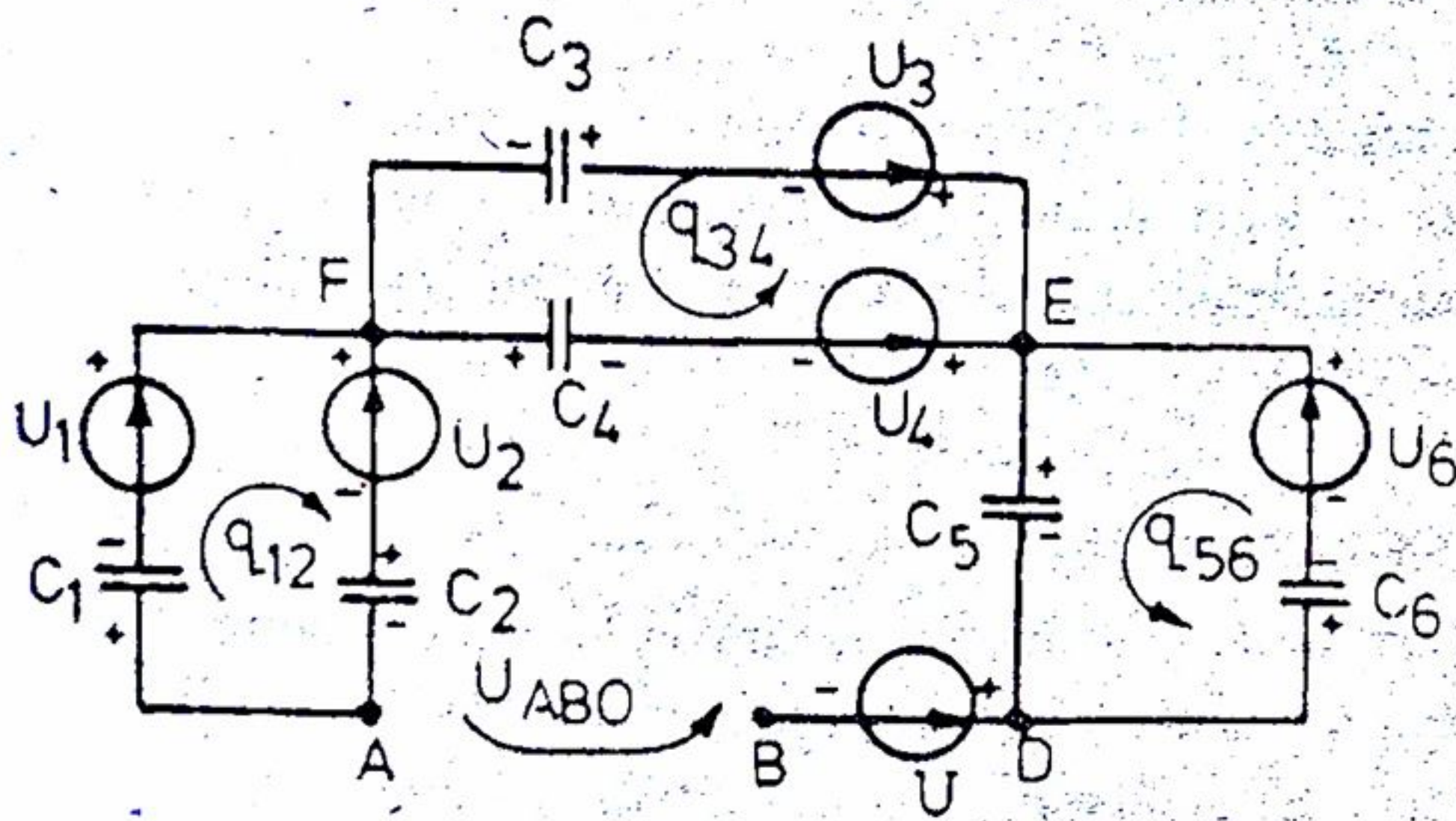


Fig. 2.33

$$q_{12} = \frac{U_1 - U_2}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_{34} = \frac{U_4 - U_3}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$q_{56} = \frac{U_6}{\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

Se aplică teorema II Kirchhoff în bucla centrală:

$$U_{ABO} - \frac{q_{56}}{C_5} - \frac{q_{34}}{C_4} - \frac{q_{12}}{C_2} = U - U_4 - U_2$$

din care rezultă:

$U_{ABO} = -127,5 \text{ V}$ . Se pasivizează circuitul din fig. 2.33 și se calculează capacitatea echivalentă:

$$C_{ABO} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

Rezultă (2.52)

$$q = \frac{U_{ABO}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_{ABO}}} = -10 \cdot 10^{-3} = -10 \text{ mC}$$

deci polaritatea sarcinii  $q$  (în fig. 2.32) este inversă

b) Prin scurtcircuitarea condensatoarelor  $C_1$ ,  $C_3$ , și  $C_6$ , celelalte devin toate inserate, având aceeași sarcină electrică nemodificată:  $q = (U_1 + U_3 - U_6 - U)C = 10 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 10 \text{ mC}$

$$q_2 = \frac{U_2 - U_1}{S_2} = q_4 = \frac{U_4 - U_3}{S_4} = q_5 = \frac{U_6}{S_5} = 10 \text{ mC}$$

Se deduce că și inițial, înainte de scurtcircuitare,  $q_1 = q_3 = q_6 = 0$ . Sursele de t.e.m.  $U_1$ ,  $U_3$ ,  $U_6$  sunt în "opозиție" și "compensează" tensiunile între nodurile A-F, F-E, E-D



## Capitolul III

# ELECTROKINETICA

Electrokinetica studiază stările electrice ale conductoarelor parcurse de curent electric de conducție, stări puse în evidență experimental (și) prin dezvoltarea de căldură (ce se produce în aceste conductoare).

### 3.1 REGIMUL ELECTROKINETIC STATIONAR

Regimul electrokinetic staționar este regimul stărilor electrokinetice caracterizate prin mărimi de stare invariabile în timp, fiind însoțit de efecte electrokinetice constante.

#### 3.1.1 Câmpuri electrice imprimare

Dacă forțele de natură neelectrică  $F$ , care acționează asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice  $q$  au valoarea dată de legea acțiunii ponderomotoare, atunci se poate considera că aceste forțe sunt determinate de un câmp electric, denumit câmp electric imprimat:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{q} \quad (3.1)$$

Câmpurile imprimare pot fi localizate într-un domeniu spațial (câmpuri imprimare de volum) sau pe anumite suprafețe de discontinuitate (câmpuri imprimare de contact). Câmpurile imprimare de volum pot fi: de accelerație, de concentrație și termoelectrice. Câmpurile imprimare de contact pot fi: termoelectrice, galvanice și fotovoltalice. Câmpul electric imprimat este caracterizat de integrala:

$$u_{12} = \int_2^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 Surse de tensiuni electromotoare de c.c.

Sursele chimice de t.e.m. se clasifică în : surse primare sau pile electrice și surse secundare sau acumulatori. Aceste surse sunt construite, în principal, din doi electrozi situați într-un electrolit, la a căror suprafață ia naștere un câmp electric imprimat de contact.



Pilele electrice sunt surse primare de t.e.m. ireversibile, a căror utilizare este limitată. Ele posedă, de regulă, un electrod negativ din zinc și un electrod pozitiv din cupru sau de cărbune. Pentru a evita fenomenul de polarizare se introduce în electrolit, în jurul electrodului pozitiv, un depolarizant ( $MnO_2$ ). Un exemplu de pilă electrică se prezintă în fig.3.1 (pila Leclanché).

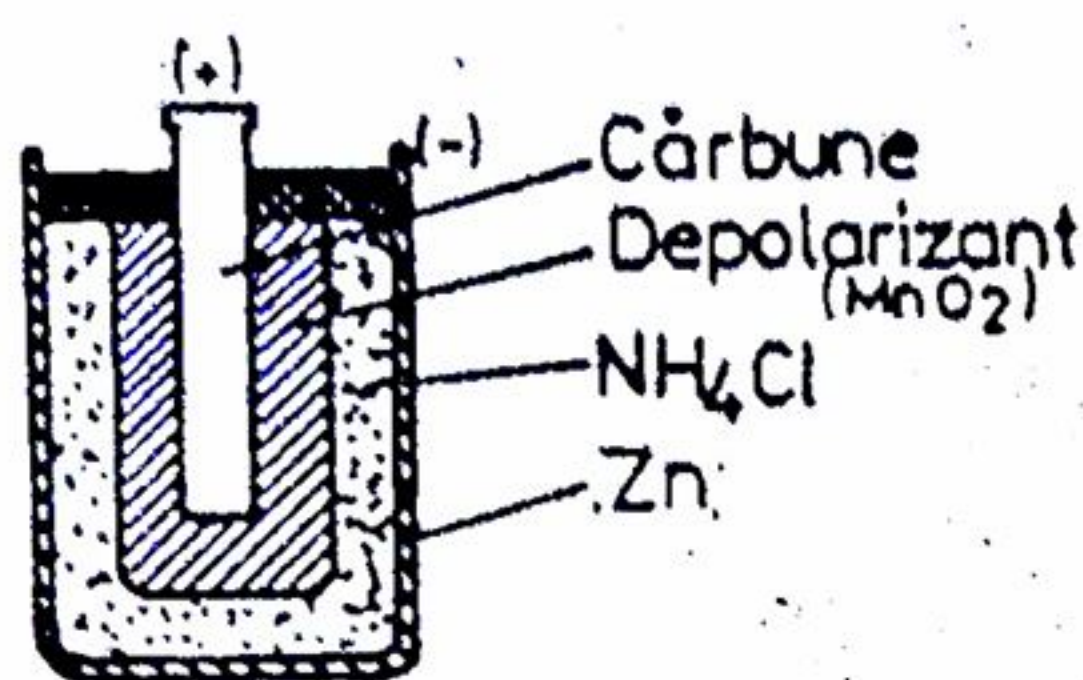


Fig.3.1

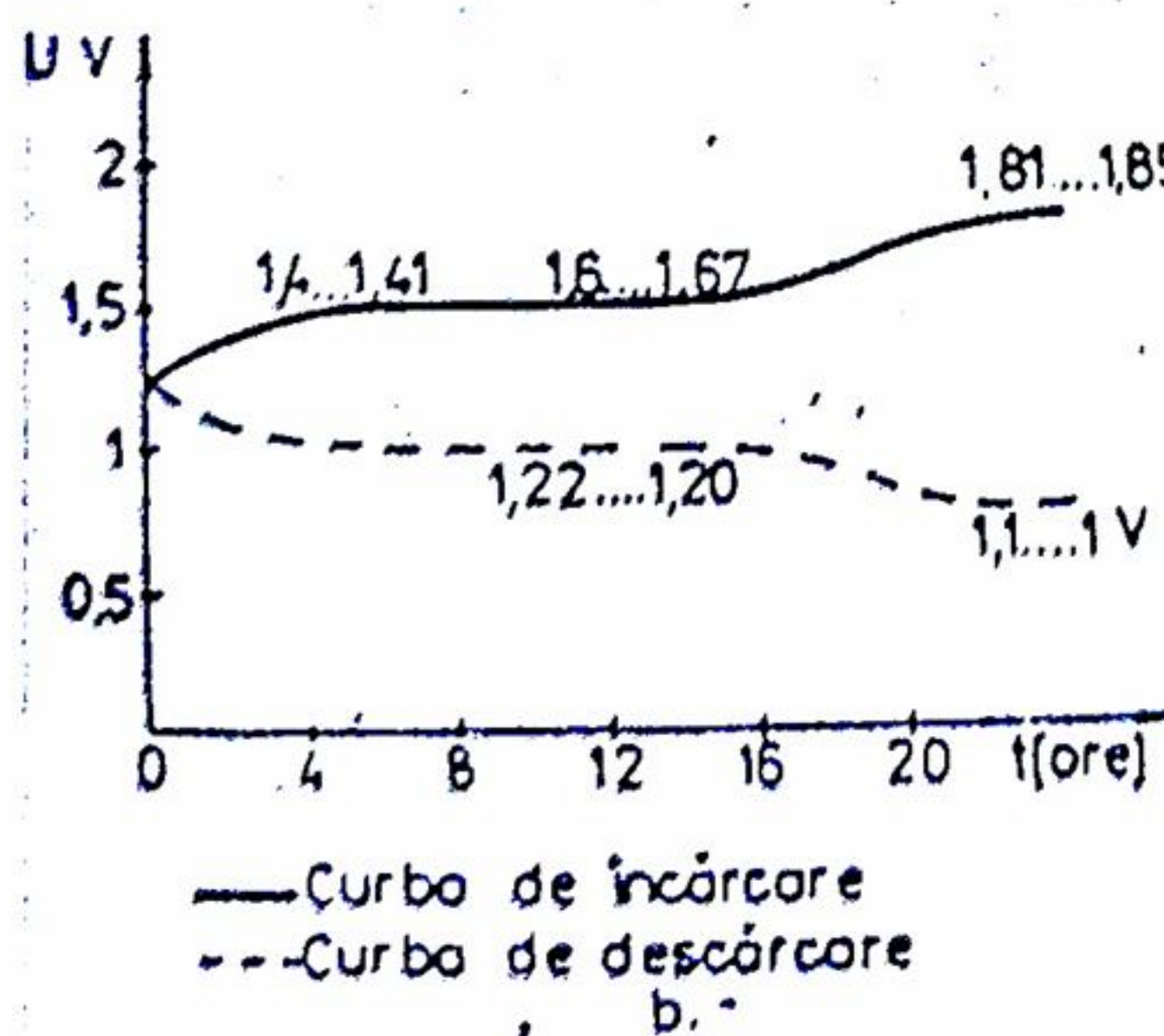
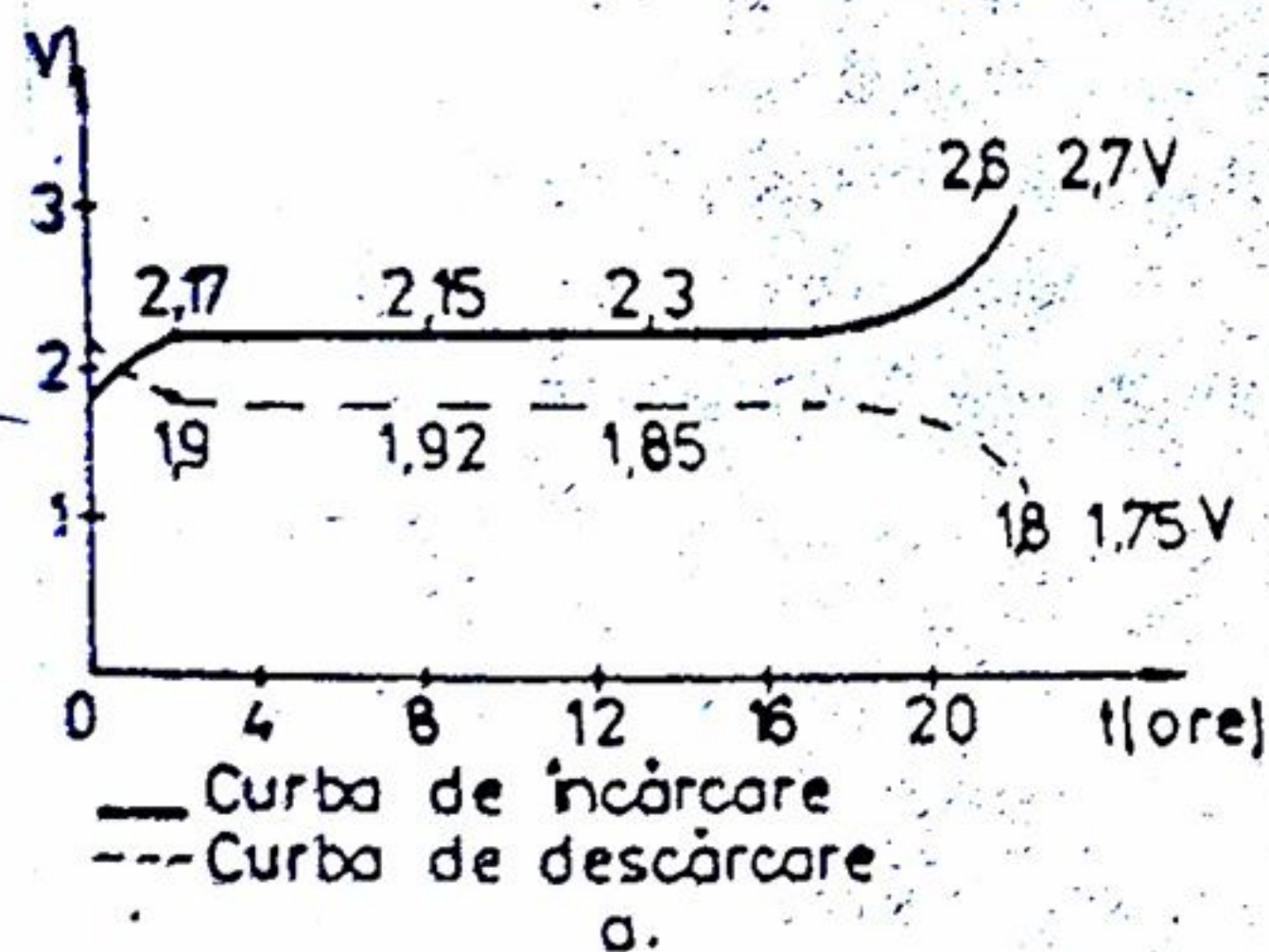


Fig.3.2

Acumulatorile sunt surse secundare de t.e.m. caracterizate prin reacții chimice reversibile, prin schimbarea sensului curentului electric care trece prin electrolit. Ele permit ca orice sursă chimică de t.e.m. să transforme energia chimică în energie electrică precum și transformarea inversă în scopul acumulării temporare de energie. După natura electrolitului, acumulatorile pot fi acide și alcaline.

Acumulatorile acide (cu plumb) au electrozii formați din plăci de plumb, acoperite cu bioxid de plumb la electrodul pozitiv, respectiv cu plumb pur (Pb), la electrodul negativ. Electrolitul este o soluție apoasă de acid sulfuric ( $H_2SO_4$ ). În timpul descărcării, se consumă acid sulfuric și se produce apă, deci concentrația electrolitului scade. La încărcare au loc reacții chimice inverse. În fig.3.2 este reprezentată variația în timp a tensiunii unui element la încărcare, respectiv la descărcare cu curent constant. Fiecare element al acumulatorului cu plumb dă o tensiune de cca. 2V și este caracterizat prin capacitatea sa, egală cu sarcina electrică, pe care o poate livra într-o anumită perioadă de timp prestabilită, de regulă 10 ore.

Acumulatorile alcaline au electrolitul bazic constituit din soluție de hidratat de potasiu (KOH). Ele se realizează în două variante: fier-nichel sau cadmiu-nichel, care au o capacitate mai mică și o rezistență internă mai mare în raport cu cele acide. În procesul de descărcare tensiunea este în jurul a 1,2 V/element.

În afară de sursele chimice de tensiune electromotoare (surse primare și surse secundare), descrise, pilele de combustie și termoelectrice se



bazează pe conversia directă a energiei chimice în energie electrică, la temperatura mediului ambiant.

Academicianul Vasilescu-Karpen a realizat o pilă de combustie de 1,8V, cu electrozi din platină spongioasă, din care unul este în contact cu acidul azotic, iar celălalt cu hidroxidul de potasiu, cei doi electrozi fiind separați printr-un perete izolant poros.

Deși fenomenul care stă la baza acestor pile este cunoscut încă din anul 1921 sub denumirea de efectul Seebeck, el nu a fost aplicat în scopuri energetice decât relativ recent, odată cu descoperirea semiconductoarelor și a proprietăților acestora. Astfel, s-au construit generatoare având puteri cuprinse între 20W și 200W, pentru alimentarea posturilor de radiorelee și radiorecepție. Fiabilitatea unor asemenea generatoare este mare, neavând părți mobile.

### 3.1.3 Starea electrocinetică. Curentul electric

Starea electrocinetică a circuitului este pusă în evidență prin efectele sale și anume: efecte mecanice (exercitare de forțe și momente asupra conductoarelor), efecte chimice (electrolize), efecte calorice, efecte luminoase (descărcări în gaze) etc. Caracterizarea stării electrocinetice se face cu ajutorul curentului electric de conducție, care microscopic se definește drept viteza de transmisie a sarcinii electrice prin secțiunea conductorului de către particulele libere încărcate, în mișcare față de conductor:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3.3)$$

Relația (3.3) presupune alegerea unui sens de referință al curentului, identic cu sensul în care trebuie să se deplaseze particulele cu sarcina pozitivă.

Pentru caracterizarea locală, într-un punct dat, a stării electrocinetice, se folosește densitatea curentului de conducție  $\vec{J}$ , definită astfel încât fluxul acestui vector printr-o suprafață oarecare (fig.3.3) să fie egal cu intensitatea curentului prin acea suprafață:

$$i = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.4)$$

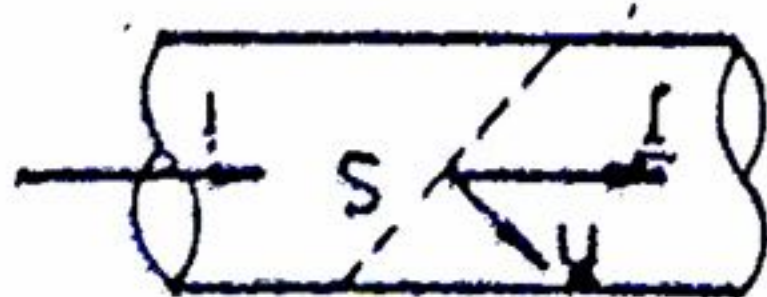


Fig.3.3

În conductor, spre deosebire de curentul de conducție, există și un curent de convecție, determinat de mișcarea particulelor încărcate, datorită mișcării întregului corp:

$$i_{conv} = \int_S \vec{J}_{conv} d\vec{S}, \quad (3.5)$$

precum și un curent de deplasare cauzat de variația în timp a inducției electrice  $\vec{D}$ , a cărui densitate este

$$\vec{J}_{depl} = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

deci:

$$i_{depl} = \int_S \vec{J}_{depl} d\vec{S},$$

(3.6)



care, ca și curentul de conducție produce câmp magnetic.

Astfel, intensitatea curentului total din conductor este

$$i = i_{\text{cond}} + i_{\text{conv}} + i_{\text{depl}} \quad (3.7)$$

### 3.1.4 Teorema refracției liniilor de câmp în regimul electrocinetic

Dacă se consideră două medii liniare, izotrope, conductivitățile  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ , separate de o suprafață  $S$ , atunci curentul de conducție prin suprafața elementară  $dS$  este (fig.3.4.a):

$$di = \bar{J}_1 d\bar{S} = \bar{J}_2 d\bar{S} \text{ de unde rezultă } J_1 dS \cos \alpha_1 = J_2 dS \cos \alpha_2 \text{ sau } J_1 \cos \alpha_1 = J_2 \cos \alpha_2$$

adică:  $J_{n1} = J_{n2}$  (3.8)

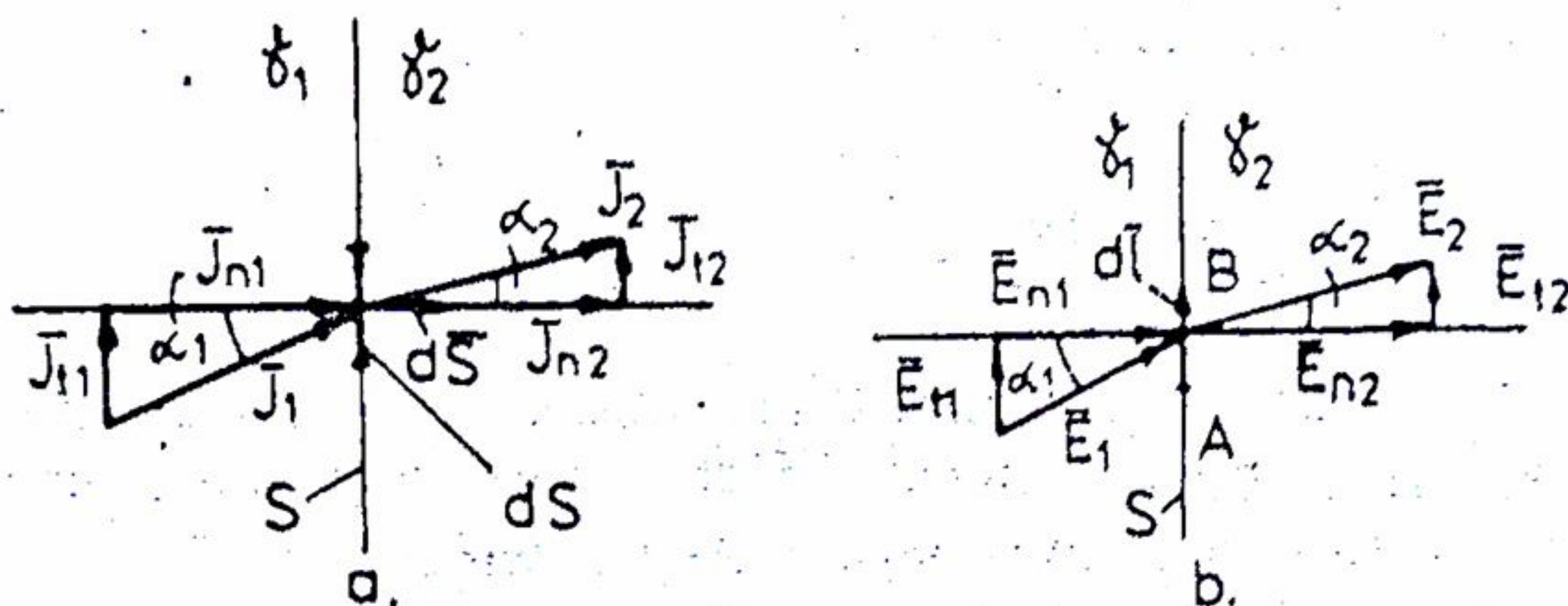


Fig.3.4

Tensiunea electrică între două puncte A și B situate pe suprafața de separație (fig.3.4.b) când  $\overline{AB} = d\vec{l}$  este  $du_{AB} = \bar{E}_1 d\vec{l} = \bar{E}_2 d\vec{l}$  de unde rezultă:  $E_1 dl \sin \alpha_1 = E_2 dl \sin \alpha_2$  sau  $E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$  adică:  $E_{t1} = E_{t2}$ . (3.9)

Din fig.3.4 rezultă  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{J_{t1}}{J_{n1}} \cdot \frac{J_{n2}}{J_{t2}} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}}$

Știind că  $J_{t1} = \gamma_1 E_{t1}$  și  $J_{t2} = \gamma_2 E_{t2}$  (în absența câmpurilor imprimate,  $\bar{E} = 0$ ) se obține :

$$\frac{\tan \gamma_1}{\tan \gamma_2} = \frac{\gamma_1 E_{t1}}{\gamma_2 E_{t2}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad (3.10)$$

## 3.2 CIRCUITE DE CURENT CONTINUU LINIARE

Se înțelege prin latură, o porțiune de circuit formată din elemente de circuit legate în serie, între două noduri; numărul total de laturi ale unei rețele se va nota cu  $L$ ; prin nod de înțelege un punct al circuitului în care sunt legate cel puțin trei laturi; numărul total de noduri se va nota cu  $N$ ; se înțelege prin ochi sau bucă - orice contur închis format dintr-o succesiune de laturi ale rețelei; numărul de bucle independente se va nota  $B$  și reprezintă



numărul maxim de bucle care nu se suprapun.

În orice circuit electric există relația :

$$L = B + N - 1.$$

(3.11)

Pentru circuitele electrice de curent continuu, curentul de conducție se va nota cu  $I$ .

### 3.2.1 Teoremele lui Kirchhoff. Conservarea puterilor

Prima teoremă a lui Kirchhoff este o consecință a legii de conservare a sarcinii electrice în regim staționar. Această teoremă se sprijină pe faptul că într-un nod nu are loc acumulare de sarcini electrice (fig.3.5.a):  $-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$ . Pentru un nod oarecare suma algebrică a curenților este egală cu zero :

$$\sum I = 0 \quad (3.12)$$

A doua teoremă a lui Kirchhoff se scrie:

$$\sum U = \sum RI \quad (3.13)$$

adică de-a lungul oricărui ochi (bucle) suma algebrică a t.e.m. este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune. Un exemplu de aplicare a acestei teoreme este dat în fig.3.5.b, în care sensul de referință în lungul buclei este comun :

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = U_1 - U_2 + U_4.$$

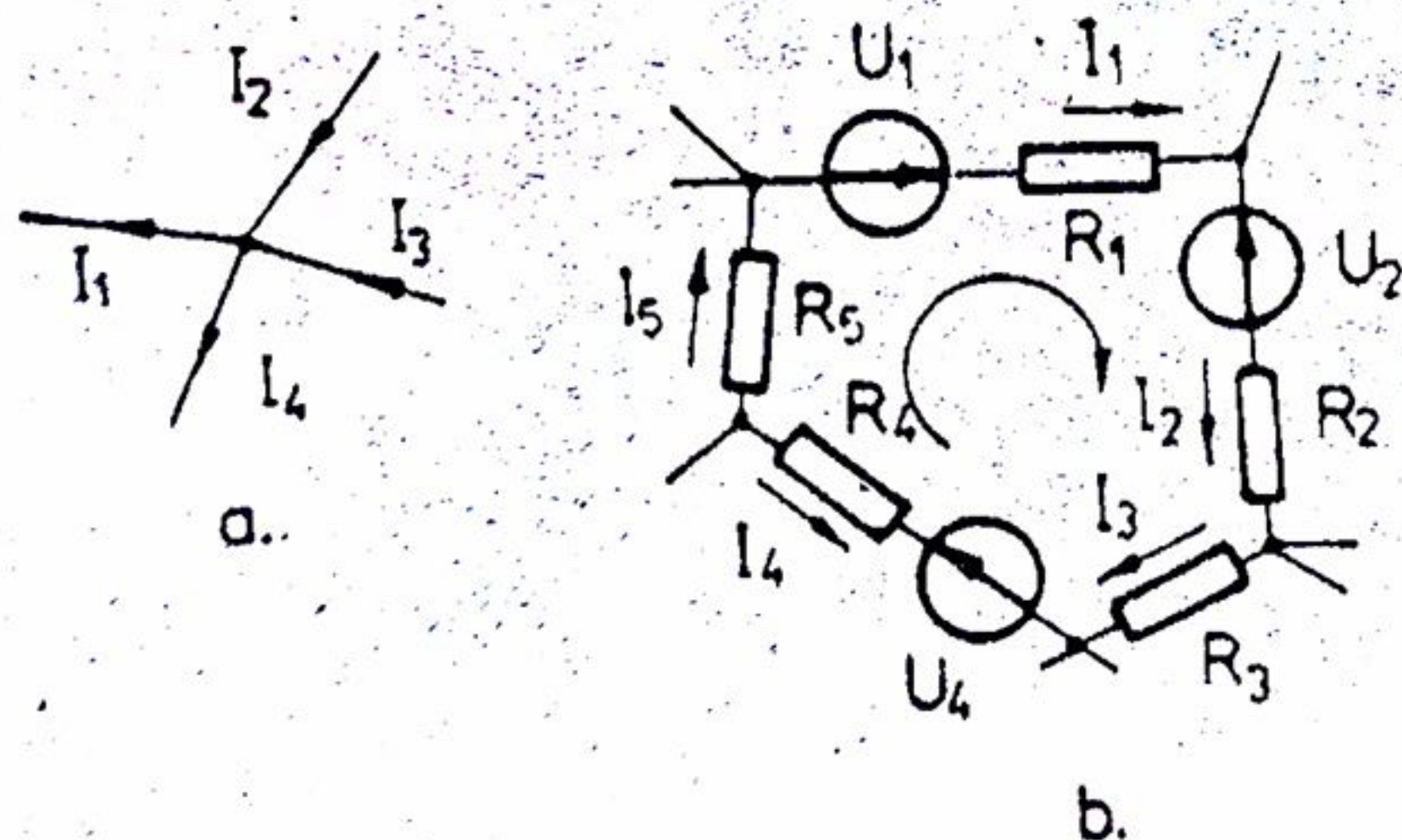


Fig.3.5

Cu prima teoremă a lui Kirchhoff se pot obține  $(N-1)$  ecuații independente, pentru  $(N-1)$  noduri. Cu a doua teoremă a lui Kirchhoff se pot obține  $B$  ecuații independente, corespunzătoare buclelor care nu se suprapun. Se obține un sistem de  $L$  ecuații independente care permite, de exemplu, calculul curenților celor  $L$  laturi în funcție de t.e.m. și

rezistențele circuitului. Calculul acestor curenți se face astfel: se alege câte un sens arbitrar pentru curenți; se aleg sensuri arbitrare de referință (de parcurgere) a buclelor; se scrie și se rezolvă sistemul de ecuații obținut din teoremele lui Kirchhoff.

Conform legii de conservare a energiei, rezultă că într-un circuit de curent continuu, puterea dată de surse ( $\sum UI$ ), este egală cu puterea primită de receptoare:

$$P = \sum UI = \sum RI^2, \quad (3.14)$$

care reprezintă teorema conservării puterilor în circuite de c.c. Produsul  $UI$  este negativ dacă sursa de t.e.m. respectivă funcționează ca receptor.



Puterea dată de surse se obține considerând un același sens de referință pentru  $U$  și  $I$ . Relația (3.14) se utilizează și ca o verificare a rezolvării corecte a circuitelor.

### 3.2.2 Legarea rezistențelor și surselor de t.e.m.

1) Dacă mai multe rezistențe sunt legate în serie ele pot fi înlocuite cu o rezistență echivalentă a cărei valoare este egală cu suma rezistențelor parțiale (fig.3.6.a).

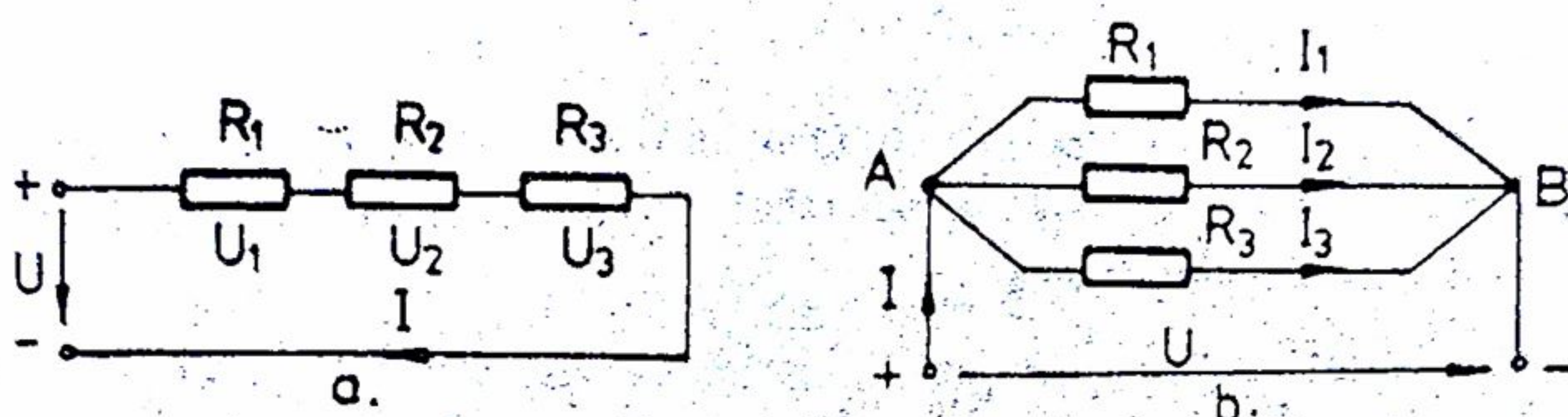


Fig.3.6

Rezultă  $U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I = R I$  sau  $R = R_1 + R_2 + R_3$

În general:  $R = \sum R_i, i = 1, 2, \dots$  (3.15)

unde  $R$  este rezistența echivalentă a grupului de rezistențe serie.

2) La legarea în paralel a mai multor rezistențe (fig.3.6.b) curenții din laturi sunt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; I_2 = \frac{U}{R_2}; I_3 = \frac{U}{R_3}$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff în nodul A se obține:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U \frac{1}{R}$$

$$\text{Rezultă } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \text{ sau, în general } R = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} \quad (3.16)$$

unde  $R$  este rezistența echivalentă a grupului de rezistențe legate în paralel. Pentru două rezistențe legate în paralel:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.17)$$

iar dacă există  $n$  rezistențe identice ( $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ ) atunci rezistența echivalentă

$$\text{este: } R_e = \frac{R}{n} \quad (3.18)$$

3) Pentru înlocuirea unui grup de trei rezistențe legate în triunghi (fig.3.7) cu alt grup de trei rezistențe legate în stea (fig.3.8), sau invers, se impune condiția ca potențialele punctelor 1,2,3 să rămână aceleași (ca valoare) și după transfigurare.



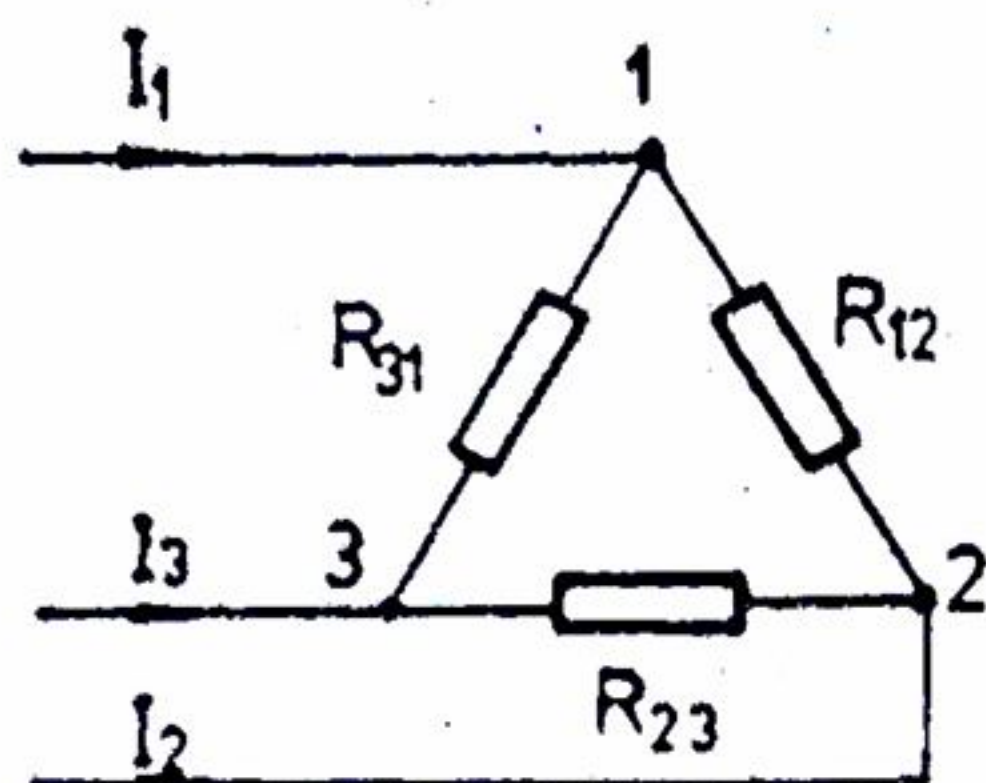


Fig. 3.7

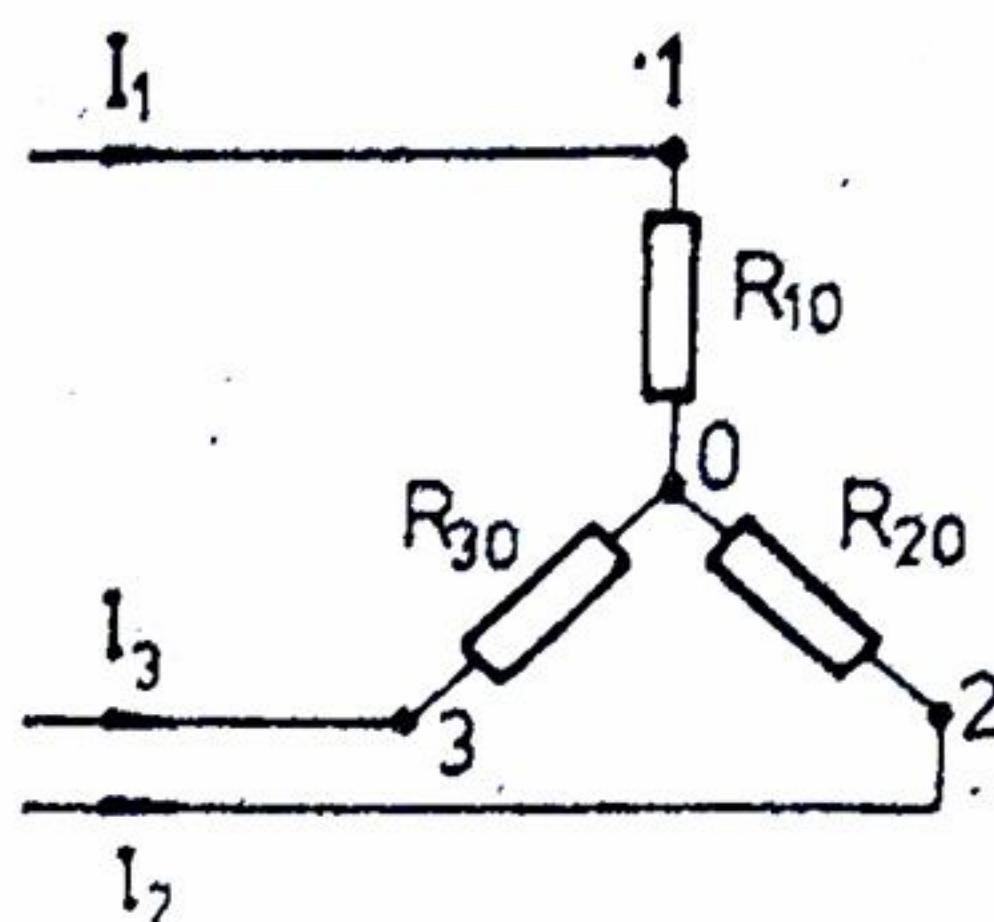


Fig. 3.8

Rezultă că și curenții  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  își vor menține valorile după transfigurare. Implicit, rezistențele echivalente dintre două borne trebuie să fie egale, atât în cazul legării în triunghi, cât și în cazul legării în stea:

$$\begin{cases} \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + (R_{23} + R_{31})} = R_{10} + R_{20} \\ \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{23} + (R_{12} + R_{31})} = R_{20} + R_{30} \\ \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{31} + (R_{12} + R_{23})} = R_{10} + R_{30} \end{cases} \quad (3.19)$$

Pentru transfigurarea din triunghi în stea, se rezolvă sistemul de ecuații (3.19) în raport cu  $R_{10}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{30}$ :

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_{30} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (3.20)$$

Pentru transfigurarea din stea în triunghi, se rezolvă sistemul de ecuații (3.19) în raport cu  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ :

$$\begin{cases} R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}} \\ R_{23} = R_{20} + R_{30} + \frac{R_{20}R_{30}}{R_{10}} \\ R_{31} = R_{10} + R_{30} + \frac{R_{10}R_{30}}{R_{20}} \end{cases} \quad (3.21)$$

4) Legarea în serie a surselor de t.e.m. se efectuează atunci când se cere o t.e.m. totală relativ mare (fig. 3.9):  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .

Dacă  $R$  este rezistența circuitului exterior,  $\sum r$  - suma rezistențelor interioare, valoarea curentului este:  $I = \frac{U}{R + \sum r}$ , iar  $U_R = U \frac{R}{R + \sum r}$  (3.22)



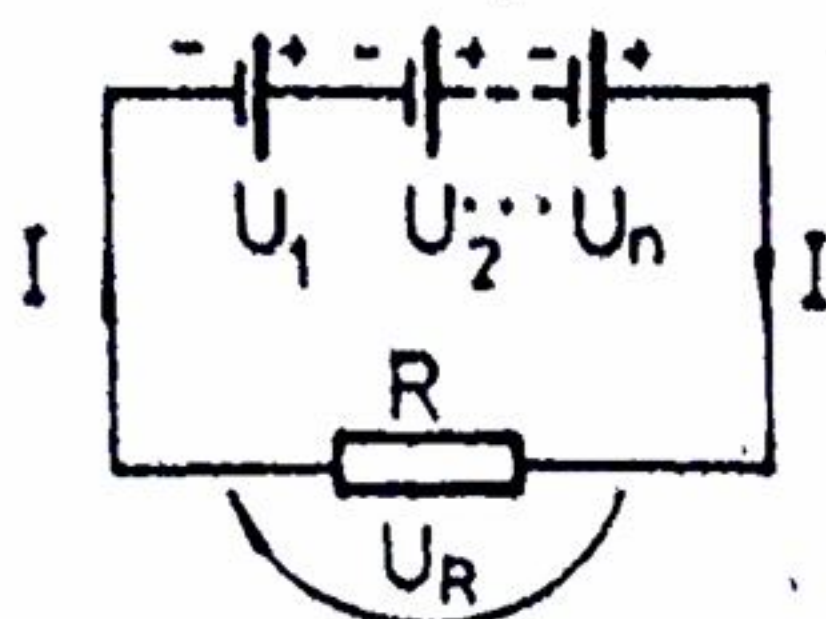


Fig.3.9

Elementele legate în serie, au în mod obișnuit aceeași t.e.m.  $U_0$ , aceeași rezistență interioară  $r$  și același curent nominal de descărcare. În cazul legării în serie a  $n$  elemente, t.e.m. totală este  $nU_0$ , iar rezistența interioară nr. Curentul debitat pe rezistența exterioară

devine:  $I = \frac{nU_0}{nr + R} = \frac{U_0}{r + \frac{R}{n}}$ ; iar diferența de potențial la

bornele receptorului:

$$U_R = RI = nU_0 \frac{R}{nr + R} = U_0 \frac{R}{r + \frac{R}{n}} \quad (3.23)$$

5) Legarea în paralel a surselor de t.e.m. se efectuează atunci când se cere un curent  $I$  în receptor, mai mare decât curentul  $I_0$  din sursele de tensiune. Legarea în paralel se poate face numai cu elemente având aceeași t.e.m. și aceeași rezistențe interioare:

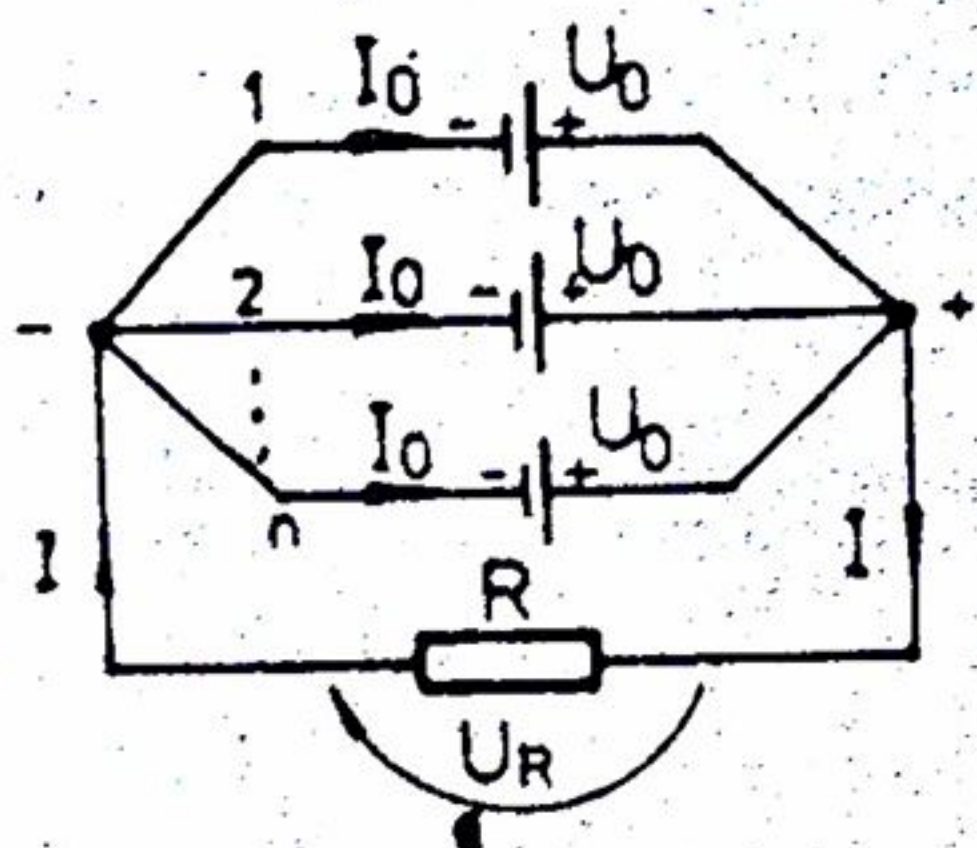


Fig.3.10

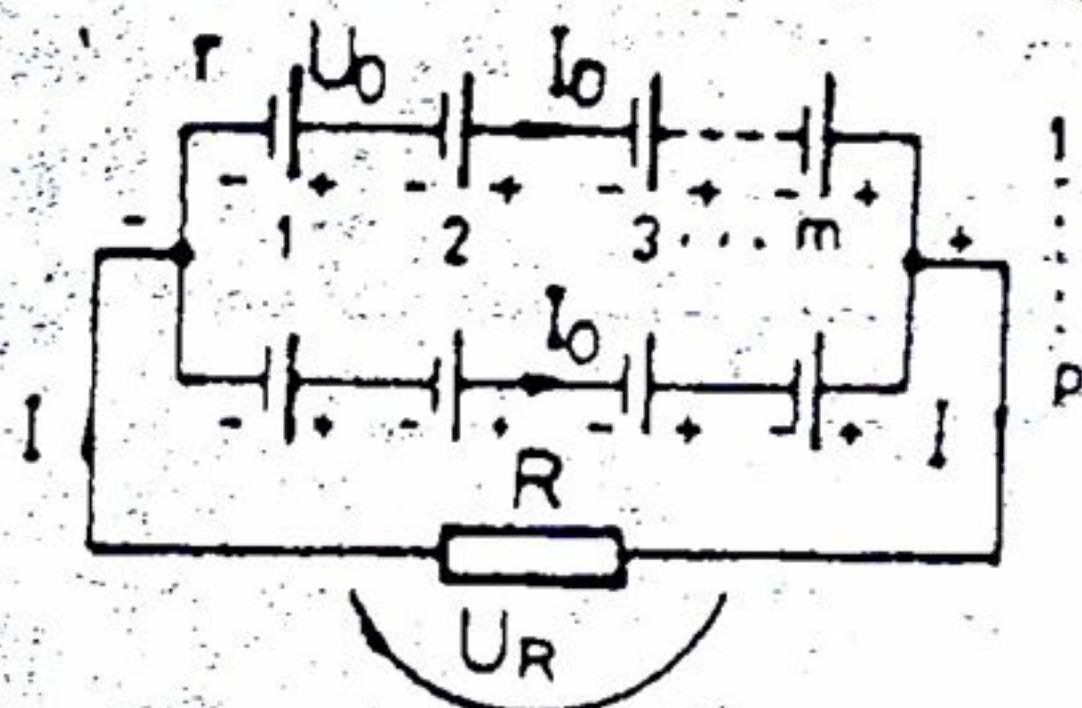


Fig.3.11

astfel, între diferitele elemente se produc curenți locali de circulație (curenți de egalizare) care produc pierderi inutile de energie, chiar atunci când circuitul exterior al grupului este întrerupt. Dacă elementele sunt identice, t.e.m. a grupului este egală cu t.e.m. a fiecărui element, iar rezistența interioară a grupului este egală  $r/n$ ,  $r$  fiind rezistența interioară a unui element și  $n$  - numărul elementelor în paralel. Când grupul debitează pe o rezistență exterioară  $R$ , curentul total este (fig.3.10)

$$I = nI_0 ; I = \frac{U_0}{\frac{r}{n} + R} = \frac{nU_0}{nR + r} \quad (3.24)$$

Diferența de potențial la bornele receptorului este

$$U_R = RI = U_0 \frac{R}{\frac{r}{n} + R} = nU_0 \frac{R}{r + nR} \quad (3.25)$$

6) Legarea în serie-paralel a surselor de t.e.m. se efectuează atunci când se cere o t.e.m. totală ridicată, cât și un curent total mai mare decât al unei singure surse (fig.3.11).



Dacă  $m$  este numărul de elemente legate în serie și  $p$  numărul seriilor de elemente legate în paralel, curentul total este:  $I = pI_0$ , unde  $I_0$  este curentul dintr-o serie. Rezultă:

$$I = \frac{mU_0}{\frac{mr}{p} + R} = \frac{pmU_0}{mr + pR}$$

Tensiunea la bornele receptorului este:

$$U_R = RI = pmU_0 \frac{R}{mr + pR} \quad (3.26)$$

### 3.2.3 Transportul energiei electrice în c.c. Transferul maxim de putere

În general pentru transportul energiei electrice în curent continuu se folosește o rețea cu două conductoare (unul de ducere al curentului și altul de întoarcere). Lungimea

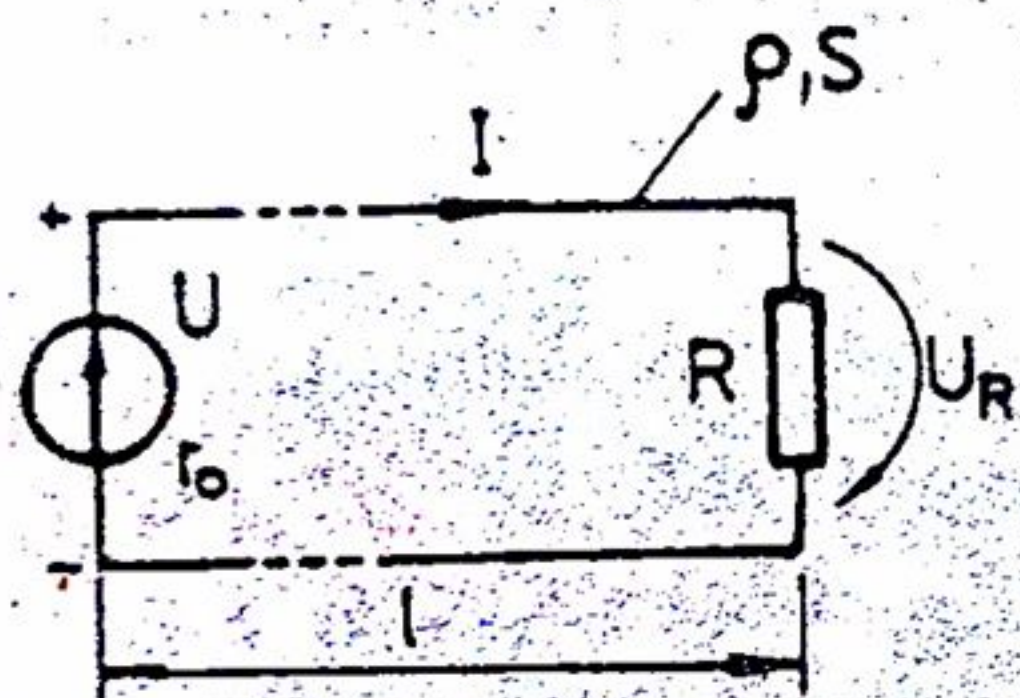


Fig.3.12

liniei electrice este  $l$ , secțiunea conductorului este  $S$ , iar rezistivitatea acestuia este  $\rho$ . Sursa de tensiune (generatorul) are t.e.m. constantă și egală cu  $U$ , rezistența interioară este  $r_0$ , iar consumatorul (receptorul) are rezistența  $R$  (fig.3.12).

Rezistența conductoarelor este:  $r_c = \rho \frac{2l}{S}$ .

Curentul din receptor (curentul din linie) este:

$$I = \frac{U}{r_0 + r_c + R} = \frac{U}{R_0 + R}$$

Practic  $r_0 \ll r_c$ . Se utilizează notația:  $r_0 + r_c = R_0$ . Alte mărimi electrice ale rețelei sunt:

- tensiunea receptorului  $U_R = RI = U \frac{R}{R_0 + R}$

- căderea de tensiune pe conductoare  $\Delta U = r_c I = U \frac{r_c}{R_0 + R} \approx U \frac{R_0}{R_0 + R}$

- puterea consumată de receptor  $P = RI^2 = U^2 \frac{R}{(R_0 + R)^2}$  (3.27)

- puterea debitată de generator  $P_g = UI = \frac{U^2}{R_0 + R}$  (3.28)

- randamentul liniei  $\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{R_0 + R}$  (3.29)

sau, ținând seama de pierderea de putere  $\Delta P = UI$ ,  $\eta = \frac{P_g - \Delta P}{P_g} = 1 - \frac{R_0 I}{U}$  (3.30)



Transferul maxim de putere. Dacă relația (3.27) se consideră o funcție de  $R$ , atunci  $P(R)$  are un maxim pentru derivata nulă:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{d}{dR} \left[ U^2 \frac{R}{(R_0 + R)^2} \right] = U^2 \frac{R_0 - R}{(R_0 + R)^3} = 0 \quad (3.31)$$

de unde rezultă condiția de maxim  $R = R_0$ . (3.32)

În cazul transferului maxim de putere când  $R = R_0$  mărimile electrice ale rețelei sunt:

$$I = \frac{U}{R_0 + R} = \frac{U}{2R_0}; \quad U_R = U \frac{R}{R_0 + R} = \frac{U}{2}; \quad \Delta U = U \frac{R_0}{R_0 + R} = \frac{U}{2};$$

$$P = U^2 \frac{R}{(R_0 + R)^2} = \frac{U^2}{4R_0}; \quad P_g = \frac{U^2}{R_0 + R} = \frac{U^2}{2R_0}; \quad \eta = \frac{P}{P_g} = 0,5.$$

Transferul maxim de putere este utilizat în electrocomunicații unde se urmărește transferul unei puteri maxime la receptor, chiar la randament scăzut.

#### 3.2.4 Metode de rezolvare a circuitelor de c.c.

Există mai multe asemenea metode, dar toate se bazează pe teoremele lui Kirchhoff (care le pot înlocui) și realizează doar artificii și sistematizări care simplifică calculul, prin introducerea unor necunoscute auxiliare sau prin realizarea unui calcul din aproape în aproape, care nu necesită gruparea ecuațiilor în sisteme cu un număr mare de necunoscute.

A rezolva un circuit electric de curent continuu înseamnă a determina curenții din laturi și a efectua (a verifica) bilanțul puterilor, cunoscute fiind rezistențele și t.e.m.

1) Metoda curenților de contur (ciclici). Se folosesc  $B$  necunoscute auxiliare, curenți fictivi, numiți "de contur", asociați câte unul pentru fiecare buclă. Curenții de contur se închid în buclele care nu se suprapun, fiecare parcurgând toate laturile buclei respective, îndeplinind condiția ca suma lor algebrică în fiecare latură să fie egală cu curențul laturii respective. Prin exprimarea curenților din laturi în funcție de curenții de contur se satisface prima teoremă a lui Kirchhoff. În ecuațiile date de teorema a doua a lui Kirchhoff, se înlocuiesc curenții din laturi cu curenții de contur (curențul dintr-o latură reprezintă suma algebrică a curenților de contur respectivi) și se obține un sistem cu  $B$  ecuații :

$$\begin{cases} R_{11}I_{c1} + R_{12}I_{c2} + \dots + R_{1B}I_{cB} = U_{c1} \\ R_{21}I_{c1} + R_{22}I_{c2} + \dots + R_{2B}I_{cB} = U_{c2} \\ \vdots \\ R_{B1}I_{c1} + R_{B2}I_{c2} + \dots + R_{BB}I_{cB} = U_{cB} \end{cases} \quad (3.33)$$

unde  $R_{ij}$  este suma rezistențelor din bucla  $i$ , afectate de curențul de contur  $I_{cj}$ , iar  $U_{cn}$  - suma algebrică a t.e.m. din bucla  $n$ .



Metoda curenților de contur constă în scrierea ecuațiilor curenților de contur, în rezolvarea acestui sistem de ecuații și în calculul curenților din laturi în funcție de curenții de contur.

**Aplicația 1.** Să se rezolve prin metoda curenților ciclici rețeaua din fig.3.13. în care:  $U_1 = 190V$ ;  $U_2 = 150V$ ;  $U_3 = 250V$ ;  $U_4 = 60V$ ;  $U_5 = 120V$ ;  $U_6 = 20V$ ;  $R_1 = 20\Omega$ ;  $R_2 = 5\Omega$ ;  $R_3 = 2\Omega$ ;  $R_4 = 4\Omega$ ;  $R_5 = 10\Omega$ ;  $R_6 = 50\Omega$ ;  $R_7 = 5\Omega$ ;  $R_8 = 10\Omega$ ;  $R_9 = 15\Omega$ .

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} (R_1 + R_4 + R_8)I_{c1} + R_4I_{c2} + R_8I_{c4} = -U_1 + U_4 \\ R_4I_{c1} + (R_2 + R_4 + R_9)I_{c2} + R_9I_{c3} = U_2 + U_4 \\ R_9I_{c2} + (R_6 + R_7 + R_9)I_{c3} + R_7I_{c4} + R_6I_{c5} = -U_6 \\ R_8I_{c1} + R_7I_{c3} + (R_5 + R_7 + R_8)I_{c4} - R_5I_{c5} = -U_5 \\ R_6I_{c3} - R_5I_{c4} + (R_3 + R_5 + R_6)I_{c5} = -U_3 - U_6 + U_5 \end{cases}$$

care are soluțiile:  $I_{c1} = -3A$ ,  $I_{c2} = 8A$ ,  $I_{c3} = 2A$ ,  $I_{c4} = -6A$ ,  $I_{c5} = -5A$ .

Curenții din laturi au valorile:  $I_1 = -I_{c1} = 3A$ ,

$I_2 = I_{c2} = 8A$ ,  $I_3 = -I_{c5} = 5A$ ,  $I_4 = I_{c1} + I_{c2} = 5A$ ,

$I_5 = -I_{c4} + I_{c5} = 1A$ ,  $I_6 = -I_{c3} - I_{c5} = 3A$ ,

$I_7 = -I_{c3} - I_{c4} = 4A$ ,  $I_8 = -I_{c1} - I_{c4} = 9A$ ,

$I_9 = I_{c2} + I_{c3} = 10A$ .

Dacă unul sau mai mulți curenți din laturi ar fi avut valori negative, sensul real din laturi ar fi fost invers pentru acești curenți.

Se verifică bilanțul puterilor:

$$P = \sum UI = \sum RI^2 = 3500W = 3.5kW.$$

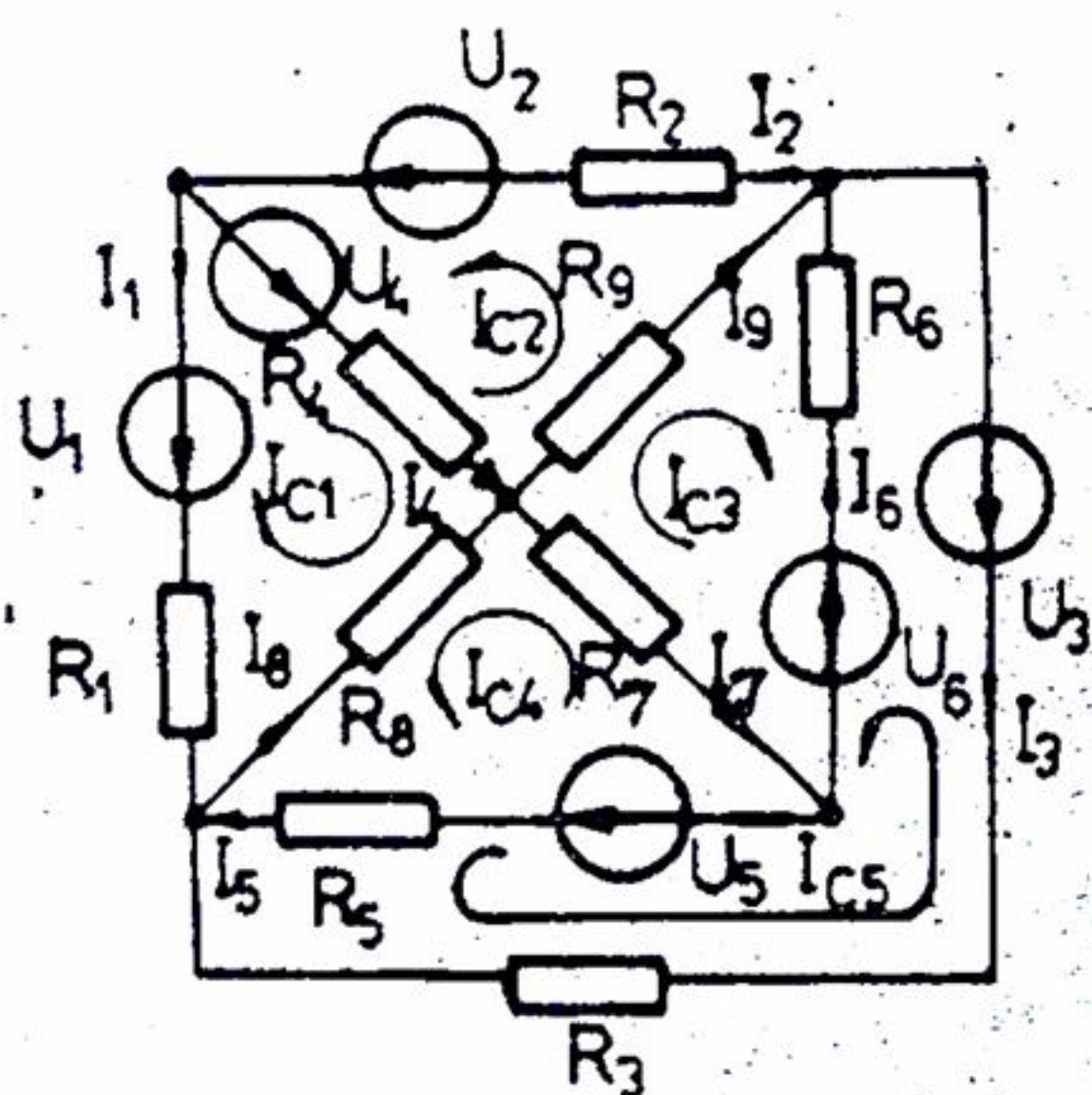


Fig.3.13

2) **Metoda superpoziției.** Curentul dintr-o latură oarecare a unui circuit liniar este egal cu suma algebrică a curenților ce i-ar stabili în această latură fiecare t.e.m. dacă celelalte t.e.m. ar fi nule (teorema superpoziției). Teorema este o consecință a liniarității ecuațiilor circuitelor cu rezistențe constante, independente de curenți sau tensiune.

Curentul  $I_j$  din latura  $j$  se calculează cu relația:

$$I_j = \sum_{k=1}^n I_{jk} = \sum_{k=1}^n U_k G_{jk} \quad (3.34)$$

în care  $I_{jk}$  este curentul sursei  $k$  (în total fiind  $n$  surse care se consideră că funcționează separat), iar  $G_{jk}$  este conductanța de transfer între laturile  $k$  și  $j$ .

Se calculează pe rând curenții stabiliți în laturi, sub acțiunea câte unei singure t.e.m. (se consideră anulate celelalte t.e.m. dar se mențin nemodificate rezistențele interne



ale surselor) și apoi se adună algebric (se suprapun curenții) pentru a găsi în fiecare latură curentul rezultat.

**Aplicația 2.** Să se rezolve prin metoda superpoziției circuitul din fig.3.14, în care:  
 $U_1 = 60V$ ;  $U_2 = 40V$ ;  $R_1 = 10\Omega$ ;  $R_2 = 5\Omega$ ;  $R_4 = 2\Omega$ ;  $R_5 = 4\Omega$ ;  $R_6 = 8\Omega$ .

1. Se menține în circuit doar efectul sursei  $U_1$  care debitează curentul

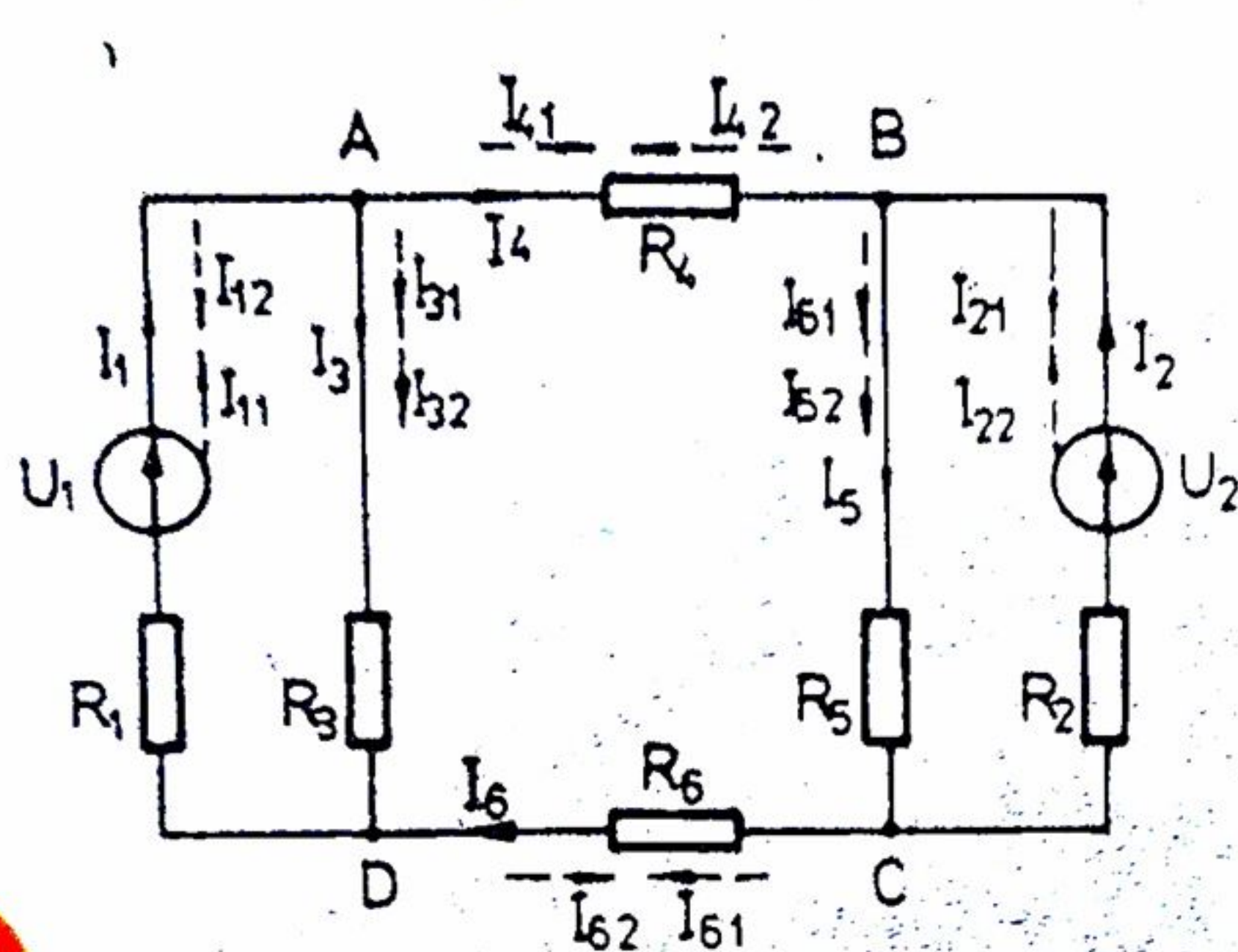


Fig.3.14

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_3 \left( R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6 \right)}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6}} = \frac{147}{41} A$$

Se calculează tensiunea între punctele A,D

$$U_{AD1} = I_{11} \frac{R_3 \left( R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6 \right)}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6} = \frac{990}{41} V$$

Rezultă curenți:

$$I_{31} = \frac{U_{AD1}}{R_3} = \frac{66}{41} A; \quad I_{41} = I_{61} = \frac{U_{AD1}}{R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6} = \frac{81}{41} A$$

Se determină tensiunea între B,C:

$$U_{BC1} = I_{41} \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{180}{41} V$$

Rezultă curenți:

$$I_{21} = \frac{U_{BC1}}{R_2} = \frac{36}{41} A \quad \text{și} \quad I_{51} = \frac{U_{BC1}}{R_5} = \frac{45}{41} A$$

2. În mod similar, se menține în circuit doar efectul sursei  $U_2$  și se determină în ordine:  $I_{22}$ ,  $U_{BC2}$ ,  $I_{32}$ ,  $I_{42}$ ,  $U_{AD2}$ ,  $I_{12}$  și  $I_{32}$ .

Se calculează curenții din laturi:  $I_1 = I_{11} - I_{12} = 3 A$ ;  $I_2 = -I_{21} + I_{22} = 4 A$ ;

$I_3 = I_{31} + I_{32} = 2 A$ ;  $I_4 = I_6 = I_{41} - I_{42} = 1 A$ ;  $I_5 = I_{51} + I_{52} = 5 A$ .

3. Se verifică bilanțul puterilor  $P = \sum UI = \sum RI^2 = 340 W$ .

4. Rezultă conductanțele de transfer:  $G_{11} = \frac{I_{11}}{U_1} = 0,056 \Omega^{-1}$ ;



$$G_{22} = \frac{I_{22}}{U_2} = 0,134 \Omega^{-1}; G_{12} = \frac{I_{12}}{U_{AD2}} = 0,1 \Omega^{-1}; G_{21} = \frac{I_{21}}{U_{BC1}} = 0,2 \Omega^{-1}; \text{etc.}$$

3) Metoda tensiunii între noduri. Se aplică numai la circuitul cu două noduri; dacă circuitul are mai mult de două noduri se recomandă altă metodă. Se adăugă o buclă formată de o latură și o linie a tensiunii la borne (fig.3.15); în acest caz se poate scrie:

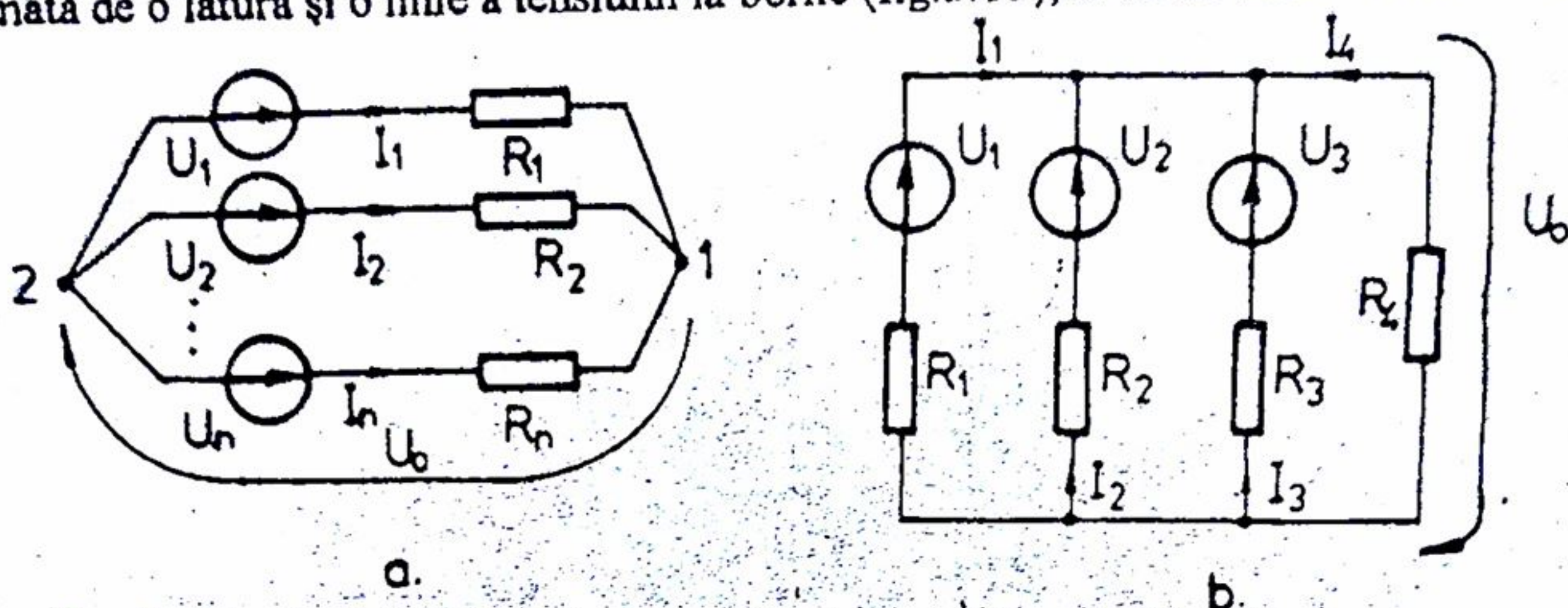


Fig.3.15

$$R_1 I_1 + U_0 = U_1; R_2 I_2 + U_0 = U_2 \dots R_n I_n + U_0 = U_n.$$

unde  $U_0$  este tensiunea între cele două noduri. Rezultă:  $I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1} = (U_1 - U_0)G_1$ .

$$I_2 = \frac{U_2 - U_0}{R_2} = (U_2 - U_0)G_2 \dots I_n = \frac{U_n - U_0}{R_n} = (U_n - U_0)G_n \text{ unde } G_i \text{ este conductanța ramurii } i; (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$\text{Deoarece } \sum_{i=1}^n I_i = 0, \text{ rezultă } (U_1 - U_0)G_1 + (U_2 - U_0)G_2 + \dots + (U_n - U_0)G_n = 0.$$

Se deduce tensiunea între noduri

$$U_0 = \frac{U_1 G_1 + U_2 G_2 + \dots + U_n G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n} = \frac{\sum U G}{\sum G} \quad (3.35)$$

Fiind cunoscută tensiunea între noduri se calculează curenții:

$$I_i = \frac{U_i - U_0}{R_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.36)$$

Aplicația 3. Să se afle curenții din laturile circuitului (fig.3.16.b) în care:

$$U_1 = 110V; U_2 = 100V; U_3 = 50V; R_1 = 6\Omega; R_2 = 5\Omega; R_3 = 30\Omega; R_4 = 10\Omega.$$

$$\text{Tensiunea între noduri este } U_0 = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 80V. \text{ Rezultă curenții}$$

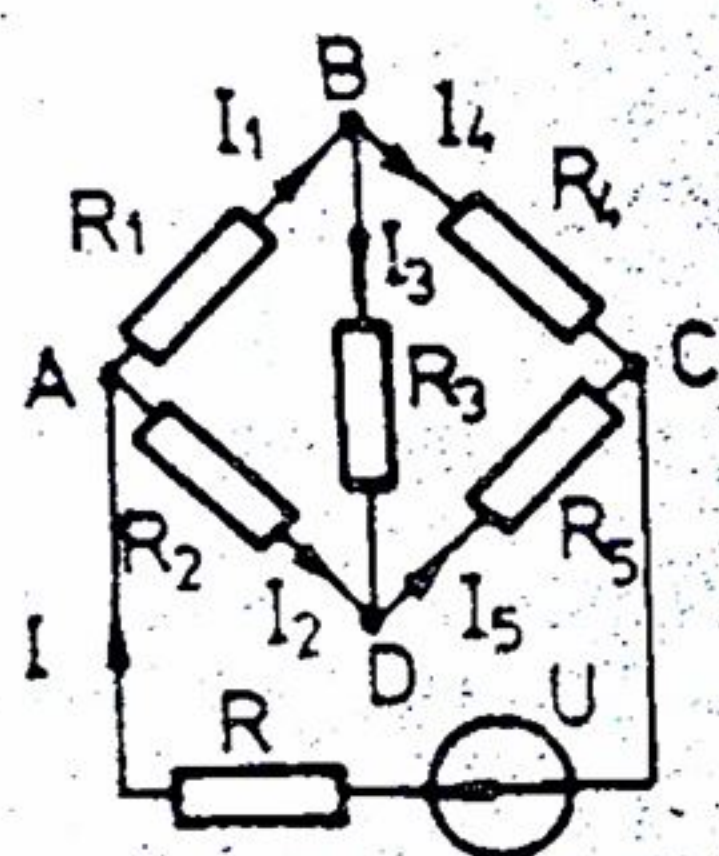
$$I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1} = 5A; I_2 = \frac{U_2 - U_0}{R_2} = 4A; I_3 = \frac{U_3 - U_0}{R_3} = -1A; I_4 = \frac{0 - U_0}{R_4} = -8A.$$



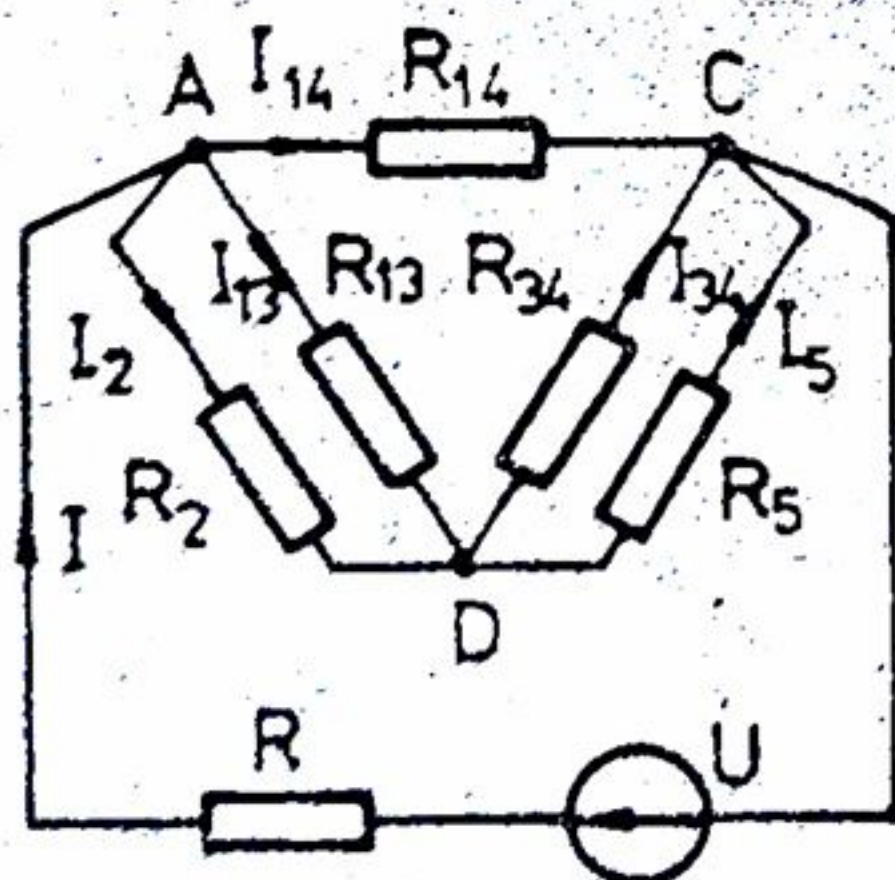
Se verifică  $\sum I = 0$ . Sursa  $U$  funcționează în regim de receptor, adică  $I_3$  are sensul real invers. De asemenea, sensul real al curentului  $I_4$  este invers.

4) Metoda transfigurării. Transfigurarea se folosește în scopul de a reduce numărul de laturi dintr-un circuit complex și a rezolva, deci, un sistem cu mai puține ecuații (date de exemplu de metoda teoremelor lui Kirchhoff, sau de metoda curenților de contur). Se revine apoi la circuitul inițial urmând să se mai rezolve trei ecuații, pentru a determina curenții din grupul triunghi (sau stea) transfigurat. Pentru transfigurare se folosesc relațiile (3.20) și (3.21).

Aplicația 4. Să se rezolve circuitul din fig.3.16.a, în care  $U = 178V$ ;  $R_1 = 10\Omega$ ;  $R_2 = 40\Omega$ ;  $R_3 = 30\Omega$ ;  $R_4 = 25\Omega$ ;  $R_5 = 8\Omega$ ;  $R = 2\Omega$ . Se transfigurează steaua din punctul B și se obțin rezistențele din fig.3.16.b, folosind relațiile (3.21):



a.



b.  
Fig.3.16

$$R_{14} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 R_4}{R_3} = 43.33\Omega;$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_4} = 52\Omega;$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_1} = 130\Omega.$$

Curentul debitat de sursa  $U$  se calculează din expresia:

$$I = \frac{U}{R + \frac{R_{14} \left( \frac{R_2 R_{13}}{R_2 + R_{13}} + \frac{R_5 R_{34}}{R_5 + R_{34}} \right)}{R_{14} + \frac{R_2 R_{13}}{R_2 + R_{13}} + \frac{R_5 R_{34}}{R_5 + R_{34}}}} = 9A.$$

Din teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă

$$RI + R_{14}I_{14} = U, \text{ deci } I_{14} = \frac{U - RI}{R_{14}} = 3.7A.$$

Se determină  $U_{AD}$  și  $U_{DC}$ :

$$U_{AD} = (I - I_{14}) \frac{R_2 R_{13}}{R_2 + R_{13}} = 120V;$$

$$U_{DC} = (I - I_{14}) \frac{R_5 R_{34}}{R_5 + R_{34}} = 40V.$$

$$\text{Rezultă curenții: } I_2 = \frac{U_{AD}}{R_2} = 3A \text{ și } I_5 = \frac{U_{DC}}{R_5} = 5A.$$

Se revine la circuitul inițial și se determină ceilalți curenți:  $I_1 = I - I_2 = 6A$ ;  
 $I_3 = I_5 - I_2 = 2A$ ;  $I_4 = I - I_3 = 4A$ .



Se verifică bilanțul puterilor:  $P = \sum UI = \sum RI^2 = 1602W$ .

Circuitul se poate rezolva și prin transfigurarea  $\triangle ABD$  sau  $\triangle BCD$ .

5) Metoda generatorului de tensiune echivalent. Metoda permite să se determine curentul  $I$  dintr-o latură  $AB$  a unei rețele liniare (fig.3.17), fără a mai calcula, în acest scop și ceilalți curenți din rețea.

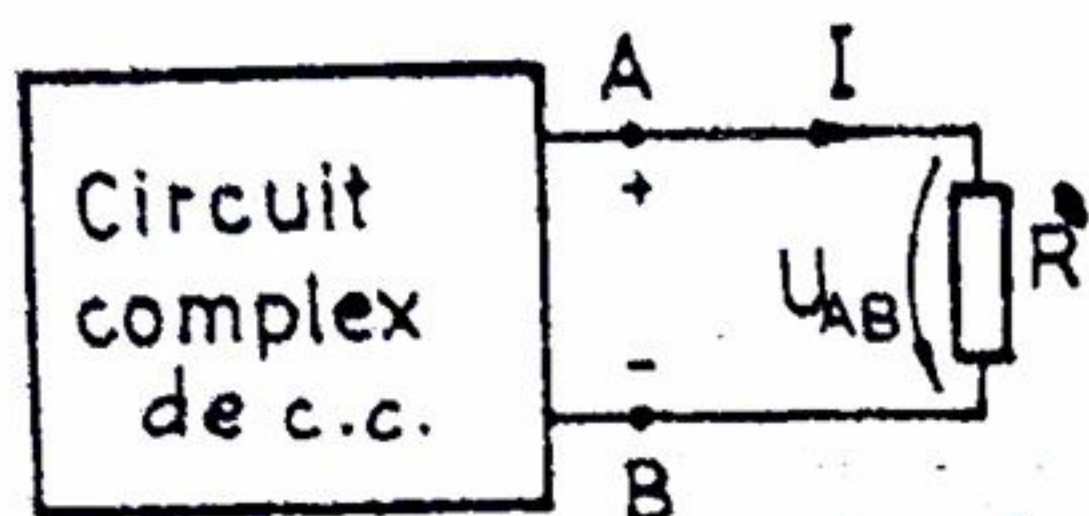


Fig.3.17

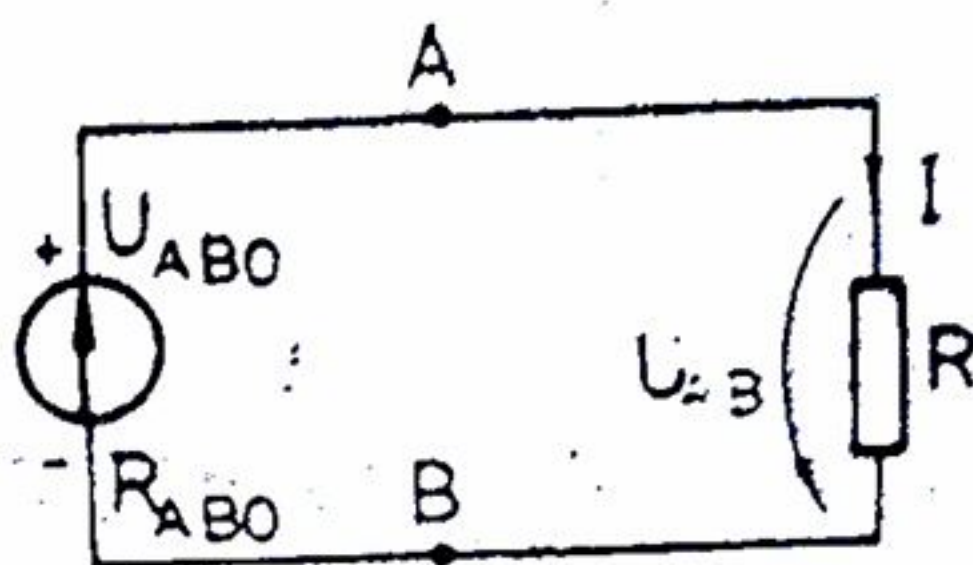


Fig. 3.18

Rețeaua complexă, cu excepția laturii  $AB$ , se echivalează cu un generator de tensiune, având t.e.m. egală cu  $U_{ABO}$  și rezistența interioră egală cu  $R_{ABO}$  (fig.3.18).

În acest caz, curentul  $I$  este egal cu raportul între tensiunea  $U_{ABO}$  de mers în gol (latura  $AB$  deschisă) și suma rezistențelor  $R$  și  $R_{ABO}$  a restului rețelei pasivizate:

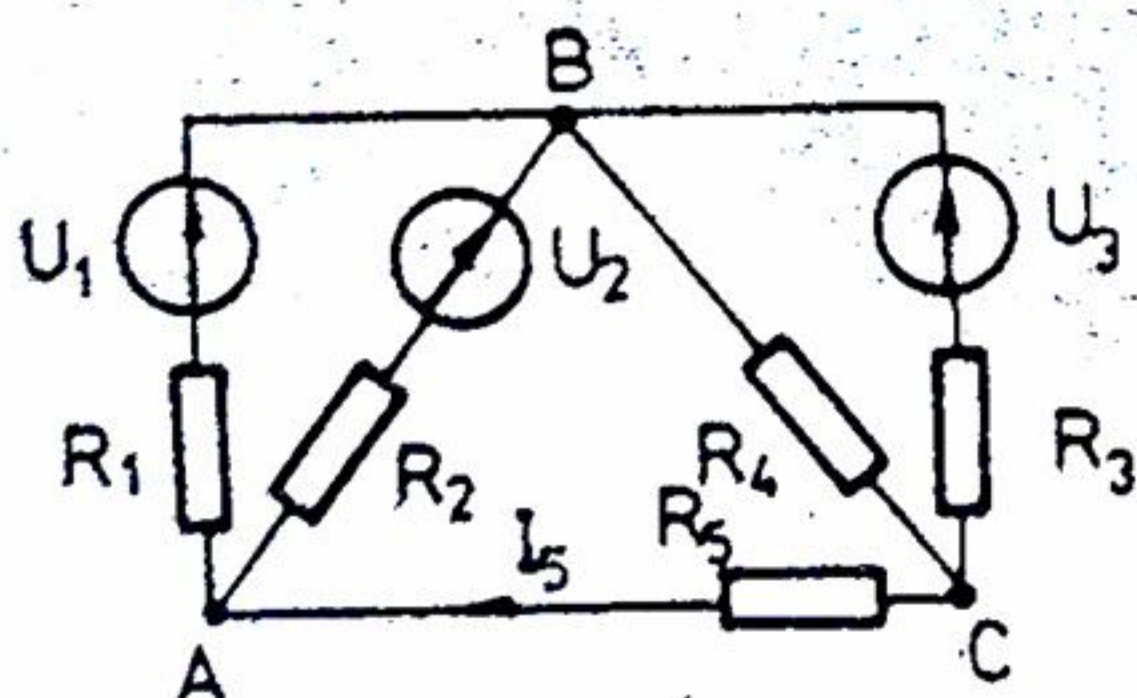
$$I = \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}} \quad (3.37)$$

numită și teorema lui Thévenin.

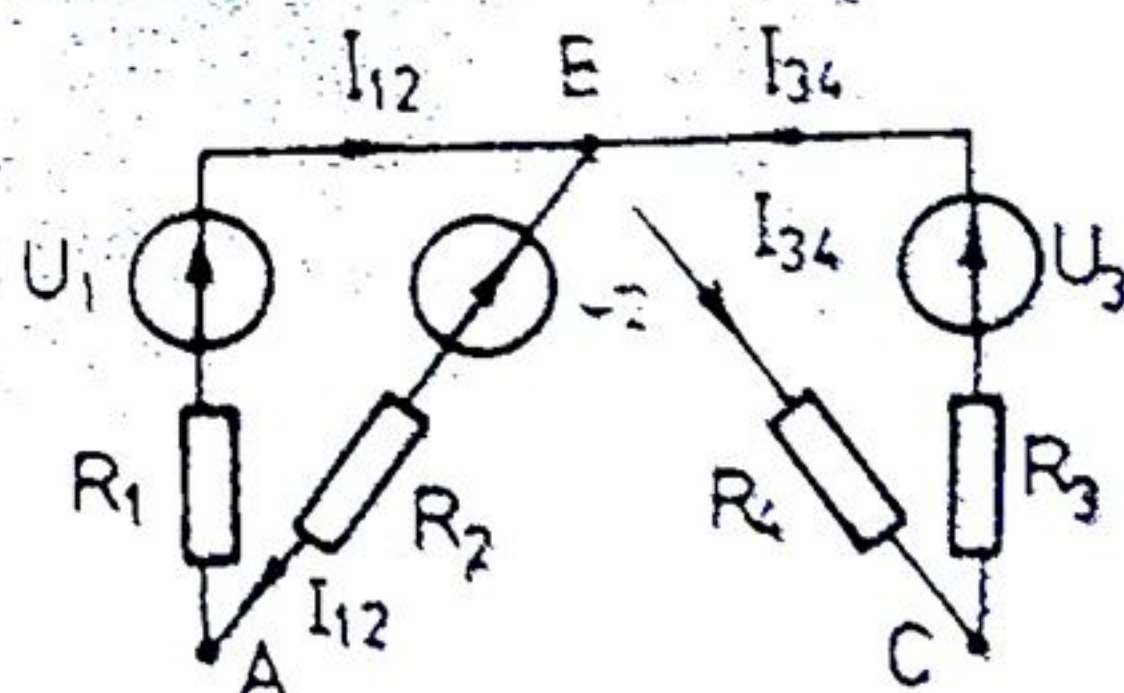
Rezistența  $R_{ABO}$  se calculează tot la mersul în gol (latura  $AB$  deschisă).

Aplicația 5. Să se afle curentul  $I$  din circuitul reprezentat în fig. 19.a în care:

$U_1 = 185V$ ;  $U_2 = 80V$ ;  $U_3 = 75V$ ;  $R_1 = 3\Omega$ ;  $R_2 = 6\Omega$ ;  $R_3 = 5\Omega$ ;  $R_4 = 20\Omega$ ;  $R_5 = 12\Omega$ .



a.



b.

Fig.3.19

Se deschide ramura 5 (fig.3.19.b) și rezultă curenții:

$$I_{12} = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{35}{3} A; \quad I_{34} = \frac{U_3}{R_3 + R_4} = 3A.$$

T.e.m. între A și C, pe conturul A,B,C :

$$U_{ACO} = \sum U - \sum RI = U_2 + R_2 I_{12} - R_4 I_{34} = 90V$$



Rezistența între A și C este  $R_{ACO} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 6\Omega$ .

Cu (3.37) se obține curentul  $I_5 = \frac{U_{ACO}}{R_5 + R_{ACO}} = 5A$ .

6) Metoda generatorului de curent echivalent. Un circuit electric ramificat este echivalent cu un generator care debitează curent electric de conducție în una din laturile sale, considerată receptor.

Dacă în circuitul echivalent din fig.3.18 se notează:  $R_I = U_{AB}$ , atunci cu (3.37) rezultă tensiunea:  $U_{AB} = RI = R \frac{U_{ABO}}{R + R_{ABO}} = \frac{U_{ABO}}{1 + \frac{R_{ABO}}{R}}$ .

Cu conductanțele  $G = \frac{1}{R}$  și  $G_{ABO} = \frac{1}{R_{ABO}}$  se obține relația (teorema lui Norton):

$$U_{BA} = \frac{U_{ABO}}{1 + \frac{G}{G_{ABO}}} = \frac{G_{ABO} U_{ABO}}{G + G_{ABO}} = \frac{I_{sc}}{G + G_{ABO}} \quad (3.38)$$

unde  $I_{sc} = G_{ABO} U_{ABO}$  reprezintă curentul de scurtcircuit care trece prin bornele A-B ale circuitului din fig.3.18, când R se scurtcircuitază ( $R = 0$ ).

### 3.2.5 Rezolvarea asistată de calculator a circuitelor de c.c. liniare

Rezolvarea circuitelor liniare de c.c. asistată de calculator se utilizează în cazul rețelelor cu număr relativ mare de laturi. În acest sens, se folosesc tehnicile de calcul existente pentru a rezolva sistemele de ecuații oferite de teoremele lui Kirchhoff (3.12) și (3.13), metoda curenților de contur (3.33), sau alte metode.

## 3.3 CIRCUITE NELINIARE DE CURENT CONTINUU

Rezistoarele neliniare sunt elemente de circuit care au rezistența electrică dependentă de curentul care trece prin ele sau de tensiunea aplicată la bornele lor. Caracteristica curent-tensiune  $I=f(U)$  a rezistorului neliniar este neliniară.

Un circuit de curent continuu se numește neliniar dacă conține în structura sa cel puțin un rezistor neliniar. Rezistoarele neliniare se reprezintă prin simbolurile grafice din fig. 3.20

Un rezistor neliniar este determinat dacă se cunoaște caracteristica sa  $I=f(U)$ , dată grafic, analitic sau sub formă tabelară.



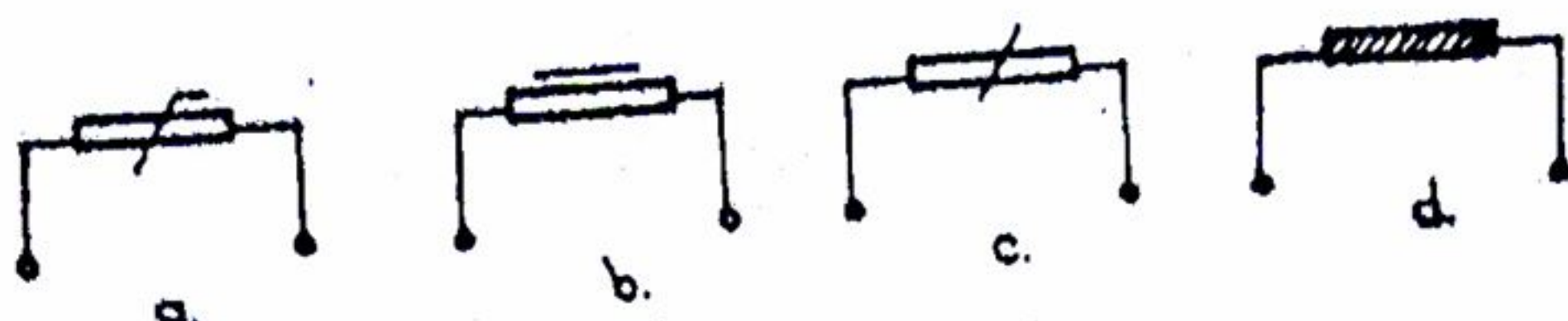


Fig. 3.20

Rezistoarele neliniare se caracterizează prin rezistența statică  $R_s$  și rezistența dinamică (rezistența diferențială)  $R_d$ , definite de relațiile:

$$R_s = \frac{U}{I} \text{ și } R_d = \frac{dU}{dI} \quad (3.39)$$

Rezistența statică și rezistența dinamică depind de punctul de funcționare, adică depind de curentul din rezistor sau de tensiunea aplicată la bornele rezistorului. În circuitele liniare, rezistența statică se confundă însă cu rezistența dinamică ( $R_s = R_d = R$ ): ( $R = \text{const.}$ ).

Dacă caracteristica curent - tensiune a rezistorului neliniar este dată grafic, relațiile de definiție ale rezistenței statice sau dinamice devin (conform fig. 3.21):

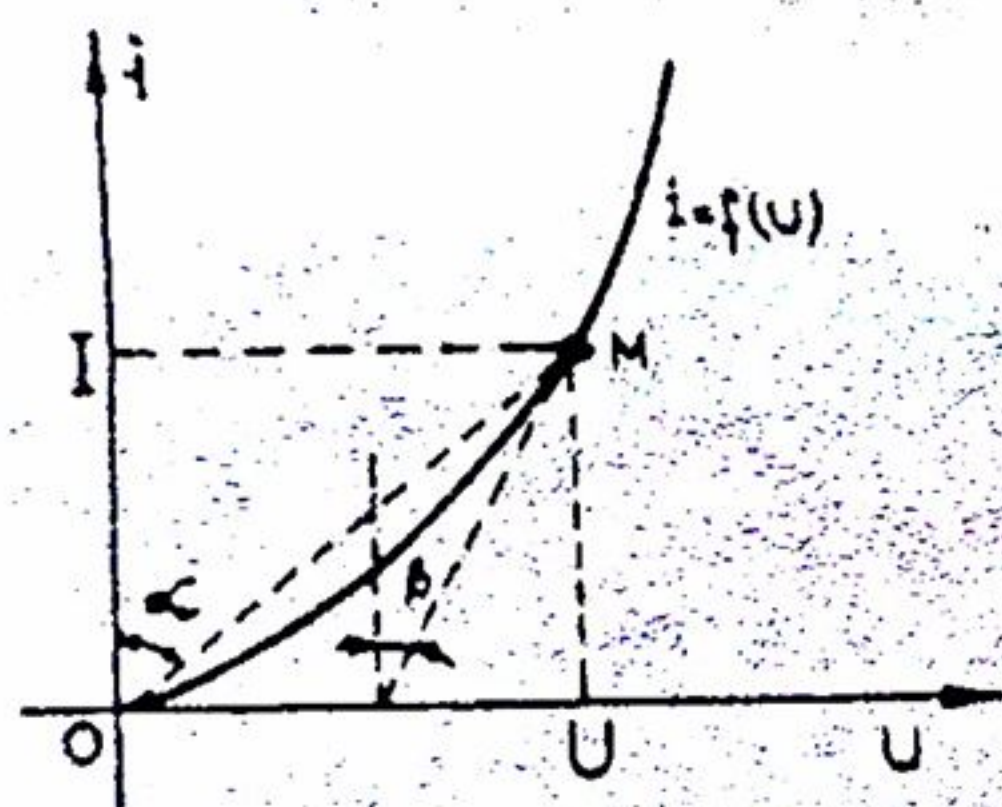


Fig. 3.21

$$R_s = \frac{U}{I} = k \tan \alpha; \quad (3.40)$$

$$R_d = \frac{dU}{dI} = k \tan \beta; \quad (3.41)$$

unde  $K$  are dimensiunea unei rezistențe și este o constantă de scară. Aceste relații permit interpretarea rezistenței statice ca fiind o mărime proporțională cu tangenta unghiului  $\alpha$  format de vectorul de poziție  $OM$  cu axa ordonatelor  $I$ , iar

rezistența dinamică ca fiind o mărime proporțională cu tangenta unghiului  $\beta$  format de dreapta tangentă la caracteristica neliniară (în punctul de funcționare  $M$ ) cu axa ordonatelor  $I$ . Rezistența statică a rezistoarelor neliniare este o mărime pozitivă dar rezistența dinamică poate fi uneori și negativă. În circuitele electrice care conțin rezistoare cu rezistență dinamică negativă (de exemplu arcul electric) se pot produce oscilații autoîntreținute.

În funcție de forma caracteristicii curent-tensiune, rezistoarele neliniare se clasifică în: rezistoare simetrice și rezistoare nesimetrice. Rezistoarele nesimetrice au bornele "polarizate" adică rezistența lor depinde și de sensul curentului.

### 3.3.1 Caracteristicile unor rezistoare neliniare

Lămpile cu incandescență sunt rezistoare neliniare simetrice; neliniaritatea caracteristicii se datorește faptului că rezistența filamentului se modifică odată cu



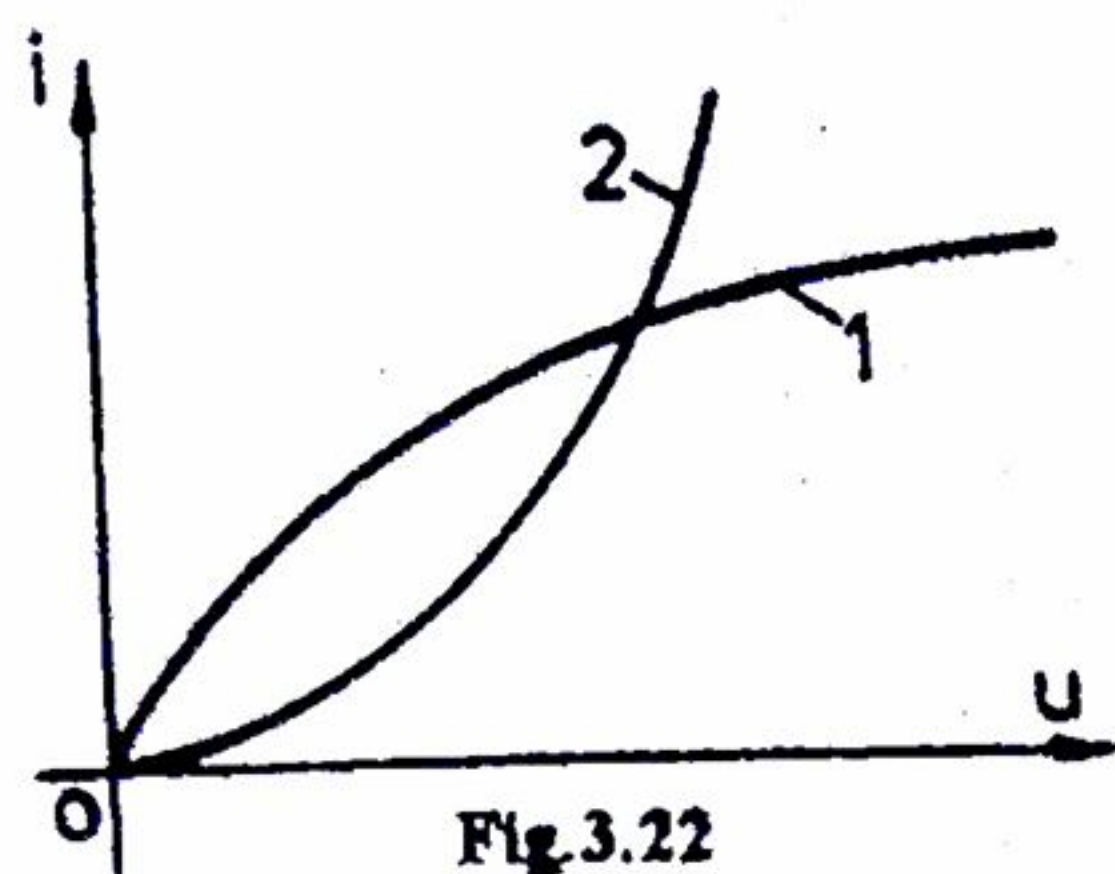


Fig. 3.22

modificarea temperaturii sale, dictată de curentul care trece prin filament (fig. 3.22). Lampa cu filament metalic (caracteristica 1) are coeficientul de temperatură pozitiv, iar lampa cu filament de cărbune (caracteristica 2) are coeficientul de temperatură negativ.

Aceste caracteristici se pot aproxima prin expresia:  $I = aU - bU^3$  (3.42) unde  $b > 0$  - pentru filamentul metalic și  $b < 0$  - pentru filamentul de cărbune.

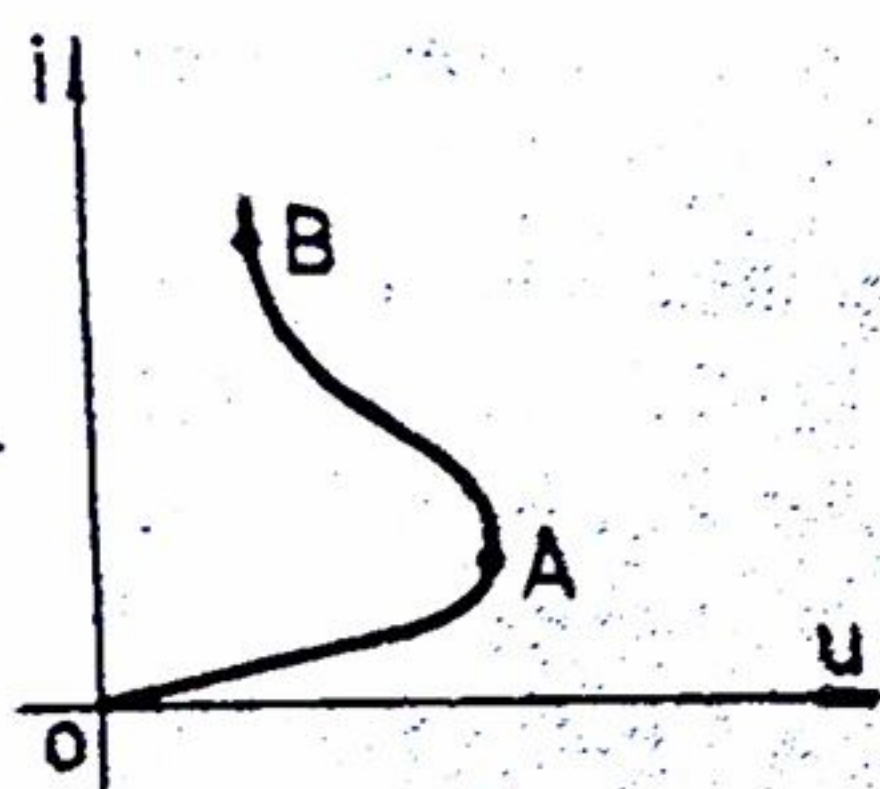


Fig. 3.23

Termistoarele sunt rezistoare neliniare simetrice, constituite dintr-un amestec de materiale semiconductoare de tipul oxizilor de fier, nichel, mangan etc. Caracteristica curent-tensiune a unui termistor seamănă cu cea a lămpii cu filament de cărbune. Pentru unele termistoare caracteristica prezintă o zonă pentru care rezistența dinamică este negativă (porțiunea A-B din fig. 3.23).

Varistoarele sunt rezistoare neliniare simetrice, obținute prin presarea la temperaturi ridicate a unui amestec de carbură de siliciu și grafit. Forma parabolică a caracteristicii (fig. 3.24) poate fi aproximată prin relația:

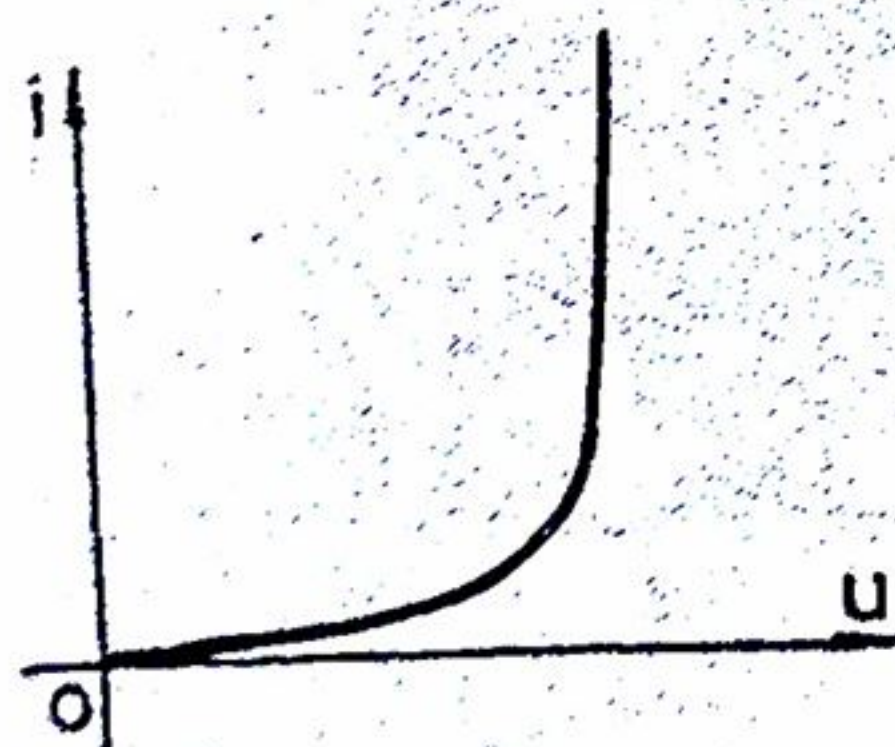


Fig. 3.24

$$I = aU^n; (n = 3,5 - 7). \quad (3.43)$$

Varistoarele sunt utilizate în practică în tehnica tensiunilor înalte, pentru protecția instalațiilor de înaltă tensiune (centrale, stații electrice, transforma-toare etc.) împotriva supratensiunilor.

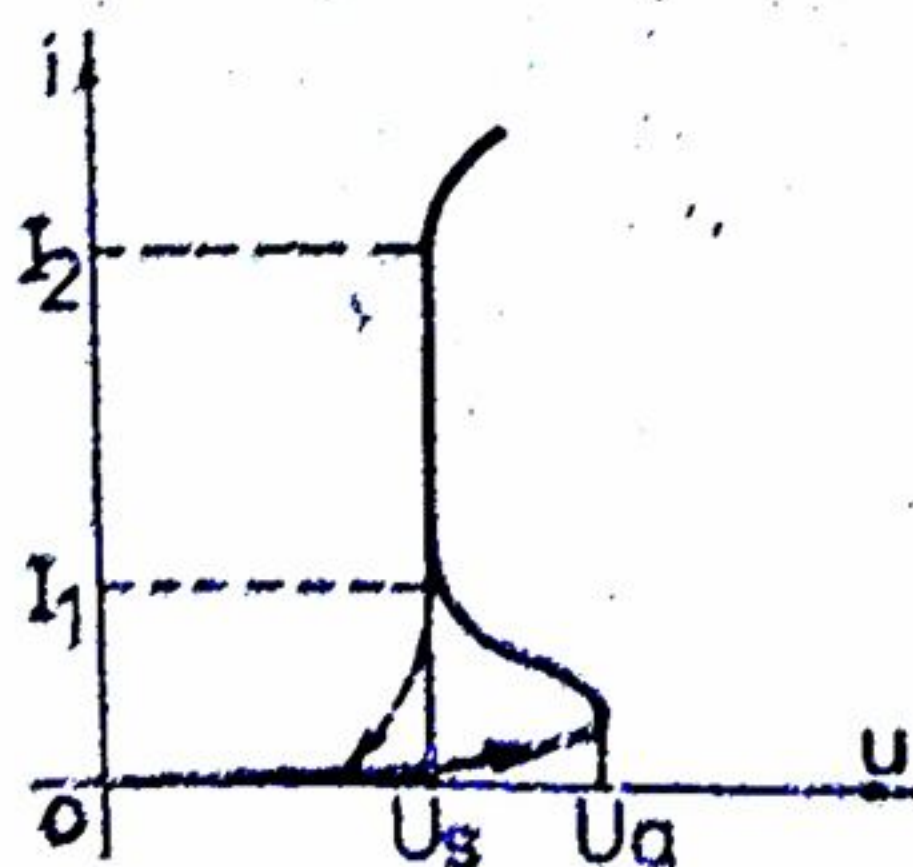


Fig. 3.25

Tubul cu descărcări luminescente (tub umplut cu neon sau cu un alt gaz inert la presiune scăzută) este un rezistor neliniar cu histeresis, având caracteristică simetrică față de origine dacă electrozii tubului sunt identici (fig. 3.25). Pentru a putea îndeplini funcția de "stabilizator de tensiune", tubul luminescent trebuie "aprins", adică trebuie aplicată la borne o tensiune  $U_s$  (de aprindere) mai mare decât tensiunea stabilizată  $U_1$ .



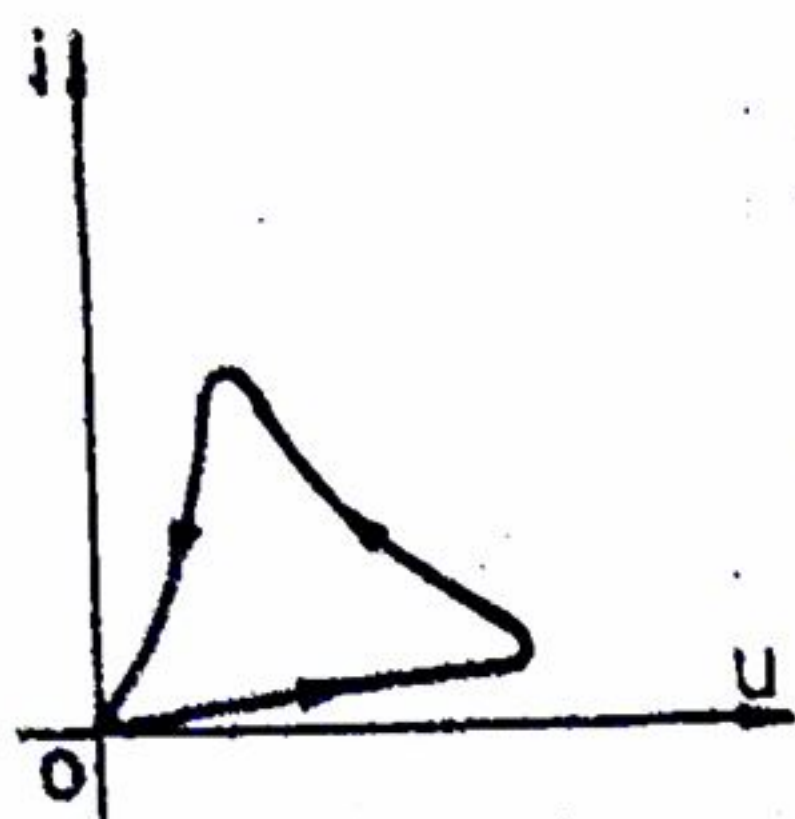


Fig. 3.26

Arcul electric între electrozi identici prezintă o caracteristică neliniară, simetrică, cu histerezis (fig. 3.26).

Diodele semiconductoare (cu siliciu, germaniu seleniu etc.) sunt rezistoare neliniare cu caracteristică nesimetrică, utilizate în principal pentru redresarea curenților alternativi. Caracteristica unei diode semiconductoare este dată în fig. 3.27 și are ecuația:

$$I = \frac{k}{2}(U + |U|), \quad (3.14)$$

valabilă atât pentru tensiuni pozitive, cât și pentru tensiuni negative aplicate la bornele diodei.

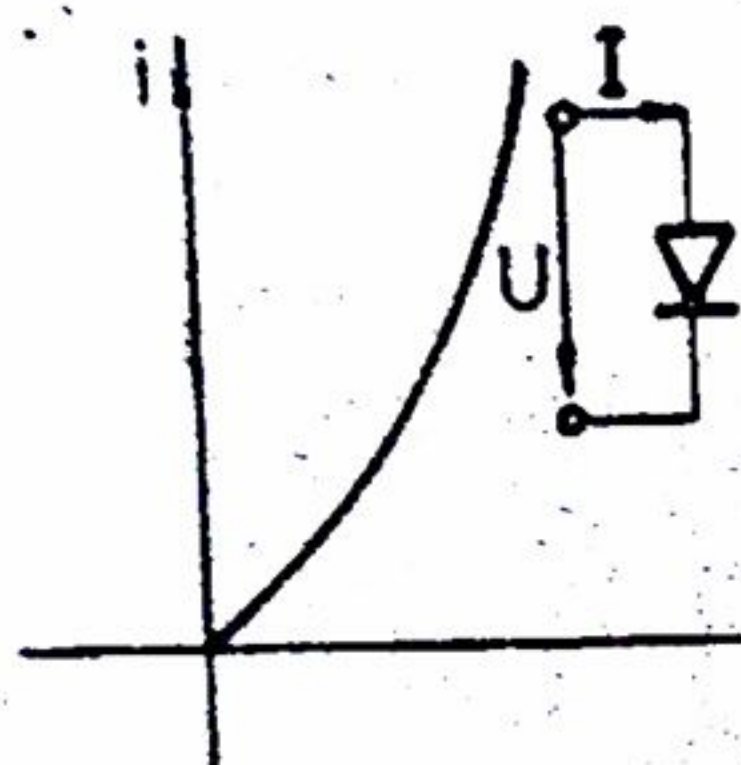


Fig. 3.27

Dioda Zener funcționează pe porțiunea din cadrul trei a caracteristicii, unde se pune în evidență un pronunțat palier în care tensiunea la bornele diodei se păstrează practic constantă în limite largi de variație a curentului prin diodă. Această diodă este utilizată în practică pentru stabilizarea tensiunii (la valoarea  $U_s$ ), (fig. 3.28).

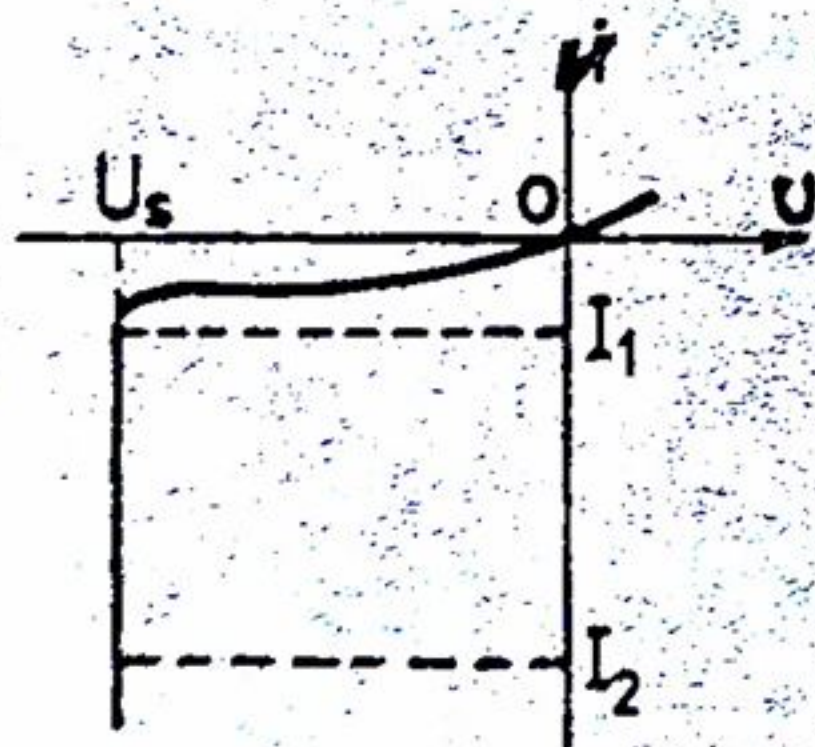


Fig. 3.28

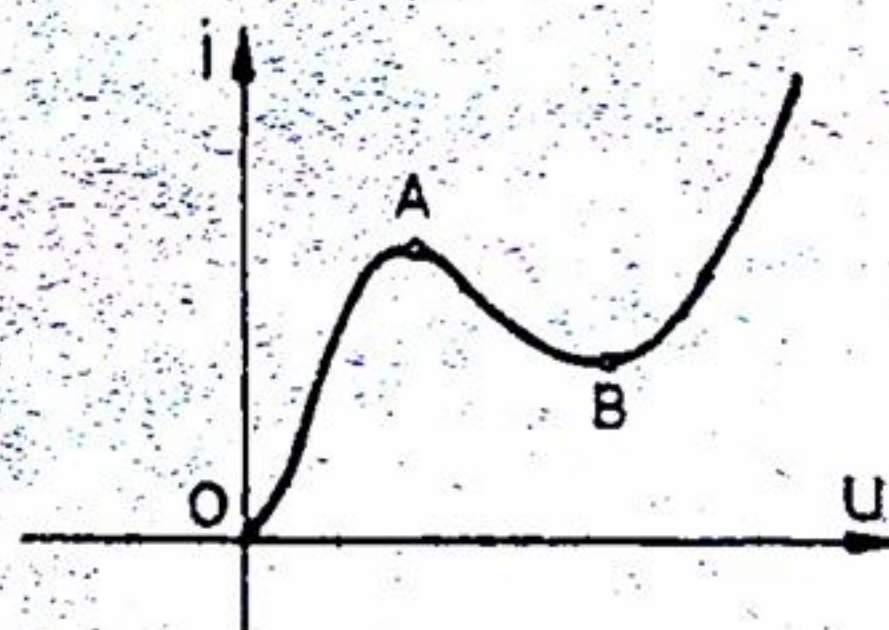


Fig. 3.29

Dioda tunel utilizată în tehnica frecvențelor înalte are caracteristica multiformă, prezentând o zonă în care rezistența dinamică a diodei este negativă. (A-B în fig. 3.29).

### 3.3.2 Relații utilizate în circuitele neliniare

Legea lui Ohm aplicată unei laturi de circuit care conține și un rezistor neliniar este:

$$E \pm U = RI + R_{\text{nl}}I, \quad (3.45)$$

unde  $R_{\text{nl}}$  reprezintă rezistența statică a rezistorului neliniar (dependentă de curent). Semnul (+) corespunde unei laturi receptoare (fig. 3.30 a.), iar semnul (-) corespunde unei laturi generatoare (fig. 3.30.b). Relația poate fi pusă și sub forma echivalentă:



$$E \pm U = RI + U_n, \quad (3.46)$$

unde  $U_n$  este căderea de tensiune la bornele rezistorului neliniar (dependentă de curent).

Legea lui Joule-Lenz aplicată unei laturi ce conține un rezistor neliniar (fig.3.30)

este:  $EI \pm UI = RI^2 + R_{sn}I^2, \quad (3.47)$

sau  $EI \pm UI = RI^2 + U_n I, \quad (3.48)$

unde:

$EI$  (pozitiv sau negativ) reprezintă puterea cedată sau absorbită de generator;

$UI$  (pozitiv sau negativ) - puterea absorbită sau cedată la bornele laturii;

$RI^2$  (nenegativ) - puterea absorbită de rezistorul liniar;

$R_{sn}I^2$  (nenegativ) - puterea absorbită de rezistorul neliniar.

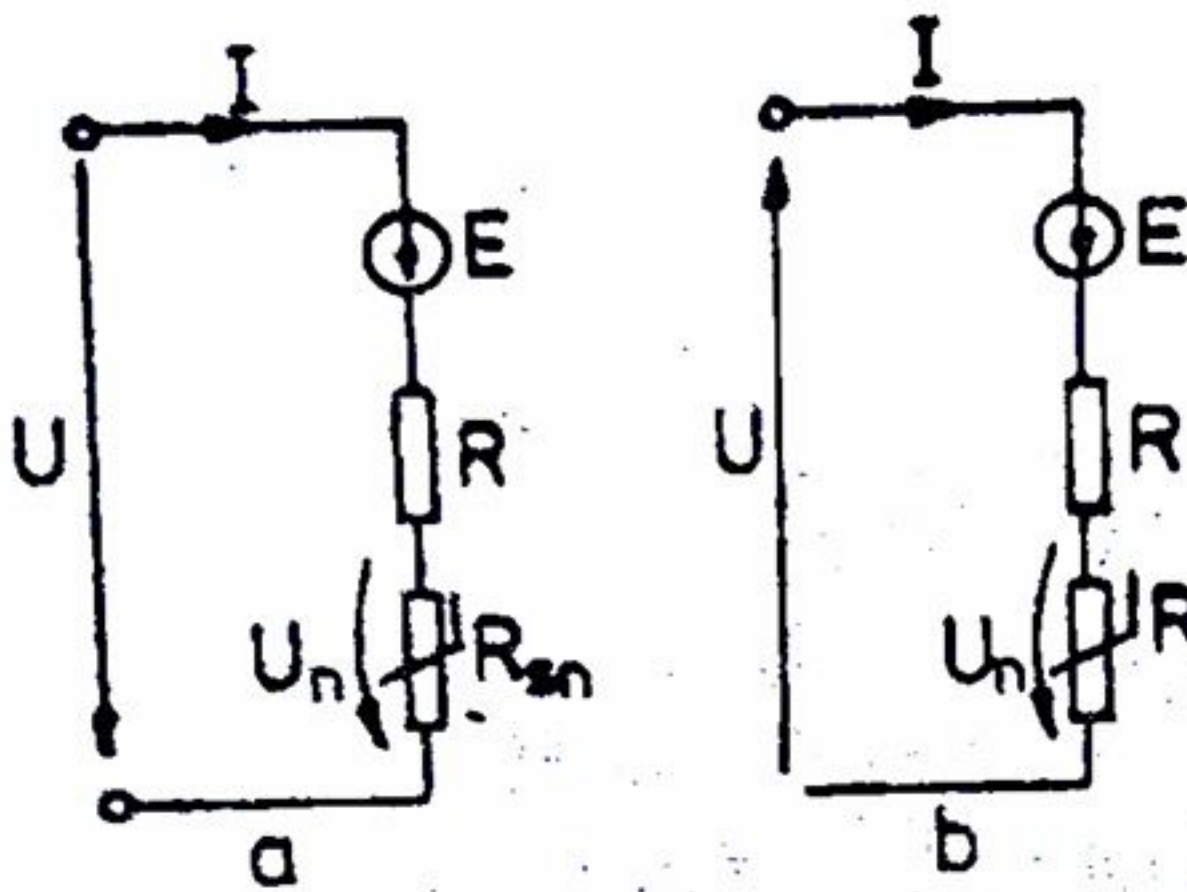


Fig.3.30

Teoremele lui Kirchhoff se scriu sub forma (fig.3.31 și 3.32):

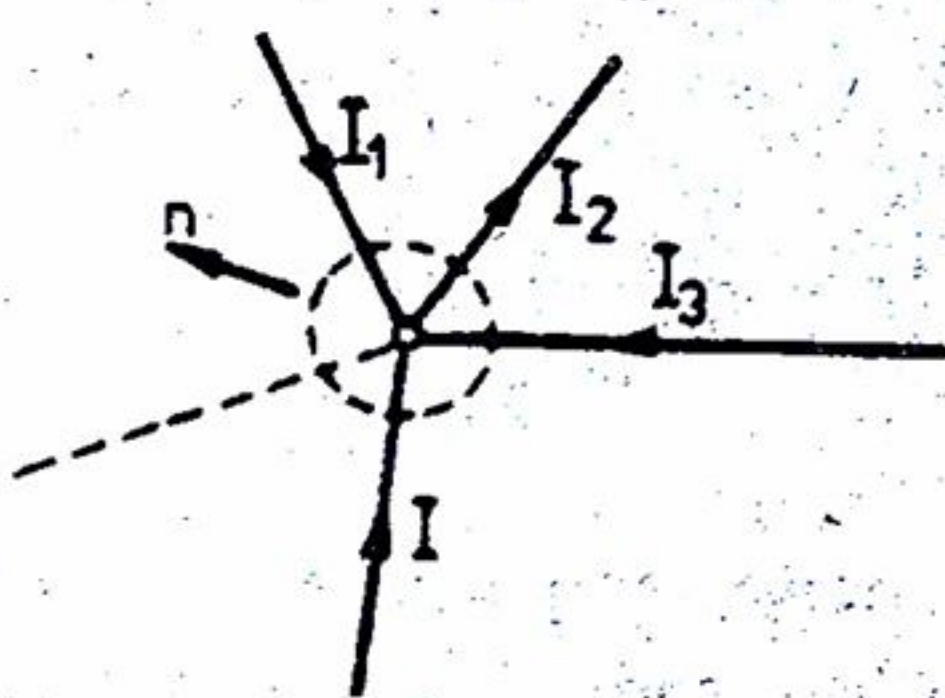


Fig.3.31

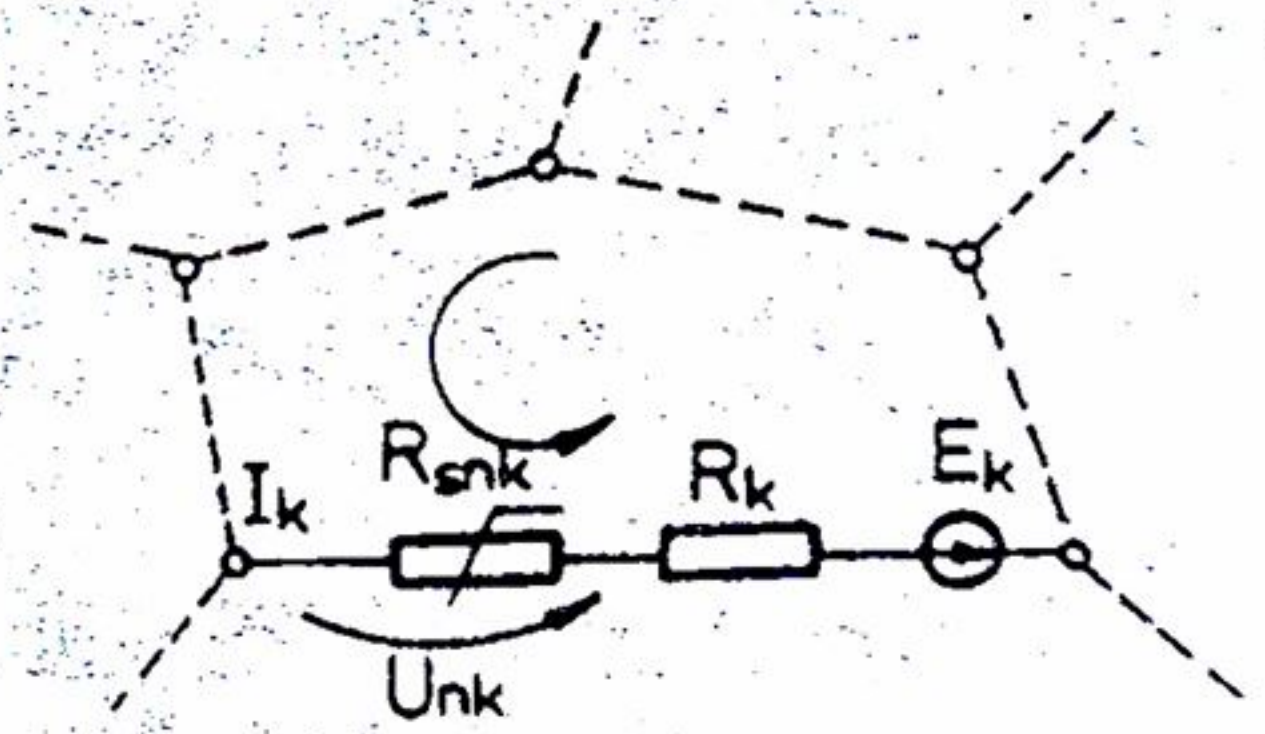


Fig.3.32

$$\sum I_k = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.49)$$

$$\sum E_k = \sum R_k I_k + \sum R_{snk} I_k \quad (k = 1, 2, \dots, L - N + 1) \quad (3.50)$$

Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente lent variabile se scriu pentru un circuit aflat într-o stare de referință caracterizată prin mărimile:  $E_{k0}$  (tensiunile electromotoare),  $U_{k0}$  (căderile de tensiune la bornele rezistoarelor neliniare) și  $I_{k0}$  (curenții din rezistoarele neliniare). Dacă există mici variații lente ale tensiunilor electromotoare  $dE_{k0}$ , atunci apar mici variații lente atât pentru căderile de tensiune  $dU_{k0}$  cât și pentru curenții  $dI_{k0}$ . În noua stare, tensiunile electromotoare vor fi  $E_k = E_{k0} + dE_{k0}$ , căderile de tensiune vor fi  $U_k = U_{k0} + dU_{k0}$ , iar curenții vor fi  $I_k = I_{k0} + dI_{k0}$ . Se poate arăta că:

$$\sum I_{k0} = 0, \quad (3.51)$$

$$\sum dE_{k0} = \sum dI_{k0} R_{dk0}, \quad (3.52)$$

care reprezintă teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente lent variabile. Aceste



teoreme scrise pentru variații mici în jurul unui punct de funcționare ( $E_k$ ,  $U_k$ ,  $I_k$ ) sunt identice cu cele, de la circuitele liniare cu observația că în acest caz apar rezistențele dinamice ale elementelor neliniare.

Teoremele generatorului echivalent (de tensiune și de curent) se pot aplica circuitele neliniare care conțin rezistoare neliniare numai pe o singură latură. Latura cu rezistoare neliniare se separă între bornele A-B (fig.3.33). Circuitul incomplet (în stânga bornelor A-B) constituie un dipol linear activ, căruia i se poate atașa o schemă echivalentă cu generator de tensiune sau cu generator de curent (fig.3.33.b și c).

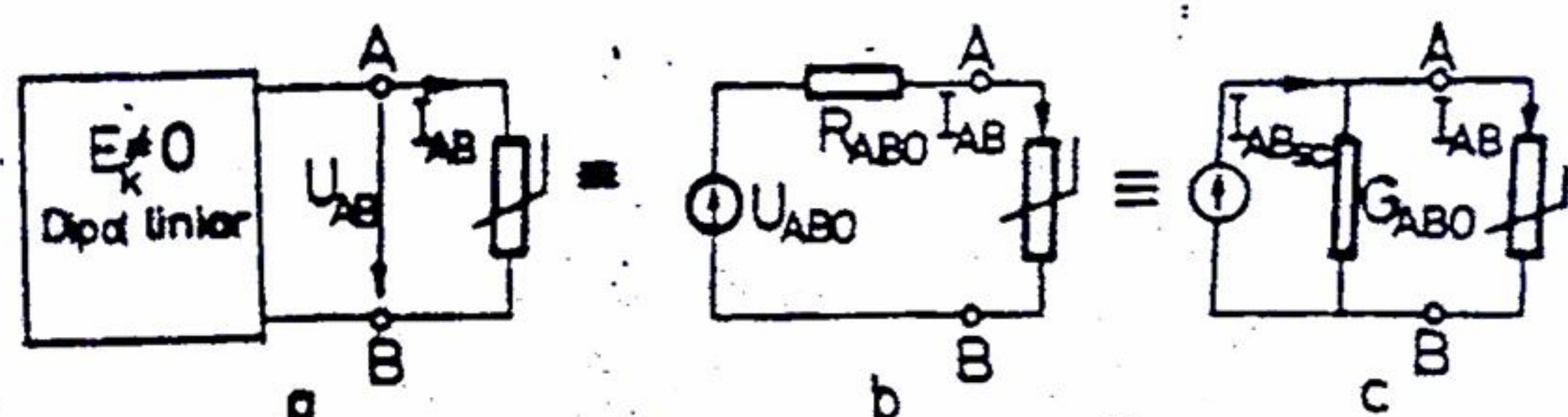


Fig.3.33

În schemele echivalente,  $U_{ABO}$  reprezintă tensiunea la bornele AB când latura cu rezistor neliniar este întreruptă;  $R_{ABO}$  - rezistența rețelei liniare (în stânga bornelor AB) când sursele sunt pasivizate și latura cu rezistor neliniar este întreruptă;  $I_{ABsc}$  curentul de scurtcircuit între bornele AB ( $I_{ABsc} = \frac{U_{ABO}}{R_{ABO}}$ ), iar  $G = \frac{1}{R_{ABO}}$ . Se pot folosi relațiile (3.37) și (3.38).

Transferul de putere prin rezistoare neliniare. Se consideră un circuit în care sursa E transferă puterea rezistorului linear  $R$ , prin intermediul rezistorului neliniar cunoscut prin caracteristica sa  $U_n(I)$  - fig.3.34, în care :  $RI^2 = EI - U_n I$ , (3.53) unde  $RI^2 = P_2$  reprezintă puterea consumată de receptor. Pentru ca această putere să fie maximă, este necesară condiția :

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = (E - U_n) - I \frac{\partial U_n}{\partial I} = 0, \quad (3.54)$$

Din teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă  $E - U_n = RI$ , apoi conform definiției,  $\frac{\partial U_n}{\partial I}$  reprezintă rezistența dinamică  $R_d$  a rezistorului neliniar.

Rezultă:

$$R = R_d \quad (3.55)$$

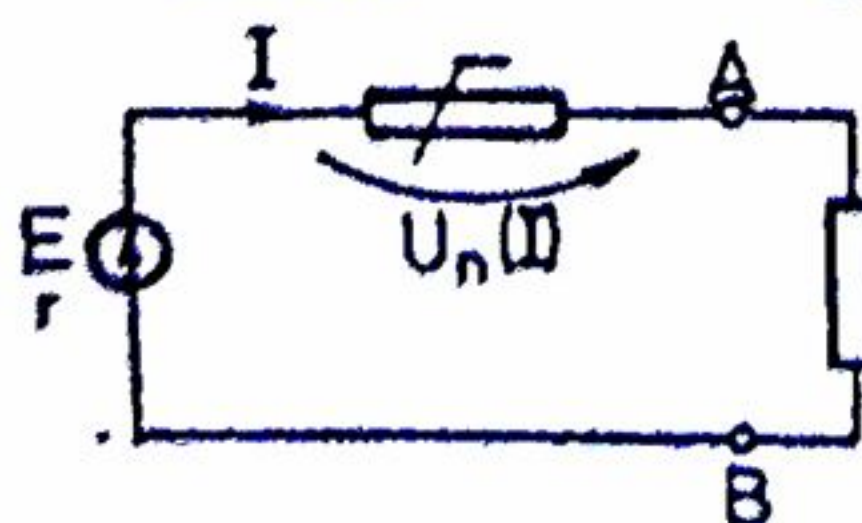


Fig.3.34

Deci, pentru circuitul din fig.3.34 se produce un transfer maxim de putere de la sursa E la rezistorul linear  $R$ , dacă rezistența receptorului  $R$  este egală cu rezistența dinamică  $R_d$  a rezistorului neliniar prin care are loc transferul de putere (considerând  $r = 0$ , sau  $r$  inclus în  $R$ ).



### 3.3.3 Scheme echivalente ale C.N.

Conectarea în serie a două rezistoare neliniare este echivalentă cu un singur rezistor neliniar (fig.3.45).

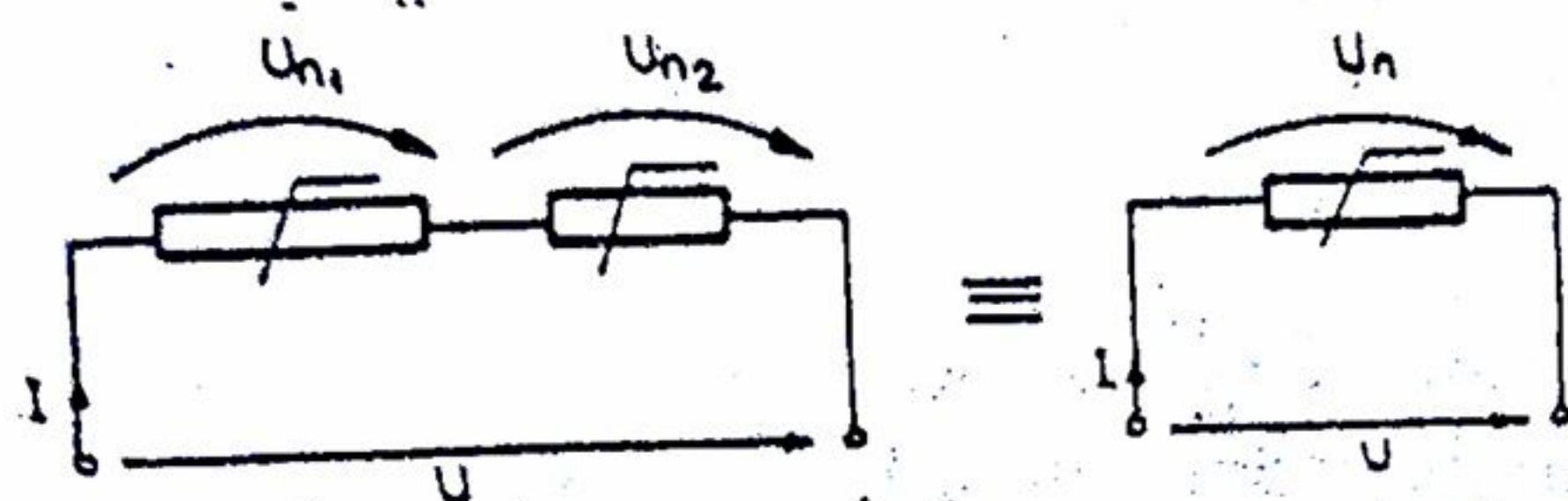


Fig.3.35

date grafic caracteristicile celor două rezistoare neliniare, sub formă  $U_{n1} = f_1(I)$  și  $U_{n2} = f_2(I)$ , (fig.3.41) rezultă:  $U = U_{n1} + U_{n2}$ , (3.56)

valabilă pentru orice valoare a curentului din circuit. Alegând o valoare arbitrară a curentului din circuit  $I$  (același pentru ambele rezistoare neliniare, deoarece ele sunt conectate în serie), se determină din caracteristici căderile de tensiune  $U'_{n1}$  și  $U'_{n2}$  la bornele celor două rezistoare neliniare. Se obține tensiunea la borne:  $U' = U'_{n1} + U'_{n2}$ , adică în grafic se obține punctul de coordonate  $(I, U')$ . Procedând în mod analog pentru mai multe valori ale curentului ( $I', I''$  etc) se obțin valorile corespunzătoare ale tensiunii la borne ( $U', U''$  etc.). Unind punctele obținute (perechile de valori  $I', U'$ ;  $I'', U''$ ; etc) se determină caracteristica  $U=f(I)$  care reprezintă tocmai caracteristica rezistorului neliniar echivalent.

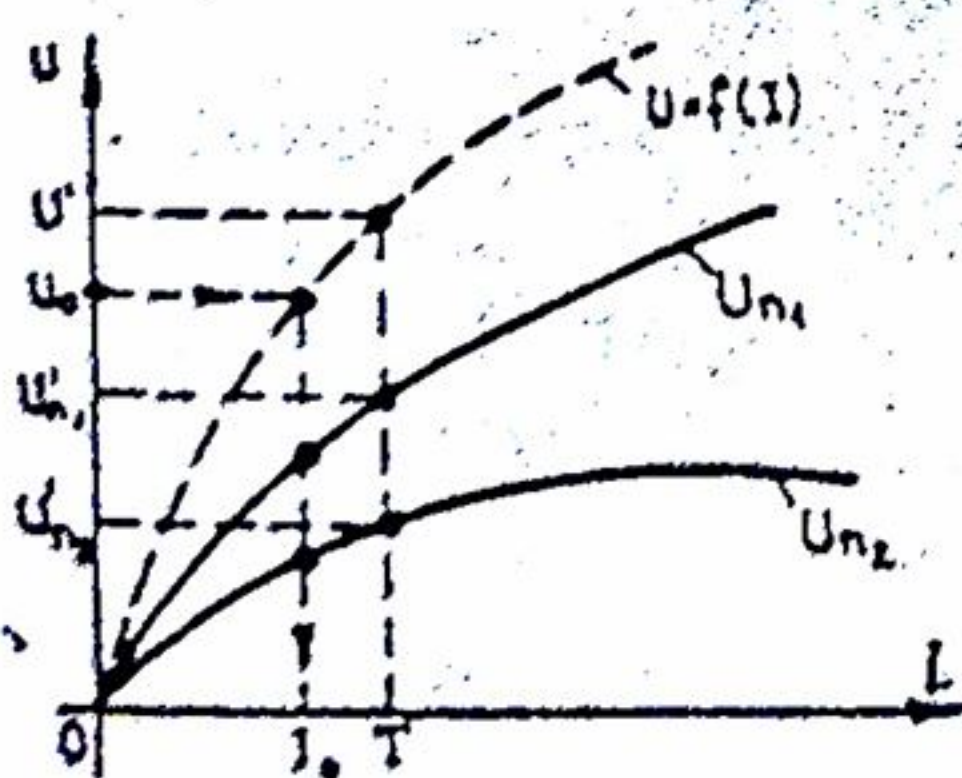


Fig.3.36

Dacă se cere rezolvarea circuitului din fig.3.35, când la bornele sale este aplicată tensiunea  $U_n$ , atunci în prealabil se determină grafic (fig.3.36) caracteristica echivalentă  $U=f(I)$ , din care rezultă curentul  $I_0$  și căderile de tensiune pe cele două rezistoare, așa cum se indică prin săgețile din figură. Un circuit neliniar compus dintr-un rezistor neliniar dat prin caracteristica sa  $U_n(I)$ , conectat în serie cu un rezistor liniar  $R$  și alimentat de la sursa  $E$  (fig.3.37.a)

poate fi rezolvat grafic fără a fi nevoie de a determina caracteristica echivalentă conectării în serie a celor două rezistoare. Pentru aceasta se aplică legea lui Ohm (relația 3.48), obținându-se ecuația circuitului:  $E - RI = U_n$  (3.57)

Rezolvarea grafică a ecuației (3.57) este dată în fig.3.57.b.

Se construiește dreapta  $U = E - RI$ , având tăieturile pe cele două axe egale cu  $E/R$  și respectiv  $E$  ( $\tan \alpha = R$ ) intersecția acestei drepte cu caracteristica neliniară  $U_n(I)$  reprezintă soluția ecuației (3.57). Abscisa punctului  $M$  de intersecție este curentul  $I$  din



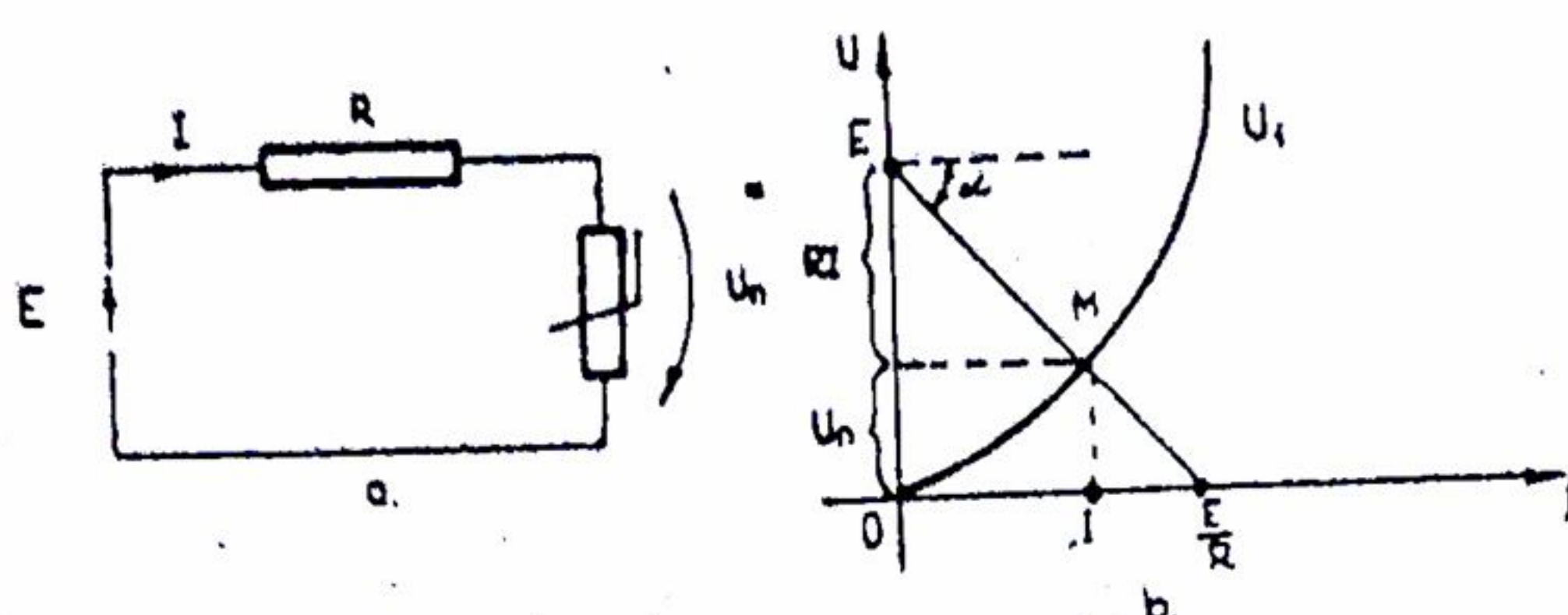


Fig. 3.37

Conectarea în paralel a doua rezistoare neliniare este echivalentă cu un singur rezistor neliniar (fig. 3.38). Caracteristica rezistorului neliniar echivalent se poate determina cunoscând caracteristicile parțiale  $I_{n1} = f_1(U)$  și  $I_{n2} = f_2(U)$  ale celor două rezistoare neliniare (fig. 3.39). Se aplică teorema întâi a lui Kirchhoff valabilă pentru orice valoare a tensiunii la borne :

$$I = I_{n1} + I_{n2} \quad (3.58)$$

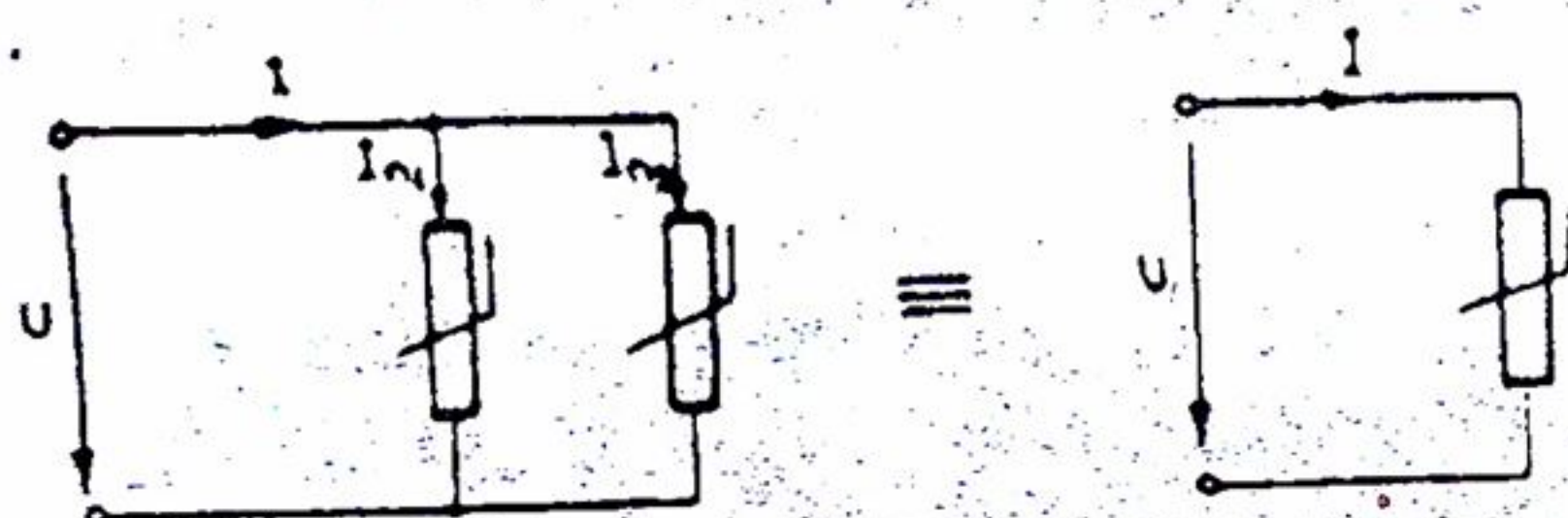


Fig. 3.38

Alegând o valoare arbitrară a tensiunii la borne  $U'$  (aceeași pentru ambele rezistoare neliniare, deoarece sunt conectate în paralel), se obțin din grafic curenții  $I'_{n1}$  și  $I'_{n2}$  în cele două rezistoare. Se obține curentul prin rezistorul echivalent  $I' = I'_{n1} + I'_{n2}$ .

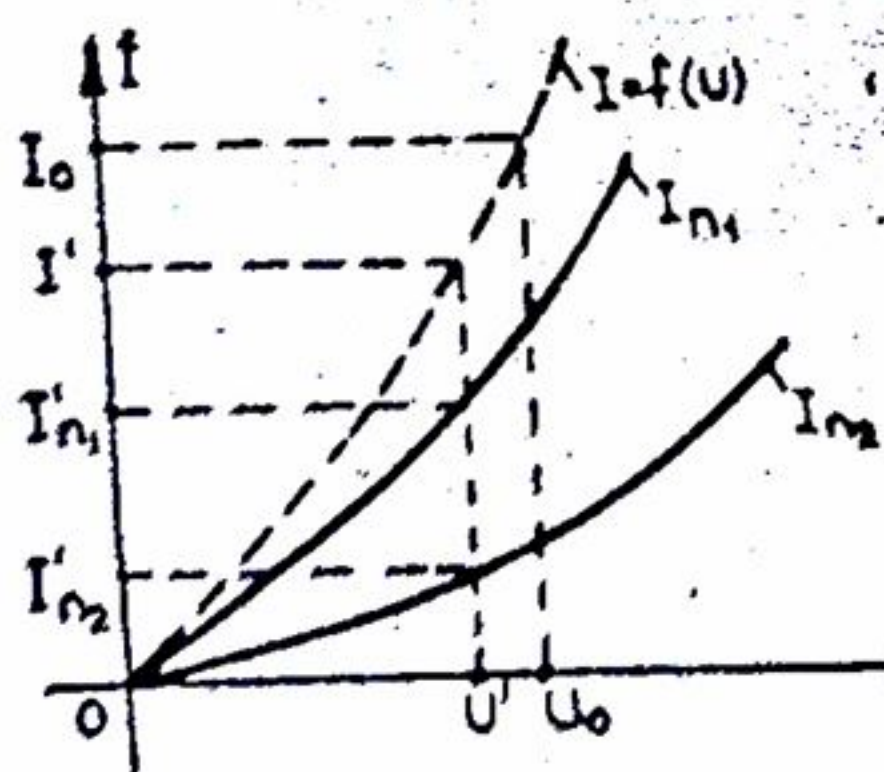


Fig. 3.39

echivalentă  $I = f(U)$  și coordonatele punctelor de intersecție ale dreptei  $U = U_0$  cu caracteristicile  $I_{n1}$ ,  $I_{n2}$  și  $I = f(U)$  reprezintă curenții din cele două rezistoare și respectiv curentul absorbit de la sursă.

Conectarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă este echivalentă cu un rezistor neliniar (fig. 3.40). Presupunând cunoscută grafic caracteristica neliniară a rezistorului



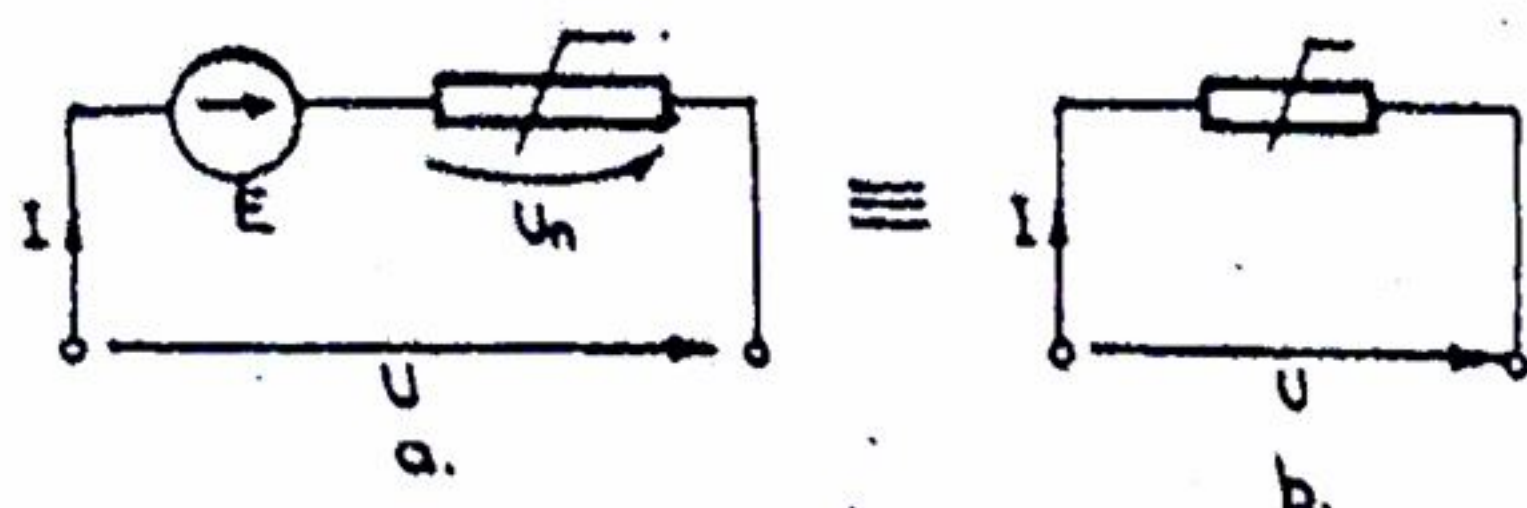


Fig. 3.40

$U_n = f_1(I)$  cât și valoarea t.e.m. a sursei  $E$ , se aplică legea lui Ohm:

$$U = U_n - E \quad (3.59)$$

obținându-se caracteristica rezistorului neliniar echivalent,  $U = f_2(I) = f_1(I) - E$ , adică grafic se translatează caracteristica

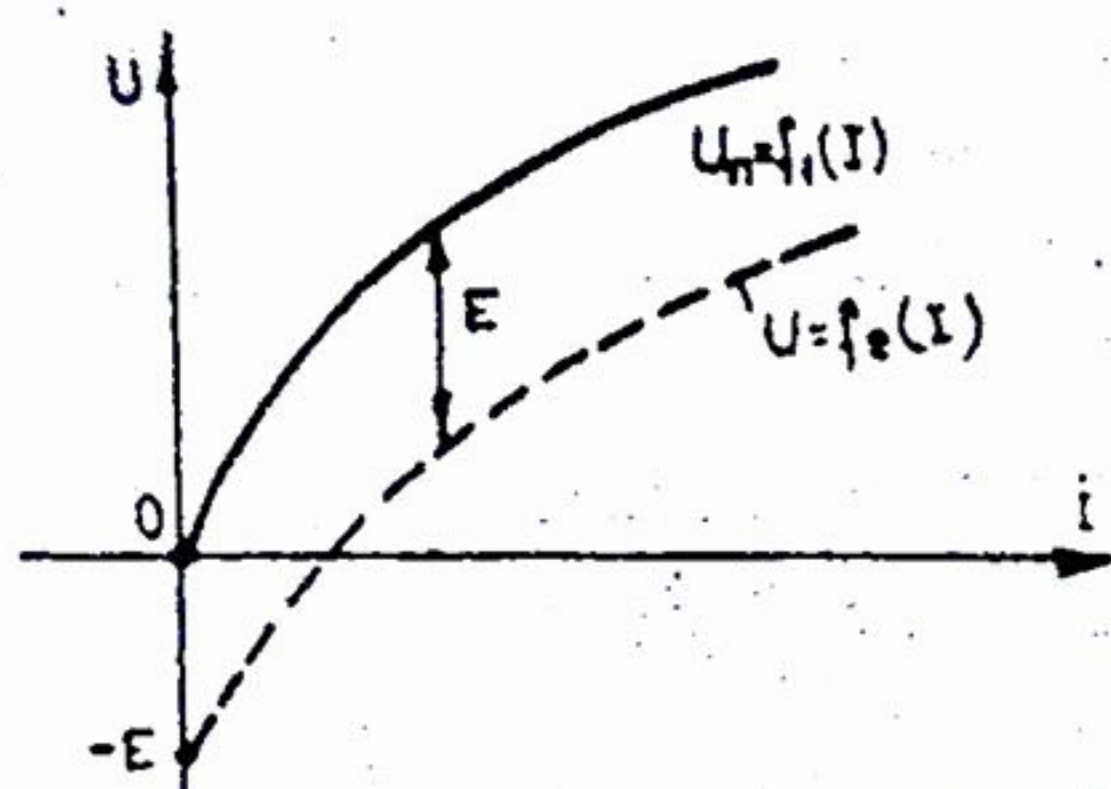


Fig. 3.41

inițială  $U_n = f_1(I)$  cu cantitatea  $(-E)$ , așa cum se arată în fig. 3.40. Dacă sursa de t.e.m. (fig. 3.40) are sens contrar curentului din circuit, translația caracteristicii are loc cu cantitatea  $(+E)$ .

Din fig. 3.40 și 3.41 rezultă că orice rezistor neliniar care are o caracteristică ce nu trece prin origine poate fi înlocuit cu un rezistor neliniar având caracteristica ce trece prin origine conectat în serie cu o sursă.

### 3.3.4 Calculul C.N.

Dacă se cunosc caracteristicile rezistoarelor neliniare date sub forma grafică, este comod să se rezolve circuitul neliniar prin procedee grafice. Procedeele analitice de rezolvare a circuitelor neliniare, deși au uneori un grad mare de exactitate, necesită un volum mai mare de calcule, iar aceste procedee devin complicate atunci când funcția de aproximare a caracteristicii neliniare este un polinom cu gradul mai mare decât doi sau este o funcție transcendentă. Ca metode de calcul se pot folosi: metoda grafo-analitică, metoda liniarizării precum și metode de iterație, sau metode combinate.

#### Aplicații.

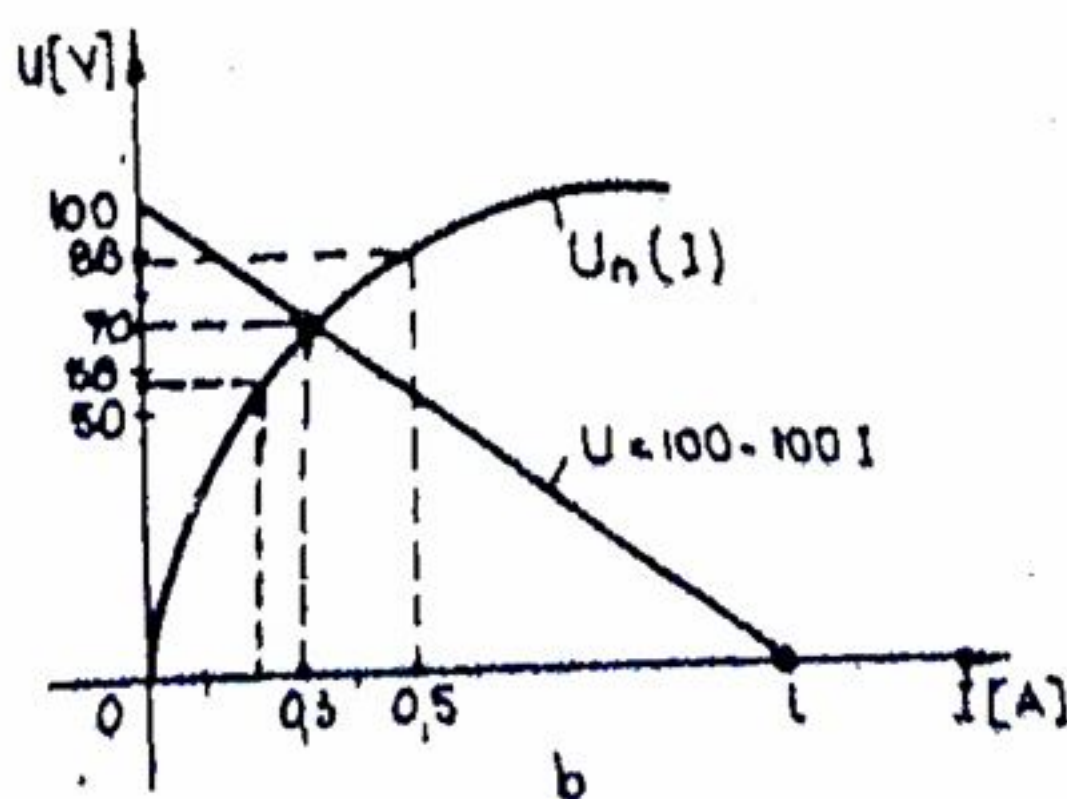
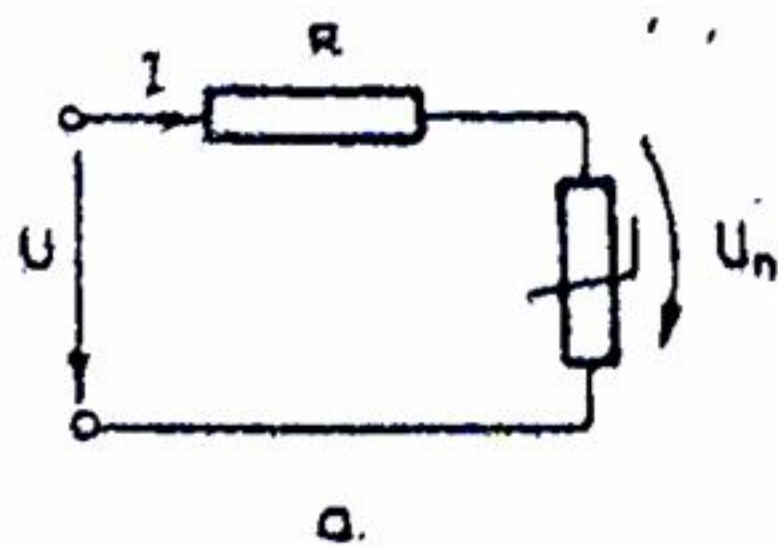


Fig. 3.42

1) Circuitul neliniar din fig. 3.42.a, constituit dintr-un rezistor liniar cu rezistența  $R = 100 \Omega$  conectat în serie cu un rezistor neliniar având caracteristica dată grafic în figura 3.42.b, este alimentat la o tensiune



$U = 100V$ . Se cere curentul din circuit și căderile de tensiune la bornele celor două rezistoare.

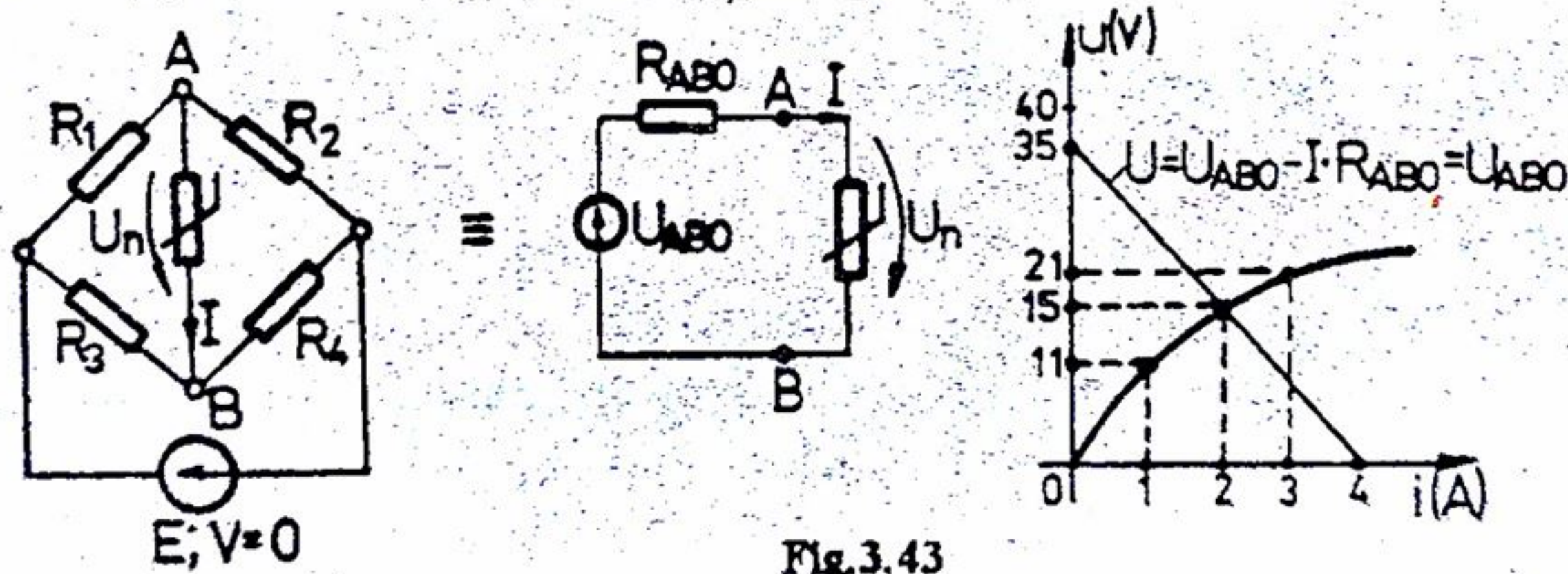
Rezolvarea problemei se face grafic utilizând procedeul expus în paragraful 3.3.3. Pentru aceasta, scriind ecuația circuitului  $U = RI + U_n$ , cu valorile numerice ale problemei rezultă  $U_n = 100 - 100I$ . Se construiește prin tăieturi dreapta  $U = 100 - 100I$  care intersectată cu caracteristica neliniară  $U(I)$  determină punctul de funcționare M al circuitului. Din grafic rezultă :  $I = 0,3A$ ,  $U_n = 70V$  și  $RI = 30V$ .

2) Un rezistor neliniar având caracteristica dată sub forma analitică,  $U = 100I^3 V$ , este conectat în serie cu un rezistor liniar având rezistența  $R = 100\Omega$ . Circuitul fiind alimentat la tensiunea  $U = 100V$ , se cere să se determine curentul din circuit și căderile de tensiune la bornele rezistoarelor.

Aplicând legea lui Ohm, rezultă relația  $U = RI + U_n$ , care , numeric devine:  $100 = 100I + 100I^3$ . Soluția acestei ecuații este  $I = 0,69A$ . Căderile de tensiune vor fi:  $RI = 69V$  și  $U_n = 31V$ .

3. În diagonala punții din fig.3.43.a, se află un rezistor neliniar a cărei caracteristică  $U_n(I)$  este dată grafic în figura 3.43.c. Rezistoarele liniare au rezistențele:  $R_1 = R_2 = 10\Omega$ ;  $R_3 = R_4 = 5\Omega$ . Alimentând puntea de la sursa cu t.e.m.  $E = 140V$  se cere curentul prin rezistorul neliniar și tensiunea la bornele acestuia.

Se separă latura neliniară între bornele A-B, și conform teoremei generatorului echivalent de tensiune se obține schema din fig.3.43.b.



- Se deschide latura A-B și :

$$I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}; I_3 = I_4 = \frac{E}{R_3 + R_4}; U_{ABO} = R_3 I_3 - R_1 I_1.$$

- Rezultă :  $U_{ABO} = E \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = 35V;$

$$R_{ABO} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{175}{20} \Omega.$$

Cu aceste valori, rezolvarea grafică a problemei este indicată în fig.3.43 (vezi și exemplul 1). Din grafic rezultă curentul prin rezistorul neliniar,  $I = 2A$  și tensiunea la bornele lui,  $U_n = 17,5V$ .



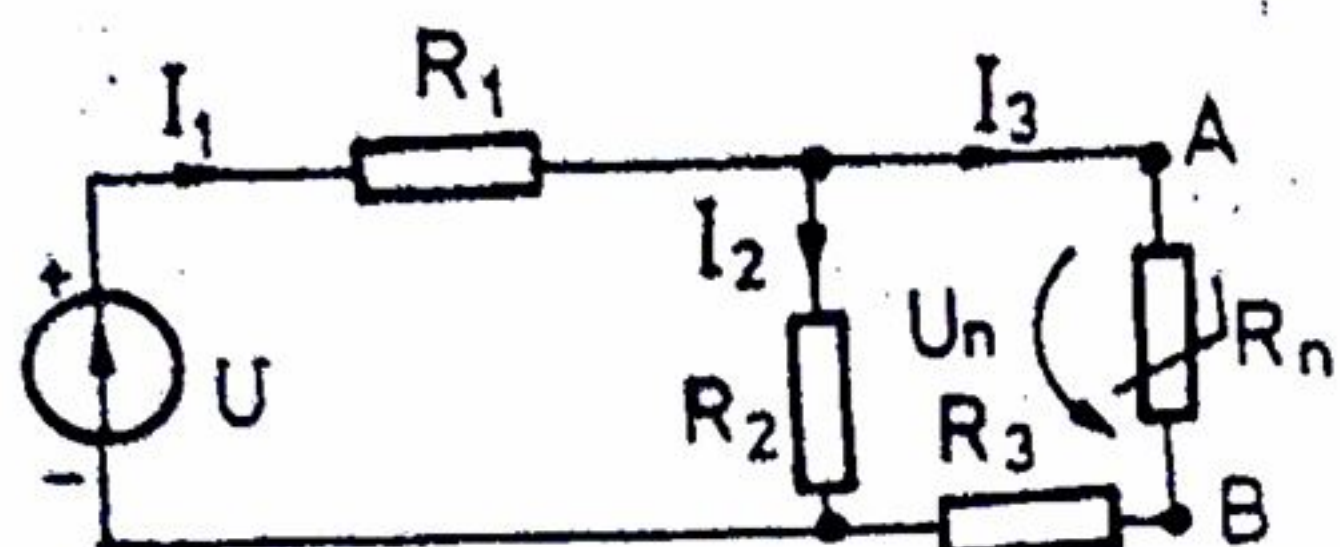


Fig. 3.44

puterilor. b) Să se afle curenții din circuit, pe cale analitică, utilizând metoda liniarității cu ajutorul rezistenței dinamice  $R_d$ .

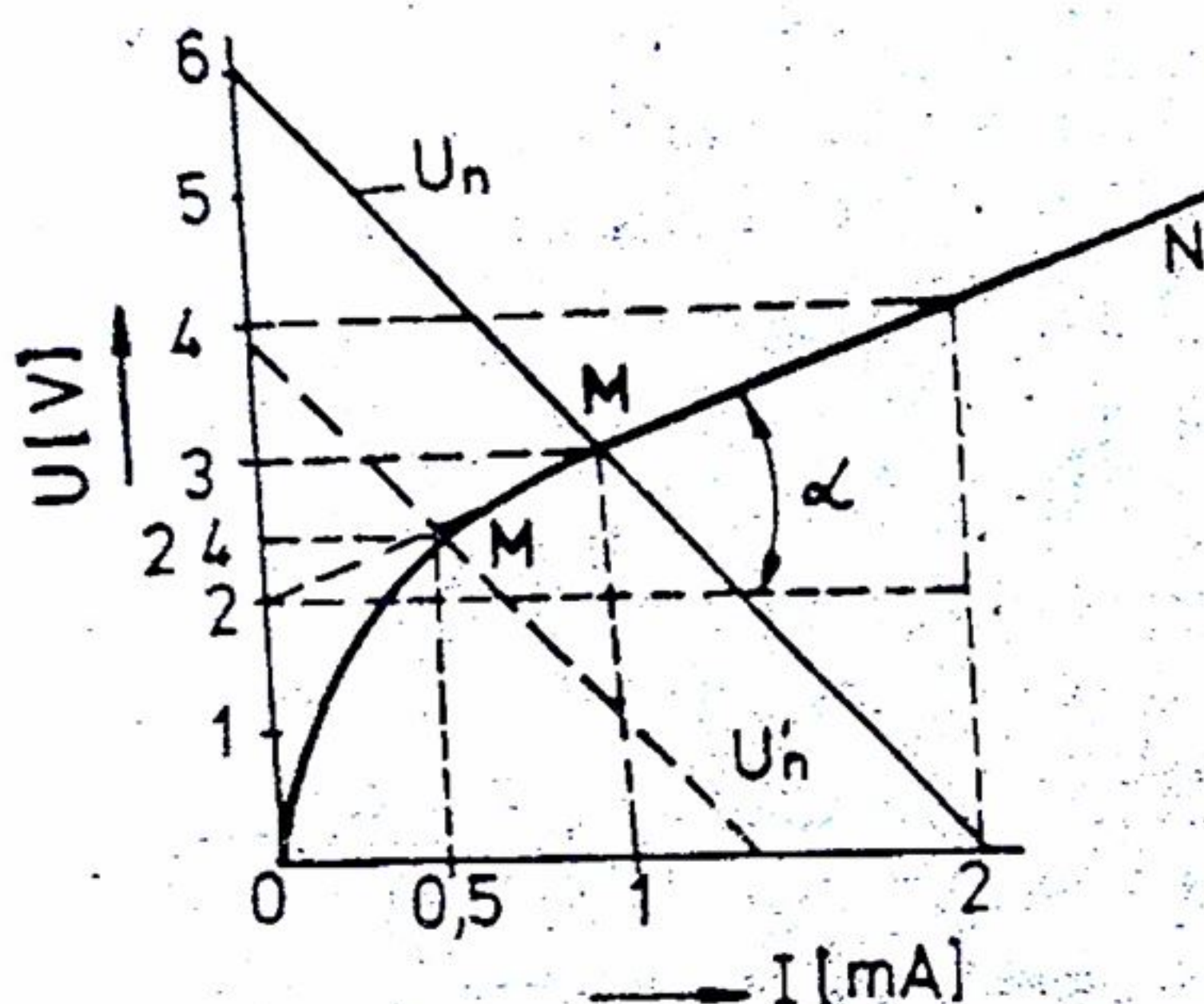


Fig. 3.45

$U_n = U_{ABO} - R_{ABO}I_3 = 6 - 3I_3$ , adică, o dreaptă reprezentată în fig. 3.45 a cărei intersecție (în M) cu caracteristica O-M-N, stabilește valorile coordonatelor punctului de funcționare M:  $U_n = 3V$  și  $I_3 = 1mA$ . Rezultă și celelalte mărimi:

$$R_n = \frac{U_n}{I_3} = 3k\Omega, I_2 = \frac{I_3(R_3 + R_n)}{R_2} = 1mA; I_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_n)}{R_2 + R_3 + R_n}} = 2mA.$$

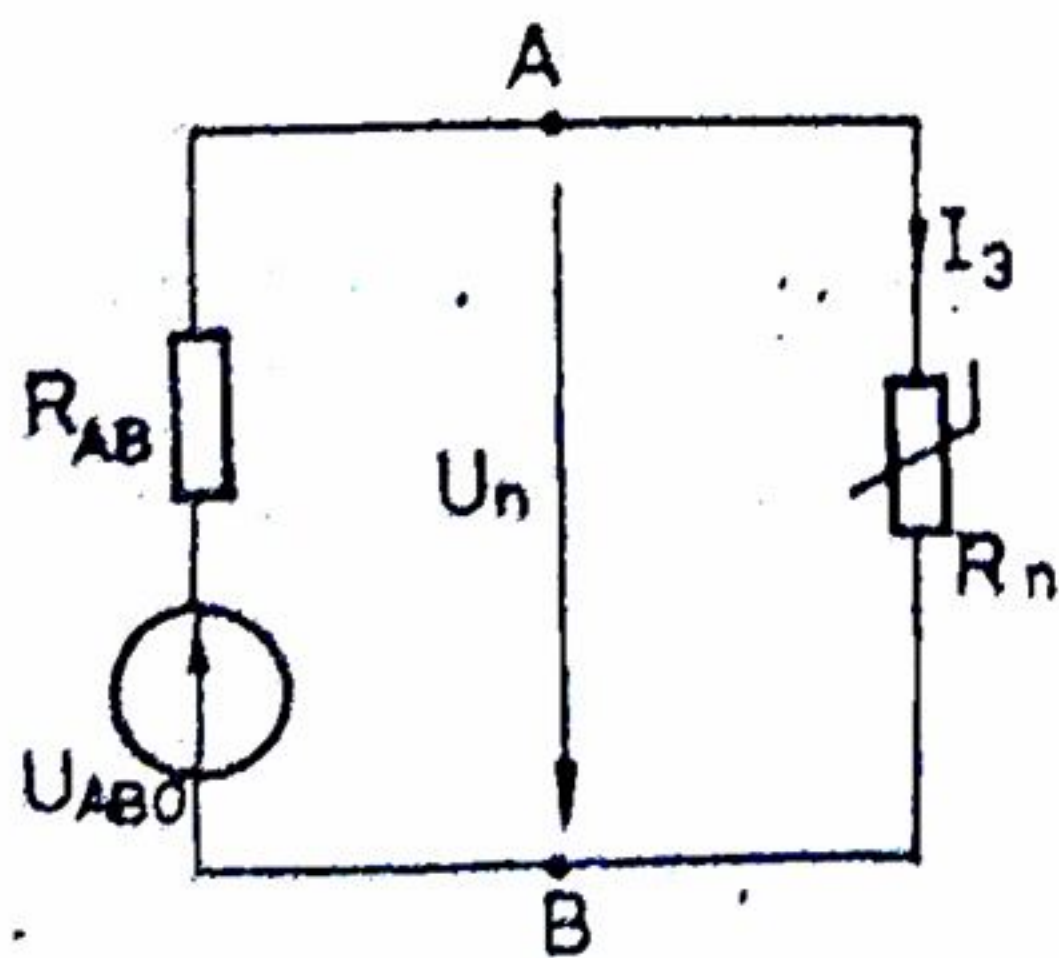


Fig. 3.46

4. În circuitul din fig. 3.44 se cunosc  $R_1 = R_2 = 4\Omega$ ,  $R_3 = 1k\Omega$ , iar rezistorul neliniar are caracteristica tensiune-curent în fig. 3.45 (curba O-M-N). Tensiunea la bornele circuitului este  $U = 12V$ . a) Să se determine curenții din circuit și să se efectueze bilanțul

Rezolvare a) Se folosește metoda generatorului de tensiune echivalent, în care:  $R_{ABO} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3k\Omega$ ;

$$U_{ABO} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6V$$

Din relația Thévenin:  $I_3 = \frac{U_{ABO}}{R_n + R_{ABO}}$ , rezultă:  $R_n I_3 + R_{ABO} I_3 = U_{ABO}$ , în care se recunoaște  $R_n I_3 = U_n$ , deci:

Ca verificare, se constată:  $I_1 = I_2 + I_3$ . Deoarece  $R_n = R_{ABO}$ , analiza puterilor ne indică un transfer maxim de putere pe  $R_n$  (fig. 3.46):

$$P_g = U_{ABO} I_3 = 6mW;$$

$$P_n = R_n I_3^2 = U_n I_3 = 3mW \text{ la un randament:}$$

$$\eta = \frac{P_n}{P_g} = \frac{R_n}{R_n + R_{ABO}} = 0.5.$$

În general, pentru circuitul din fig. 3.44, bilanțul puterilor este:  $P_g = UI_1 = 24mW$ .



$$P_R = R_1 I_1^2 - R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + U_n I_3 = 24 \text{ mW}, \text{ adică se verifică : } P = P_g = P_R = \sum_{i=1}^{3+1} R_i I_i^2$$

b) Din examinarea caracteristicii de funcționare (fig.3.45) rezultă că în jurul punctului de funcționare M, se poate scrie ecuația dreptei M-N, care are ordonata la origine  $U_0 = 2\text{V}$  și coeficientul unghiular :  $\text{tg}\alpha = \frac{2\text{V}}{2\text{mA}}$ , adică (cu  $U_{MN} = U_{AB} = U'_n$

din fig.3.47) :  $U'_n = U_0 + R_d I_3 = 2 + 10^3 I_3$ .

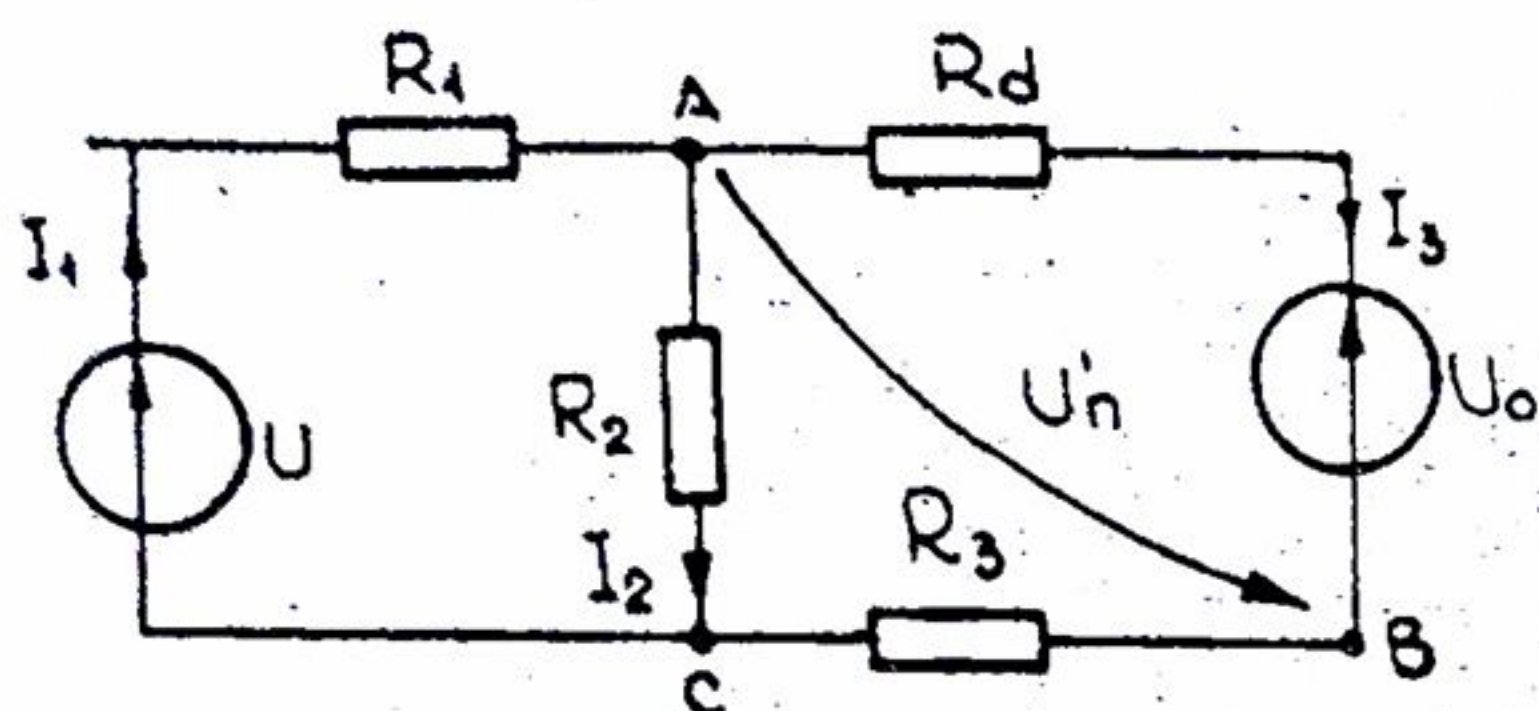


Fig.3.47

În fig.3.47 se prezintă schema echivalentă a circuitului liniarizat, în care  $R_d = \text{tg}\alpha = 10^3 \Omega$ . Cu metoda tensiunii între noduri, rezultă

$$U_{AC} = \frac{\frac{U}{R_1} + \frac{U_0}{R_3 + R_d}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_d}}$$

$$\text{deci : } I_1 = \frac{U - U_{AC}}{R_1} = 2 \text{ mA}; \quad -I_3 = \frac{0 - U_{AC}}{R_3 + R_d} = -1 \text{ mA}; \quad -I_2 = \frac{0 - U_{AC}}{R_2} = -1 \text{ mA}.$$

5: Să se rezolve circuitul din fig.3.44, considerând valoarea t.e.m.,  $U = 8\text{V}$ .

$$\text{Rezultă : } U'_{ABO} = U' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4\text{V}. \quad \text{Din : } I'_3 = \frac{U'_{ABO}}{R'_n + R_{ABO}}; \text{ cu } R'_n I'_3 = U'_n$$

$$\text{rezultă : } U'_n = U'_{ABO} - R_{ABO} I'_3 = 4 - 3 I'_3.$$

Intersecția dreptei  $U'_n$  cu curba O-M-N din fig.3.45, stabilește:  $I'_3 = 0,53 \text{ A}$  și

$$U'_n = 2,4\text{V}. \quad \text{Celelalte mărimi sunt : } R'_n = \frac{U'_n}{I'_3} = 4,5\text{k}\Omega; \quad I'_2 = I'_3 \frac{R_3 + R'_n}{R_2} = 0,73\text{mA};$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 1,26\text{mA}.$$

6. În circuitul din fig.3.48 se cunosc  $R_{n1}$ , cu caracteristica în fig.3.42.b;  $R_{n2}$ , cu caracteristica în fig.3.43.c;  $R_{n3}$ , realizată în 100 rezistențe neliniare identice, legate în paralel, având fiecare aceeași caracteristică, în fig.3.45;  $R_1 = 4\Omega$ ;  $R_2 = 9\Omega$ ;  $R_3 = 80\Omega$ ;  $R_4 = 10\Omega$ ;  $U_1 = 110\text{V}$  și  $U_4 = 27\text{V}$ .

Să se rezolve circuitul prin metoda grafo-analitică. Se reprezintă graficele  $I_i = f(U_{i0})$ , cu  $i = 1, 2, 3, 4$ . Din fig.3.48 rezultă :  $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$ , sume efectuate grafic în fig.3.49 și a căror intersecție conduce la găsirea soluțiilor:

$$U_0 = 20\text{V}; \quad I_1 = 0,5\text{A}; \quad I_2 = 1\text{A}; \quad I_3 = 0,2\text{A}; \quad I_4 = 0,7\text{A};$$



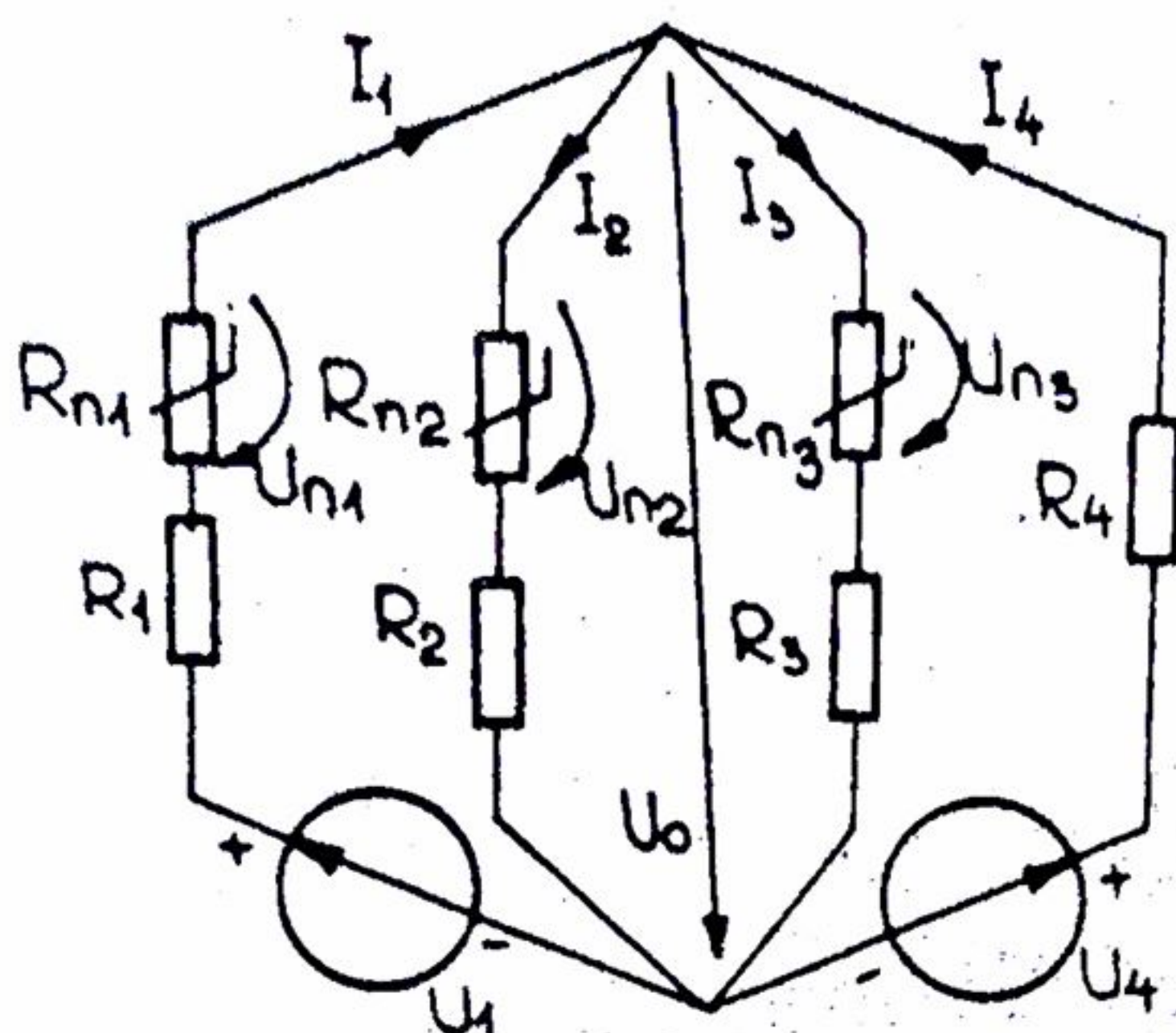


Fig.3.48

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U_1 - U_{n1} - U_0}{R_1} \\ I_2 = \frac{U_0 - U_{n2}}{R_2} \\ I_3 = \frac{U_0 - U_{n3}}{R_3} \\ I_4 = \frac{U_4 - U_0}{R_4} \end{cases} \quad (3.60)$$

În fig.3.49 s-au dat valori arbitrare curenților  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  și  $I_4$ , din caracteristicile rezistențelor neliniare s-au obținut tensiunile  $U_{n1}$ ,  $U_{n2}$  și  $U_{n3}$  iar relațiile (3.60) s-au dedus tensiunile  $U_0$  respective.

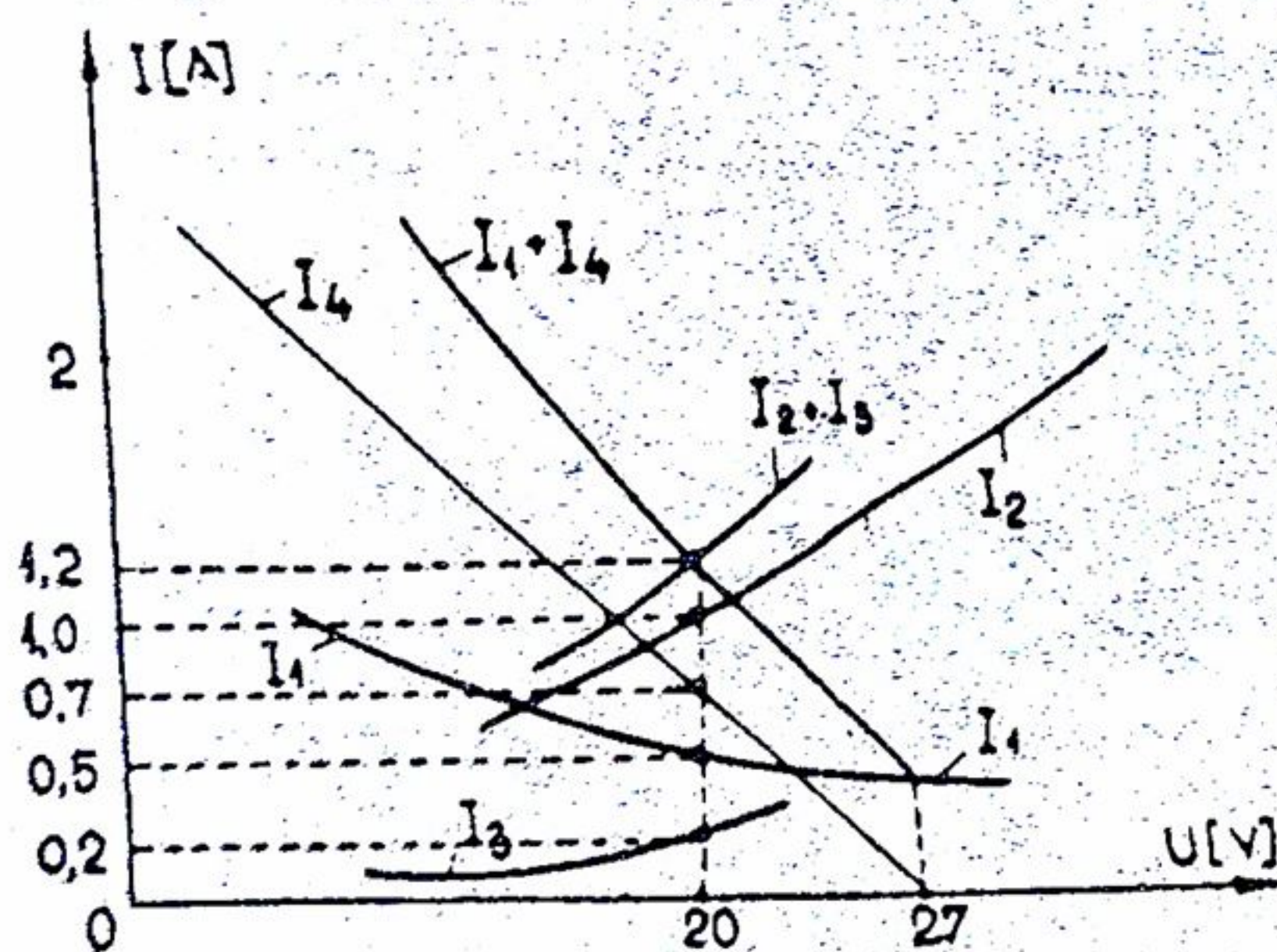


Fig.3.49

7. Patru rezistențe neliniare  $R_{n1}$ ,  $R_{n2}$ ,  $R_{n3}$ ,  $R_{n4}$ , cu caracteristicile prezentate în fig.3.50 și rezistențele liniare  $R_2 = 10\Omega$  și  $R_4 = 60\Omega$  sunt montate într-un circuit ca în fig.3.51, fiind alimentate la sursele de t.e.m.,  $U_1 = 140V$  și  $U_2 = 120V$ .

Se cer curenții din laturile circuitului și puterile rezistențelor neliniare.

Dacă  $U_0$  este tensiunea dintre noduri, rezultă curenții din laturi:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_{n1}}; I_2 = \frac{U_2 - U_{n2} - U_0}{R_2};$$

$$I_3 = \frac{U_0}{R_{n3}}; I_4 = \frac{U_0 - U_{n4}}{R_4}, \text{ în care}$$

$R_{ni} = \frac{U_{ni}}{I_i}$  (cu  $i = 1, 2, 3, 4$ ). Pentru diferitele valori  $I_i$  rezultă din caracteristicile

rezistențelor neliniare tensiunile  $U_{ni}$  (apoi  $R_{ni}$ ). Se trasează curbele  $I_i$  din fig.3.52 în care, pentru  $I_1$  și  $I_2$  se folosesc origini relative ( $0_1$  și  $0_2$ ) cu sens pozitiv spre 0. Punctul de intersecție dintre  $I_1 + I_2$  și  $I_3 + I_4$  stabilește rezultatele:  $I_1 + I_2 = 1A$ ,  $I_3 = 1,5A$ ,  $I_4 = 0,5A$ ,  $U_0 = 60V$ ; iar din caracteristicile rezistențelor neliniare se obțin:  $U_{n1} = 80V$ ,  $U_{n2} = 50V$ ,  $U_{n3} = 60V$ ,  $U_{n4} = 30V$ .



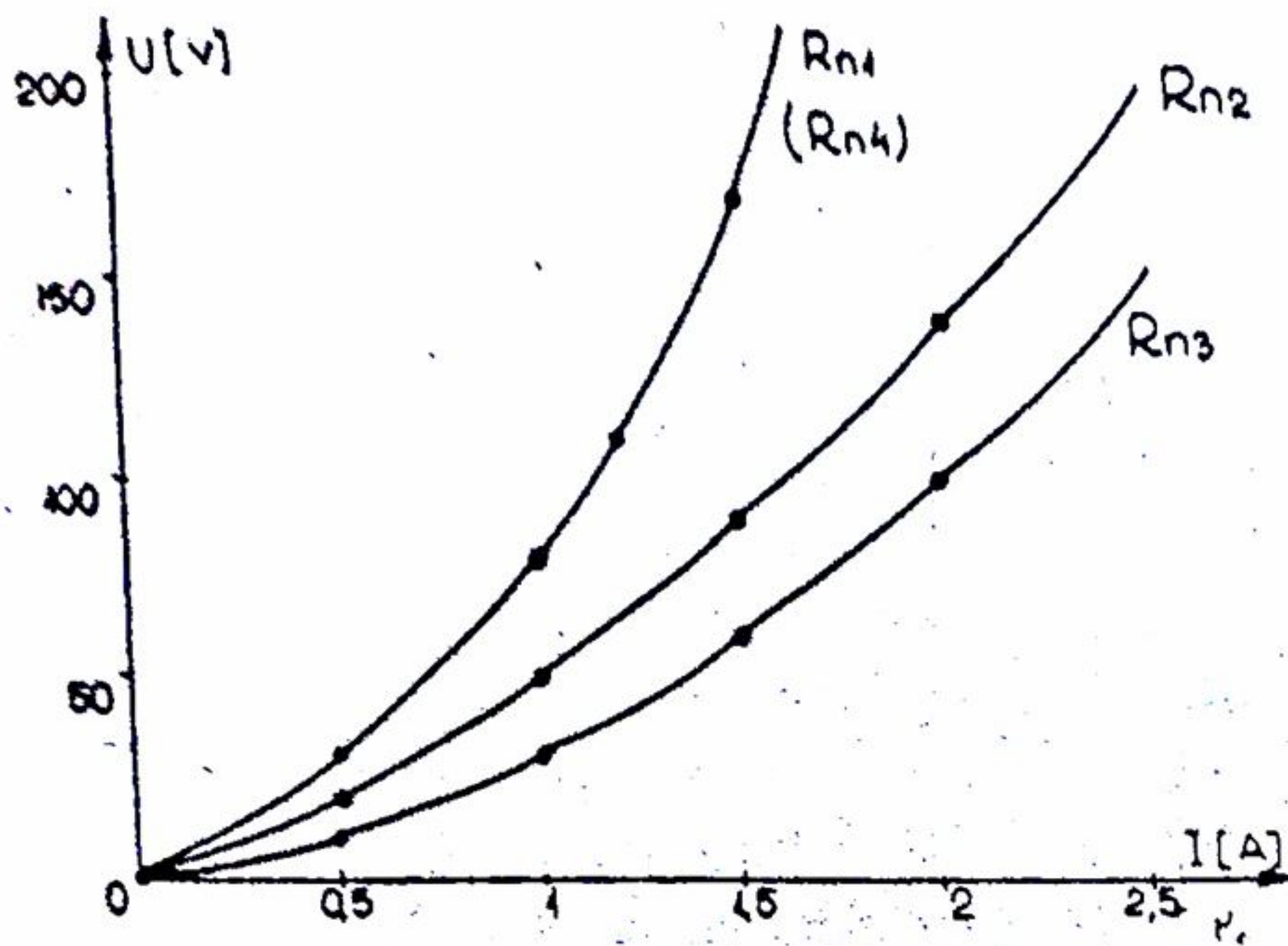


Fig. 3.50

Puterile  $P_{ni} = I_i \cdot U_{ni}$ , au valorile  $P_{n1} = 80W$ ,  $P_{n2} = 50W$ ,  $P_{n3} = 90W$ ,  $P_m = 15W$ ,  $P_n = \sum P_{ni} = 235W$ .

Cu  $P_2 = R_2 I_2^2 = 10W$  și  $P_4 = R_4 I_4^2 = 15W$ , se verifică bilanțul puterilor:

$$P = U_1 I_1 + U_2 I_2 = \sum P_{ni} + P_2 + P_4 = 260W$$

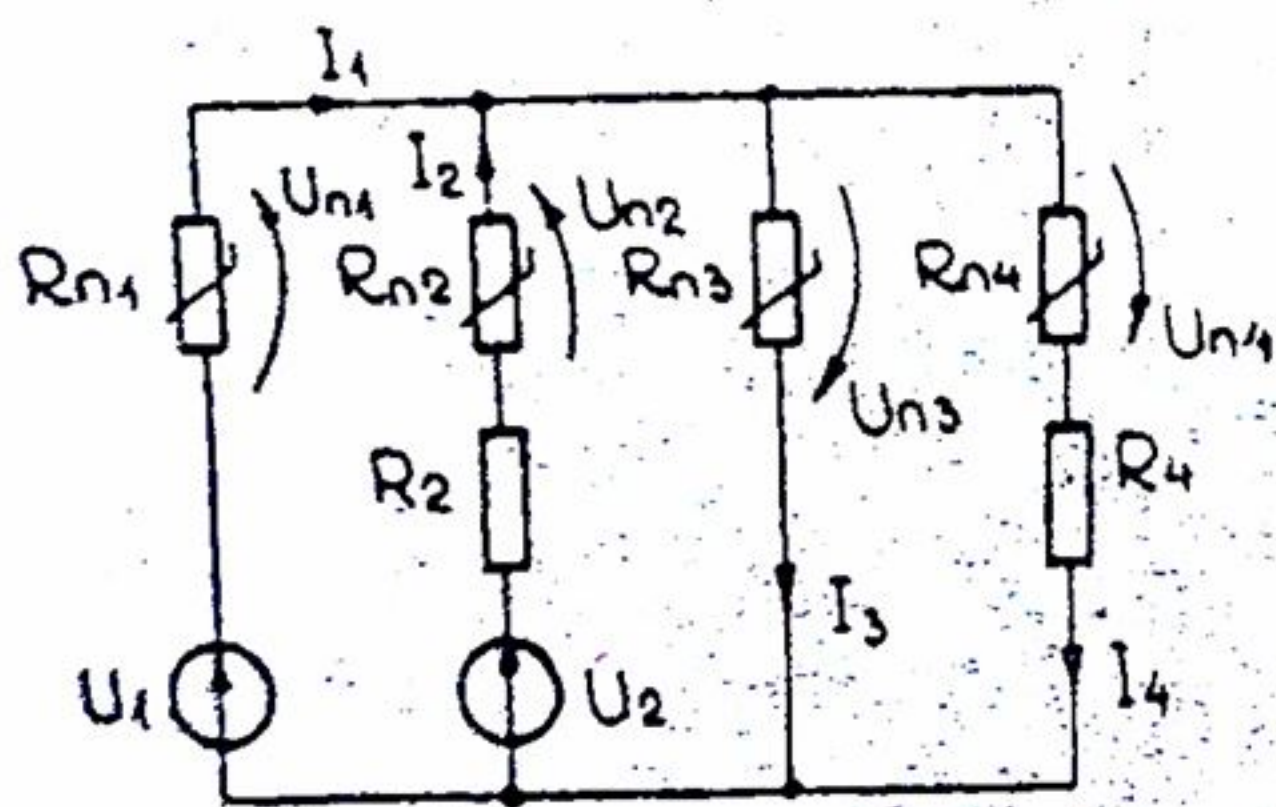


Fig. 3.51

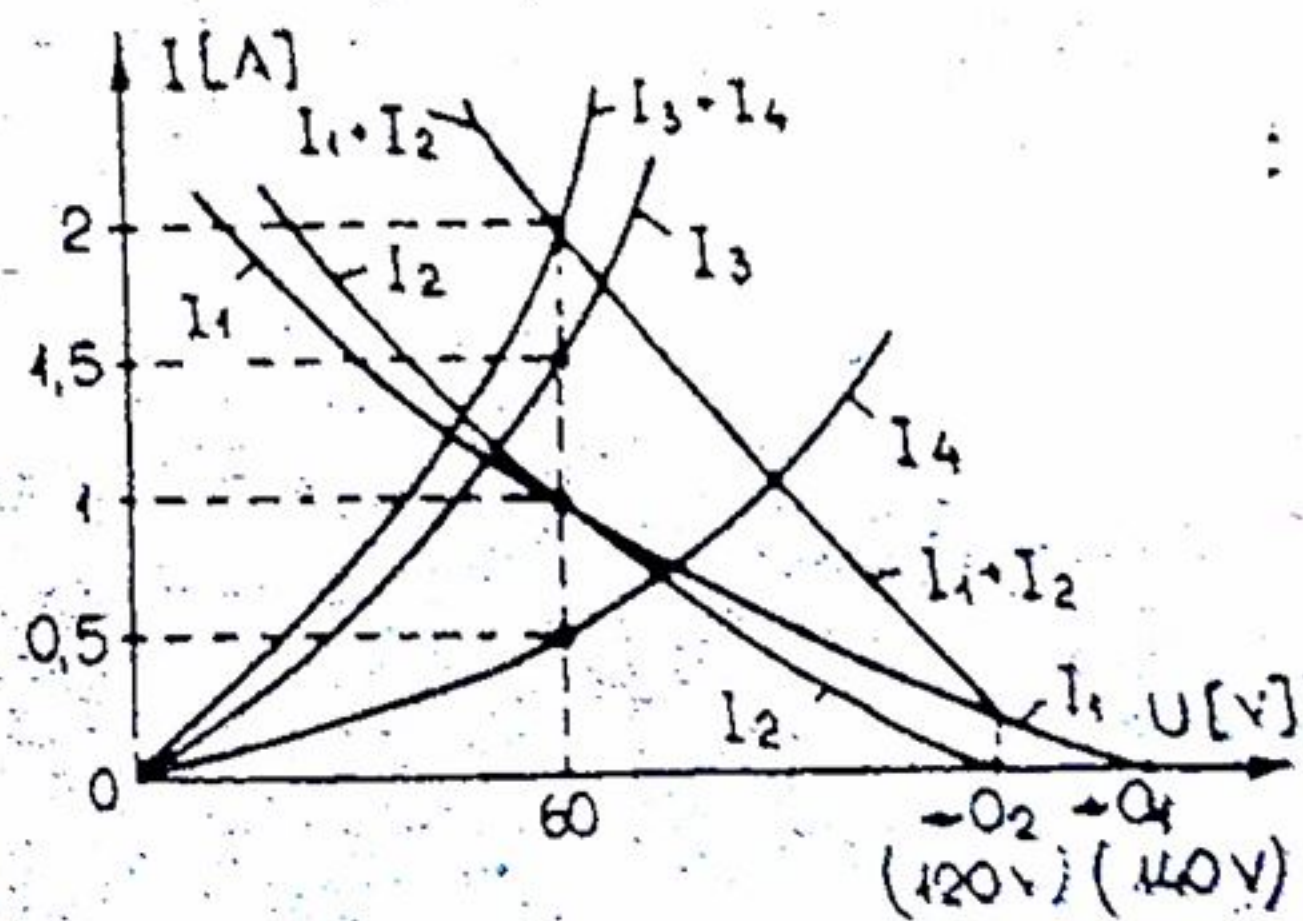


Fig. 3.52



## Capitolul IV

# ELECTRODINAMICA

Electrodinamica studiază fenomenele electromagnetice în cele mai generale transformări de stare.

## 4.1. CIRCUITE ELECTRICE ÎN CÂMPUL MAGNETIC

Sistemul fizic în care au loc acțiuni ponderomotoare asupra corpurilor magnetice sau străbătute de curenții electrici se numește câmp magnetic.

În câmpul magnetic acționează **forțe magnetice**. Forțele magnetice pot fi: **electrodinamice**, care se exercită între circuite parcurse de curenți electrici; **electromagnetice**, care se exercită între circuitul parcurs de curent electric și un corp magnetizat și **magnetostatice**, care se exercită între magneți permanenți, sau între aceștia și corpurile feromagnetice din apropierea lor.

### 4.1.1. Forțe electrodinamice

Ampere a stabilit că între două conductoare filiforme paralele, foarte lungi, situate la distanța  $R_{12}$  și străbătute de curenții  $i_1$  și  $i_2$  apare o forță  $\vec{F}_{12}$  care tinde să apropie sau să îndepărteze conductoarele 1 și 2 (fig. 4.1), după cum sensul curenților este același sau este contrar:

$$\vec{F}_{12} = \pm \mu \frac{i_1 i_2}{2\pi R_{12}} l \cdot \vec{u}_{12}, \quad (4.1)$$

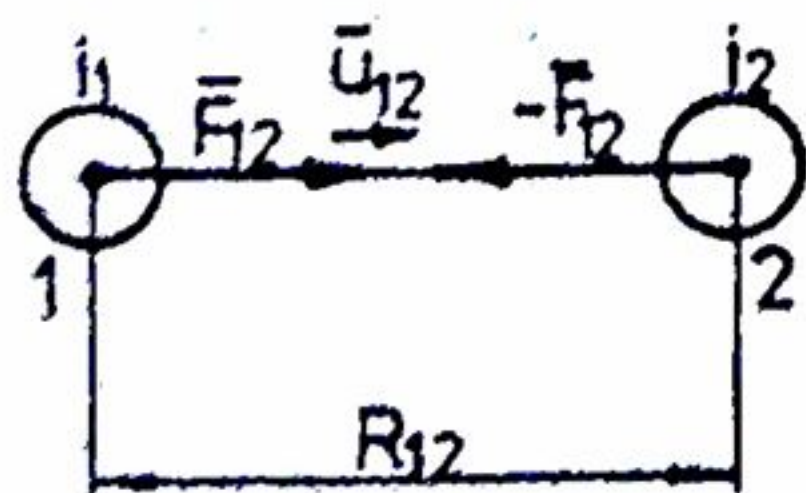


Fig. 4.1

între conductoare, a liniilor de câmp magnetic (fig. 4.2 și fig. 4.3).

Sensul liniilor de câmp magnetic este dat de regula burghiului drept. În fig. 4.2 se arată sensul forței electrodinamice în funcție de sensul liniilor de câmp - cazul curenților cu același sens.

unde  $l$  este lungimea conductoarelor,  $\vec{u}_{12}$  este versorul îndreptat de la conductorul 1 → 2, iar  $\mu$  este permeabilitatea magnetică a mediului.

Semnul (+) corespunde cazului când curenții  $i_1$  și  $i_2$  au sens contrar și invers. Forța  $\vec{F}_{12}$  din (fig. 4.1) reprezintă forța electrodinamică și se numește forța lui Ampere, iar sensul ei se poate stabili și prin compunerea.



În fig.4.2 densitatea liniilor de câmp magnetic dintre conductoare este mai mare, câmpul tinde să se uniformizeze, deci conductoarele se îndepărtează. În fig.4.3, densitatea liniilor de câmp magnetic dintre conductoare este mai mică (liniile se scad), câmpul tinde să se uniformizeze, deci conductoarele se aproprie.

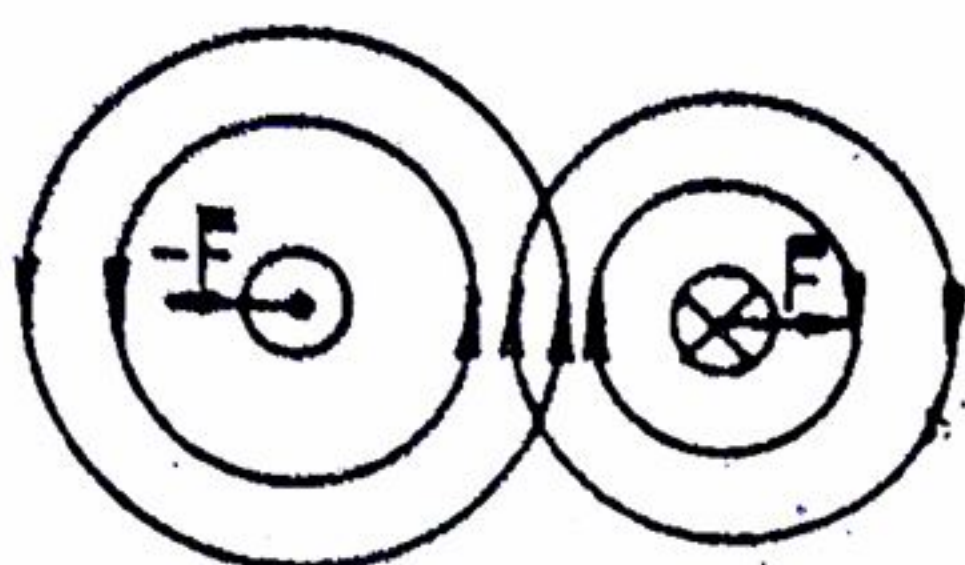


Fig.4.2

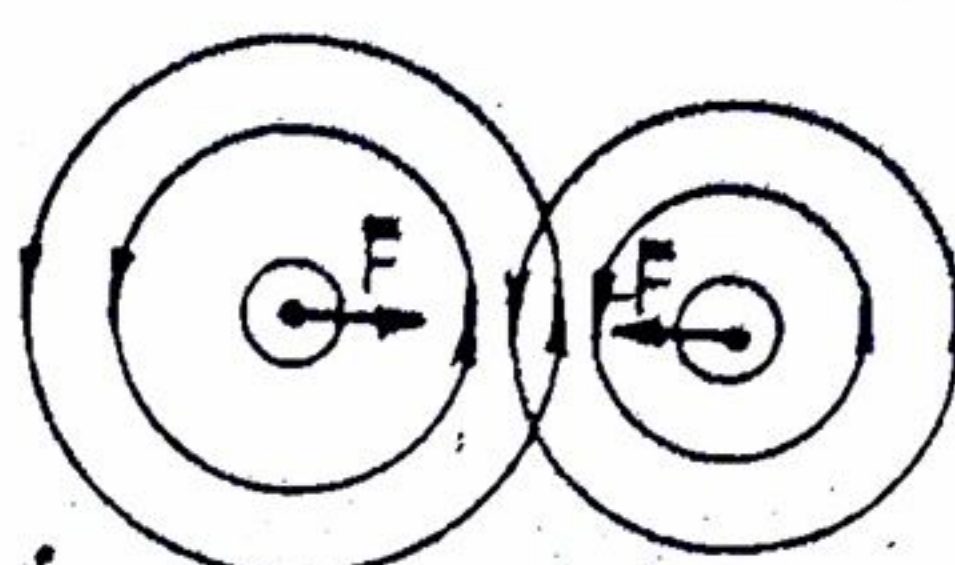


Fig.4.3

#### 4.1.2. Forțele electromagnetice

Dacă în relația forței lui Ampère se ține seama de expresia inducției magnetice  $[Wb/m^2]$

$$\mu \frac{i_1}{2\pi R_{12}} = B \quad (4.2)$$

atunci (4.1) devine

$$F_{12} = Bi_2 l \sin \alpha \quad (4.3)$$

Relația (4.3) arată că forța la care este supus conductorul 2 (din fig.4.1) depinde de inducția magnetică  $B$  produsă de curentul  $I_1$  în jurul acestuia, sau de alte surse (magneți, electromagneți). Dacă se variază  $i_2$  și se modifică direcția conductorului 2 față de direcția liniilor de câmp magnetic cu inducția  $\vec{B}$  produse de altă sursă-magnet permanent, electromagnet etc., astfel încât unghiul dintre direcția liniilor de câmp (deci a inducției  $\vec{B}$ ) și direcția conductorului 2 să fie  $\alpha$  (variabil) se găsește, experimental, că valoarea forței (fig.4.4)

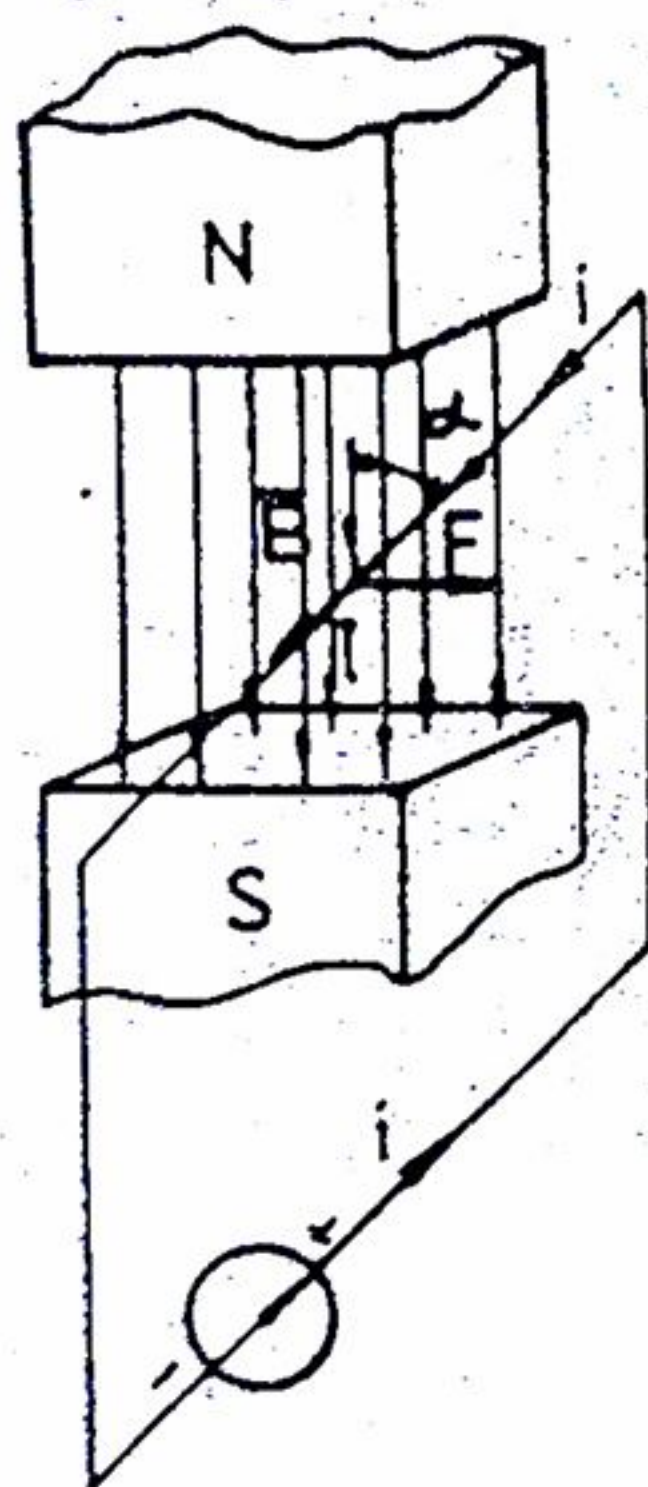


Fig.4.4

este dată de relația:  $F = Bi \cdot l \cdot \sin \alpha$

(4.4)

sau vectorial:

$$\vec{F} = i \cdot l \times \vec{B} \quad (4.5)$$

Forța din relația (4.5) se numește forța electromagnetă sau forța lui Laplace.

Dacă  $\vec{u}_B, \vec{u}_i, \vec{u}_F$  sunt versorii axelor din fig.4.5 se obține:

$$\vec{F} = (il\vec{u}_i) \times (B\vec{u}_B) = Bil(\vec{u}_i \times \vec{u}_B) = Bil\vec{u}_F, \quad (4.6)$$

adică forța electromagnetă  $\vec{F}$  este perpendiculară pe planul format de conductorul  $\vec{l}$  și



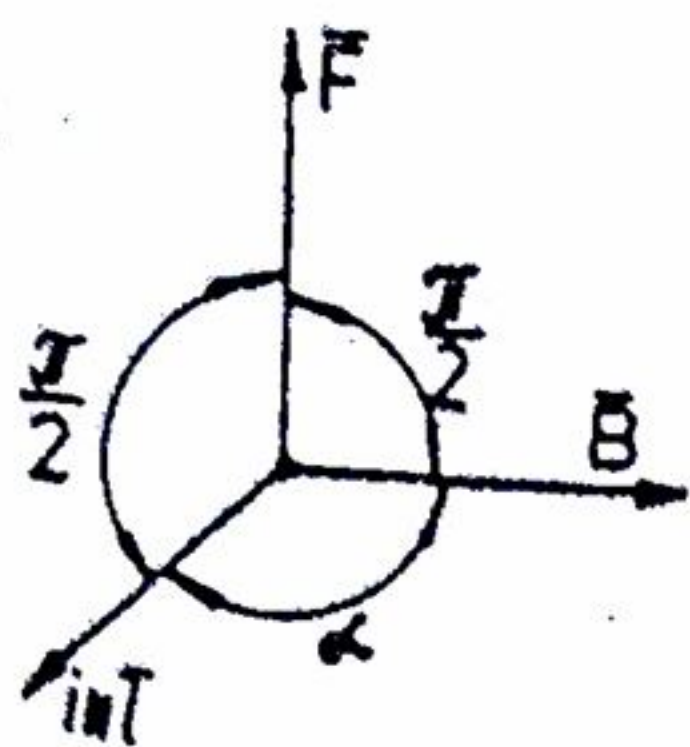


Fig. 4.5

inducția magnetică  $\vec{B}$ . În fig. 4.4 și 4.5 se arată direcția și sensul forței electromagnetice  $\vec{F}$  în funcție de sensurile curentului  $i$  și inducției  $\vec{B}$ . Forța lui Laplace stă la baza funcționării motoarelor de curent continuu, a unor aparate electrice de măsurat, etc.

#### 4.1.3. Acțiunea câmpului magnetic asupra unor particule aflate în mișcare în câmp

Dacă expresia (cunoscută) a curentului electric de conducție (în modul):  $i = \frac{dq_0}{dt}$  se amplifică cu deplasarea elementară  $d\vec{l}$  a particulei elementare (electronului) se obține:

$$id\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = dq_0 \vec{v}$$

aflat în mișcare în câmp, iar  $\vec{v}$  - viteza acestuia în câmp.

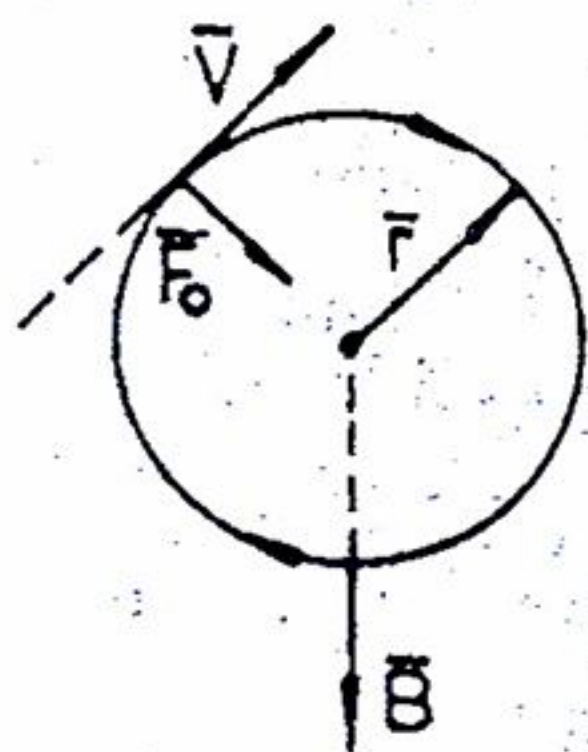


Fig. 4.6

Relația (4.7) se înmulțește vectorial cu inducția magnetică  $\vec{B}$  a câmpului uniform ( $B = \text{constant}$ ) și se obține forța elementară imprimată electronului (particulei elementare):

$d\vec{F}_0 = id\vec{l} \times \vec{B} = dq_0 \vec{v} \times \vec{B}$  sau, integrând, rezultă forța imprimată particulei (forța Lorentz)

$$\vec{F}_0 = q_0 (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.8)$$

1. Dacă  $\vec{v} \perp \vec{B}$  rezultă:  $F_0 = q_0 v B$ .

Traectoria este un cerc al cărui plan este normal pe direcția liniilor de câmp (fig. 4.6). Aici,  $\vec{v} \perp \vec{F}_0 \perp \vec{B}$ . Dacă  $m_0$  este masa particulei, rezultă accelerația:

$$a_0 = \frac{F_0}{m_0} = \frac{q_0 B v}{m_0}, \quad (4.9)$$

$$\text{raza traectoriei: } r = \frac{v^2}{a_0} = \frac{m_0 v}{q_0 B}, \quad (4.10)$$

$$\text{precum și durata unui ciclu (perioada): } T_0 = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m_0}{q_0 B}, \quad (4.11)$$

care este independentă de viteza particulei.

$$2. \text{ Dacă } \vec{v} \parallel \vec{B} \text{ rezultă: } \vec{F}_0 = q_0 (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (4.12)$$

Traectoria este o dreaptă paralelă cu direcția liniilor de câmp magnetic, iar forța imprimată particulei este zero.



3. Dacă între  $\vec{v}$  și  $\vec{B}$  există un unghi  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) atunci  $\vec{v}$  se compune în două componente: una paralelă cu inducția  $\vec{B}$  și alta perpendiculară pe aceasta. Traiectoria este o elice.

#### 4.1.4 Formula Biot-Savart-Laplace

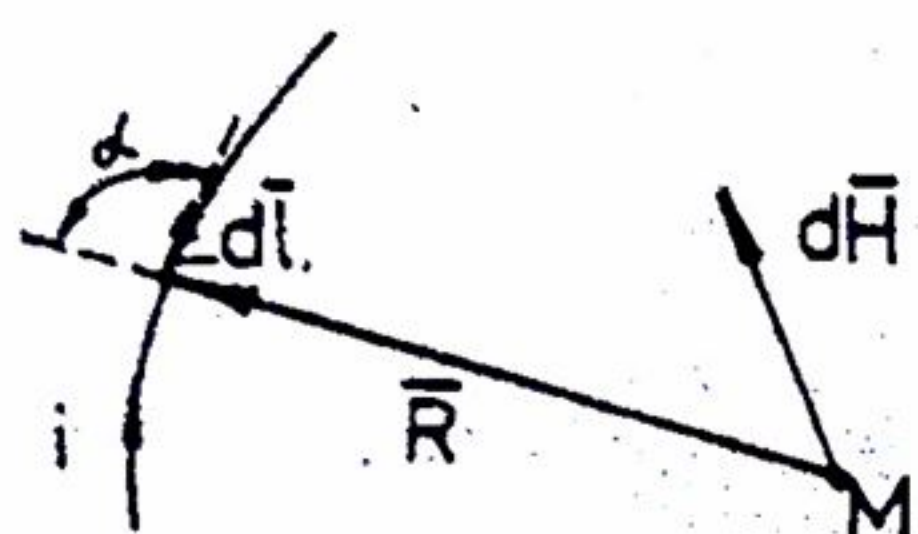


Fig. 4.7

Această formulă exprimă intensitatea câmpului elementar  $dH$ , produs de un element de circuit  $dl$ , parcurs de curentul electric  $i$ , într-un punct  $M$ , situat la distanța  $R$  de elementul respectiv, cu direcția făcând unghiul  $\alpha$  cu elementul considerat (fig. 4.7):

$$dH = \frac{idl \sin \alpha}{4\pi R^2} \quad (4.13)$$

Elementul  $dH$  are direcția perpendiculară pe planul drept format de  $d\vec{l}$  și  $\vec{R}$ , iar sensul este dat de regula burghiului drept care înaintează în sensul curentului  $i$ . Deci (4.13) se poate scrie vectorial:

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (4.14)$$

Relația (4.14) se poate integra pe un contur oarecare  $C$  și se obține o formulă cunoscută sub numele de formula Biot-Savart-Laplace:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{i}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (4.15)$$

În continuare se prezintă unele aplicații ale formulei (4.15).

##### 1) Intensitatea câmpului magnetic al conductoarelor filiforme rectilinii

Se consideră un conductor filiform rectiliniu, de lungime practic infinit, parcurs de curentul  $i$ , care produce un câmp magnetic în jurul său și se cere să se calculeze intensitatea acestui câmp într-un punct  $M$  situat la distanța  $R_0$  de conductor (fig. 4.8). Se

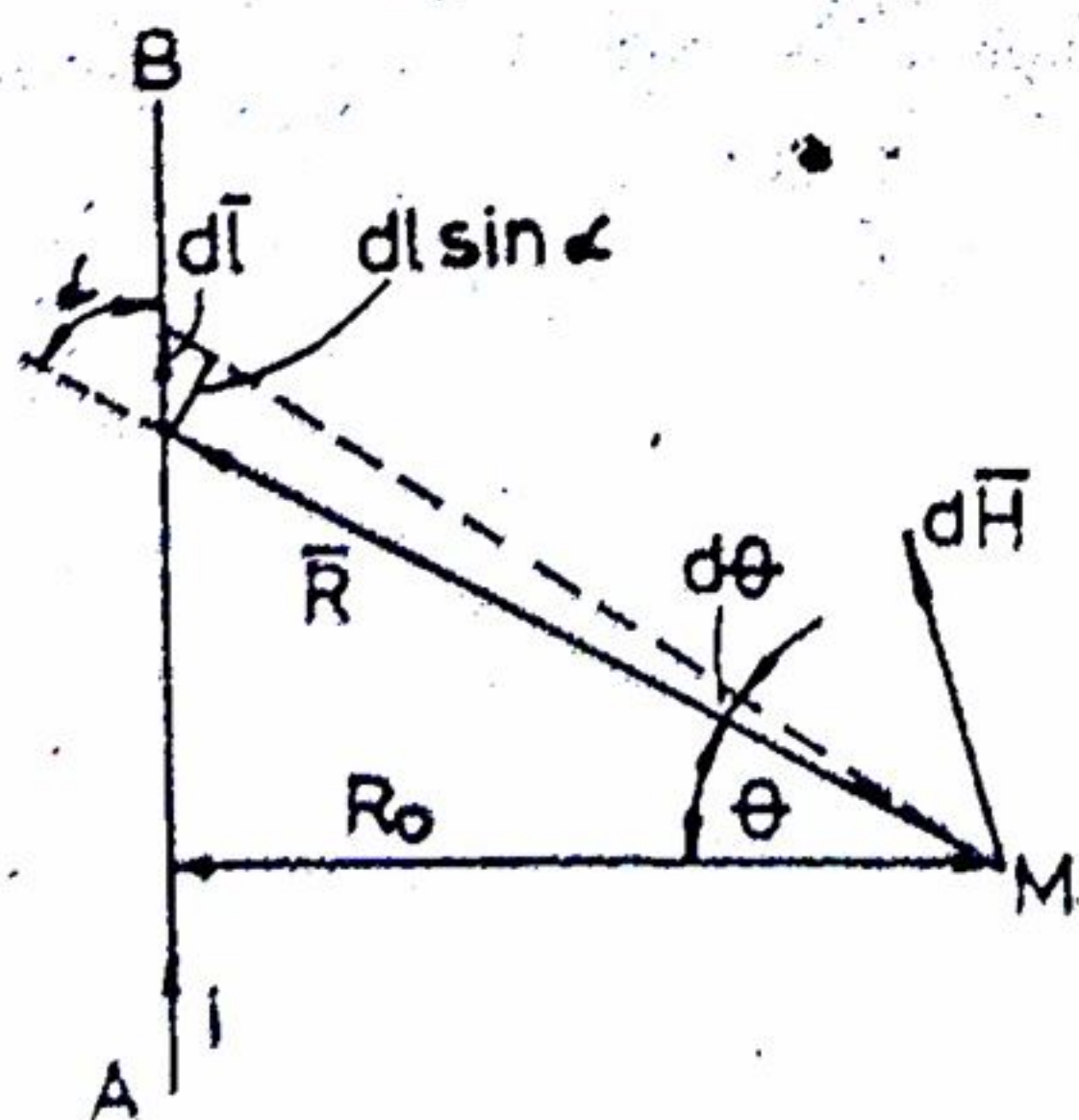


Fig. 4.8

utilizează formula (4.13):  $dH = \frac{idl \sin \alpha}{4\pi R^2}$ , în care:

$$dl \sin \alpha = R d\theta, \quad (4.16)$$

Rezultă:  $dH/d\theta = 4\pi R$ .

Din fig. 4.8 se observă că  $R = \frac{R_0}{\cos \theta}$ , deci:

$$dH = \frac{i \cos \theta d\theta}{4\pi R_0} \quad (4.17)$$



Ultima relație se integrează între  $-\frac{\pi}{2}$  și  $+\frac{\pi}{2}$  deoarece extremitățile A și B din fig.4.8 se găsesc la infinit și se obține:

$$H = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{i \cos \theta d\theta}{4\pi R_0} = \frac{i}{4\pi R_0} \left| \sin \theta \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2\pi R_0},$$

sau:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{i}{2\pi R_0}. \quad (4.18)$$

La aceeași expresie (4.18) se poate ajunge imediat dacă se aplică legea circuitului magnetic pe un contur C, care reprezintă un cerc cu raza  $R_0$ :  $\int_C \vec{H} d\vec{l} = U_m = \sum i$ ;

$$H 2\pi R_0 = i, \text{ deci } H = \frac{i}{2\pi R_0}.$$

Dacă conductorul filiform rectiliniu este finit, atunci relația (4.17) se integrează între  $-\theta_1$  și  $+\theta_2$

$$H = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{i \cos \theta d\theta}{4\pi R_0} = i \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{4\pi R_0} \quad (4.19)$$

## 2) Intensitatea câmpului magnetic în axa unei spire circulare

Se consideră o spirală cu rază  $R_0$  străbătută de curentul  $i$  staționar. În punctul M situat pe axa spirei (fig.4.9) se produc intensitățile de câmp magnetic  $d\vec{H}_1$  (produs de

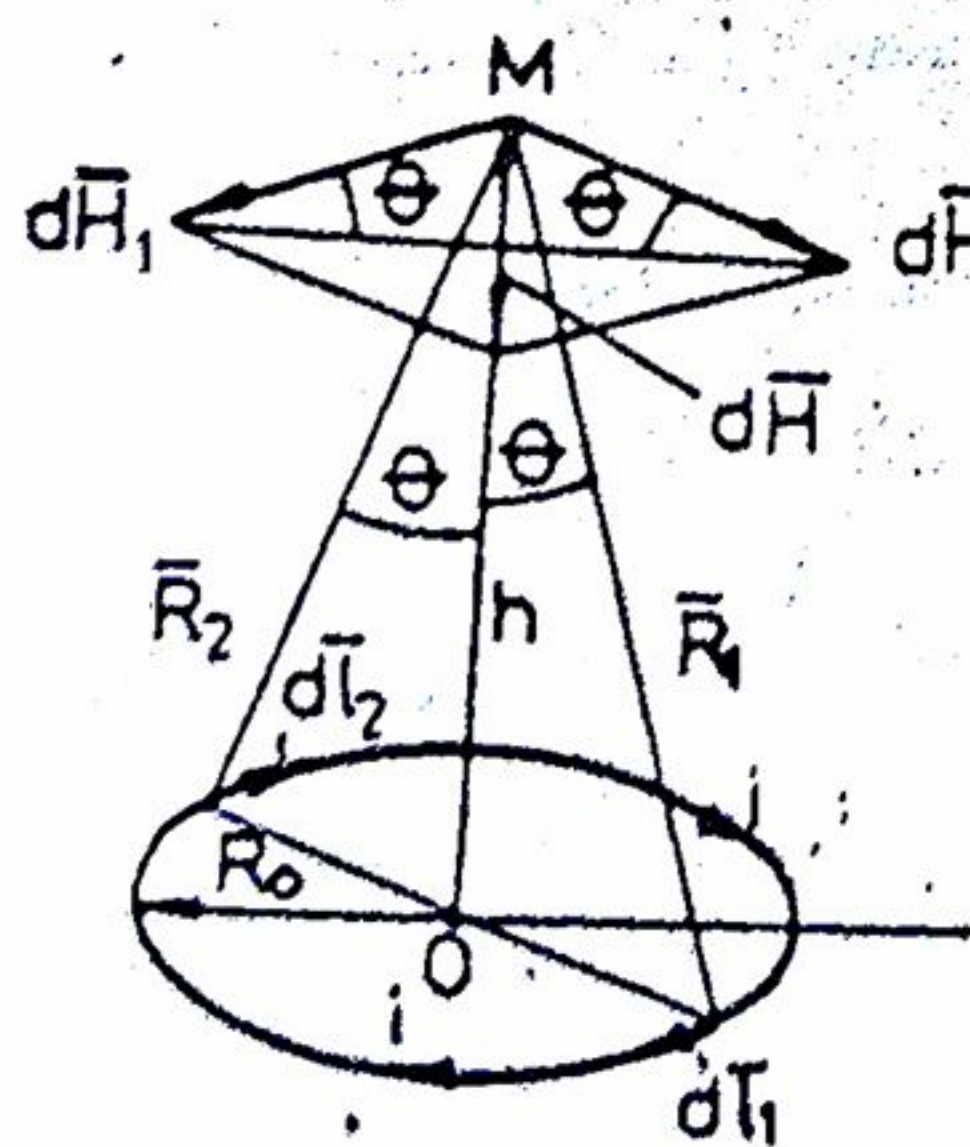


Fig.4.9

curentul  $i$  din elementul  $d\vec{l}_1$ ) și  $d\vec{H}_2$  (produs de curentul  $i$  din elementul  $d\vec{l}_2$ ), unde  $d\vec{l}_1$  și  $d\vec{l}_2$  se găsesc pe același diametru al spirei. Asemenea intensități sunt în număr finit, formând o pânză conică cu vârful în M și a căror rezultantă este câmpul total produs în spirală. Se consideră că:  $d\vec{H}_1 \perp R_1$ ,  $d\vec{H}_2 \perp R_2$ ,  $R_1 \perp d\vec{l}_1$ ,  $R_2 \perp d\vec{l}_2$ ,  $dl_1 = dl_2$ ,  $R_1 = R_2$  și deci  $dH_1 = dH_2$ . Din (4.13) rezultă:  $dH_1 = \frac{idl_1}{4\pi R_1^2}$ ,

$$\text{iar din fig.4.9 se obține: } dH = 2dH_1 \sin \theta = 2 \frac{idl_1}{4\pi R_1^2} \sin \theta$$

sau, dacă  $dl_1 = dl_2 = dl$  și  $R_1 = R_2 = R$ :  $dH = \frac{idl_1}{4\pi R_1^2} \sin \theta$ . Se înlocuiește  $\sin \theta = \frac{R_0}{R}$  și se

$$\text{obține: } dH = \frac{iR_0}{2\pi R^3} dl \quad (4.20)$$



Întrucât  $dH$  este produs de curentul  $i$  din cele două elemente  $dl$  diametral opuse, este suficientă integrarea relației (4.20) pe o jumătate de cerc, de la zero la  $\pi R_0$ :

$$H = \frac{iR_0}{2\pi R^3} \int_0^{\pi R_0} dl = \frac{iR_0^2}{2R^3}. \text{ Dacă se notează } R = (R_0^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \text{ rezultă:}$$

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{iR_0^2}{2(R_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.21)$$

În cazul unei bobine turtite, cu  $N$  spire izolate:

$$H_b = \frac{B_b}{\mu} = \frac{iNR_0^2}{2(R_0^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.22)$$

### 3) Intensitatea câmpului magnetic în axa unui solenoid

Solenoidul este o bobină cilindrică dreaptă, cu axa rectilinie. Se admite raza solenoidului  $R_0$  și lungimea sa  $L$ , având  $N$  spire identice, inseriate, prin care circulă curentul staționar  $i$  (fig.4.10).

Intensitatea câmpului magnetic în punctului  $M$  produs de curentul  $i$ , corespunzător lungimii elementare  $dl$ , este (4.21):

$$dH = \frac{i_0 R_0^2}{2(R_0^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.23)$$

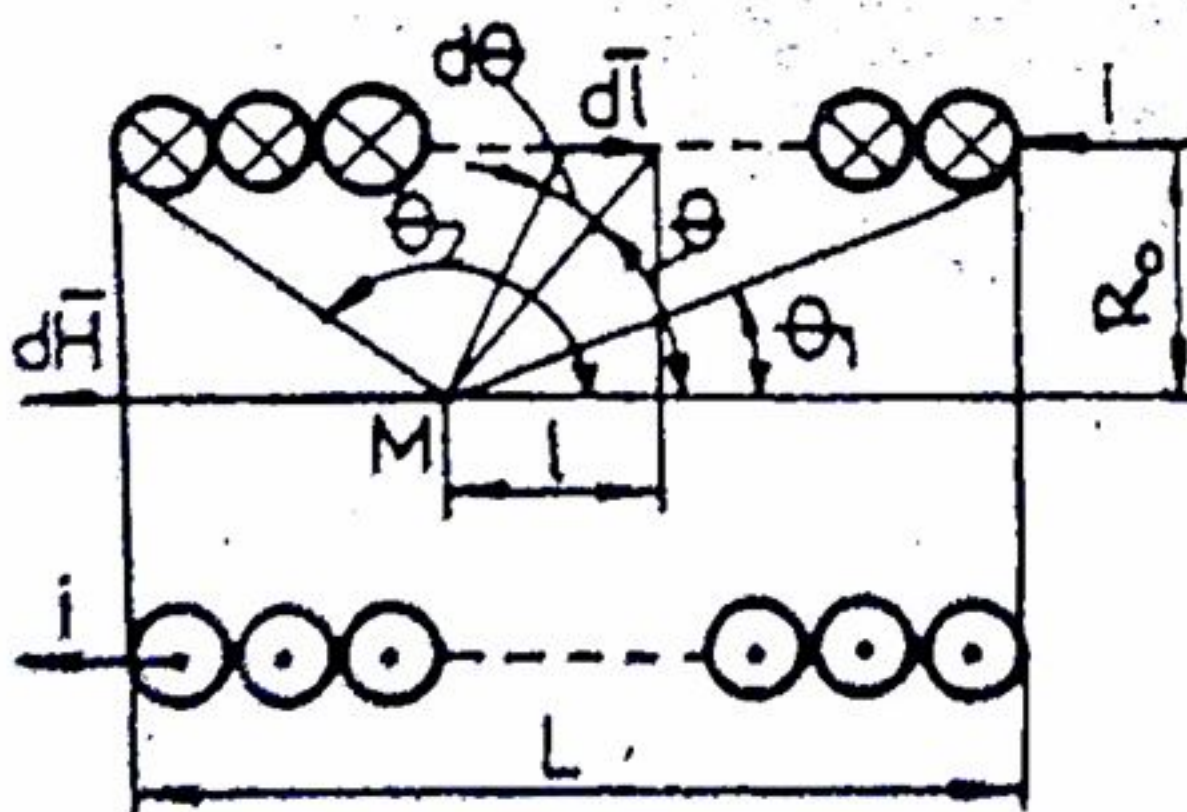


Fig.4.10

Din fig.4.10 se observă relațiile:

$$R_0^2 + l^2 = \frac{R_0^2}{\sin^2 \theta} \quad (4.25)$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{l}{R_0} \quad (4.26)$$

unde  $i_0$  este curentul total din cele  $\left(\frac{N}{L} dl\right)$

spire de pe lungimea  $dl$ , adică:  $i_0 = i \frac{N}{L} dl$ .

Relația (4.23) devine:

$$dH = \frac{iNR_0^2}{2L} \frac{dl}{(R_0^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.24)$$



Din (4.26) se obține prin diferențiere

$$-\frac{d\theta}{\sin^2 \theta} = \frac{dl}{R_0} \quad (4.27)$$

Ținând seama de (4.25) și de expresia elementului  $d\vec{l}$  din (4.27), relația (4.24)

devine: 
$$dH = -\frac{iN}{2L} \sin \theta d\theta. \quad (4.28)$$

Se integrează între  $\theta_1$  și  $\theta_2$  cu  $\theta_1$  în limita superioară, pentru a respecta sensul elementului  $d\vec{l}$  și pentru a menține sensul real al intensității câmpului  $d\vec{H}$ . Se obține

$$H = \frac{iN}{2L} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (4.29)$$

Dacă  $L \gg R_0$  intensitatea câmpului are valoarea aproximativă :

- în centrul solenoidului : 
$$H = \frac{Ni}{L} \quad (4.30)$$

- în extremitatea solenoidului : 
$$H = \frac{Ni}{2L} \quad (4.31)$$

#### 4.1.5 Intensitatea câmpului și fluxului magnetic într-un tor

Torul este un solenoid circular, care are spirele înfășurate echidistant, pe toată lungimea lui (fig.4.11).

Intensitatea câmpului magnetic se calculează pe un contur circular de rază  $r_1 < r < r_2$ ,  $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = Ni$ , sau :

$$H 2\pi r = Ni; H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad (4.32)$$

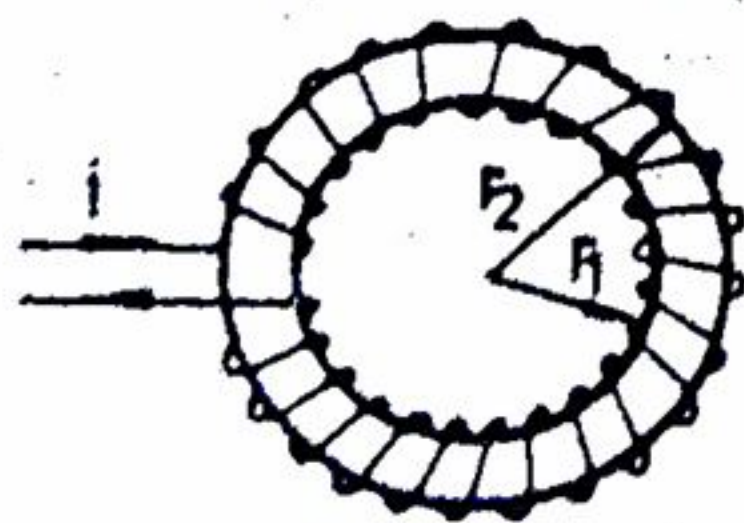


Fig.4.11

unde N este numărul de spire al torului.

Dacă  $r = r_1$  se obține valoarea maximă a intensității câmpului magnetic, iar dacă  $r = r_2$  se obține valoarea sa minimă, din interiorul spirelor.

În exteriorul torului, pentru  $r < r_1$  sau  $r > r_2$ , câmpul este nul, deoarece  $\sum i = 0$ .

Pentru calcule practice se utilizează o rază medie  $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ , deci (4.32) devine o

expresie de valoare medie : 
$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{Ni}{\pi(r_1 + r_2)} \quad (4.33)$$

unde  $\mu$  este permeabilitatea substanței torului.



Din (4.33) rezultă și o valoare aproximativă (utilizată în practică) a fluxului magnetic

$$\phi = BS = \mu \frac{NiS}{\pi(r_1 + r_2)} \quad (4.34)$$

unde S este secțiunea torului.

## 4.2 INDUCȚIA ELECTROMAGNETICĂ

M. Faraday a demonstrat practic în 1831 că dacă un circuit închis este străbătut de un flux magnetic variabil  $\phi$ , atunci în circuit apare o t.e.m. indusă :  $u = -\frac{d\phi}{dt}$ , sensul curentului fiind acela dat de regula lui Lenz (t.e.m. indusă se opune cauzei care dă naștere variației fluxului magnetic produs de curentul de inducție, prin fluxul magnetic. Fenomenul inducției electromagnetice stă la baza funcționării tuturor generatoarelor de energie electrică și are numeroase aplicații în electrotehnică. Legea inducției electromagnetice a fost prezentată în cap. 1 sub forma :  $u = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$ . (4.35)

în care suprafața S se sprijină pe conturul închis C. Dacă sistemul format din suprafața S și conturul C este în mișcare, având viteza momentană  $\vec{v}$ , legea inducției electromagnetice are expresia  $\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}$ , (4.36)

unde primul termen reprezintă tensiunea electromotoare indusă prin transformare ( $\vec{B}$  variază în timp), iar al doilea termen reprezintă t.e.m. indusă prin mișcare rotativă ( $\vec{v} \neq 0$  și S se modifică). Se constată că ambii termeni depind de sistemul de referință ales, dar suma lor este independentă de acesta. De aceea, în cazul aplicațiilor practice se alege un sistem de referință care permite un calcul mai simplu. Legea (4.36) se mai poate scrie :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad (4.37)$$

### 4.2.1 Formarea locală a legii inducției electromagnetice

Dacă se dezvoltă membrul drept al relației (4.35) se obține

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \text{div} \vec{B} + \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \right] d\vec{S}, \quad (4.38)$$

Dacă legii fluxului magnetic, scrisă sub forma  $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ , i se aplică teorema

Gauss-Ostrogradsky:  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0$ , rezultă forma locală a legii fluxului



magnetic (în orice loc și în orice moment divergența vectorului inducție magnetică este nul):  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  (4.39)

Ținând seama de (4.39), introdusă în (4.38), rezultă pentru (4.35) forma :

$$u = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} - \int_S \operatorname{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) d\vec{S} \quad (4.40)$$

Expresia (4.35) se mai poate scrie :

$$u = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad (4.41)$$

Comparând (4.40) cu (4.41)  $-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} - \int_S \operatorname{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S}$  rezultă forma

locală a legii inducției electromagnetice :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \quad (4.42)$$

În cazul corpurilor imobile, când  $\vec{v} = 0$ , din (4.42) se obține o altă formă locală a legii inducției electromagnetice, numită ecuația a doua a lui Maxwell :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.43)$$

Relația (4.42), respectiv relația (4.43) arată legătura fizică dintre câmpul electric și câmpul magnetic, câmpuri caracterizate de vectorii  $\vec{E}$  (intensitatea câmpului electric) și  $\vec{B}$  (inducția magnetică).

#### 4.2.2 Efectul Hall

Efectele galvanice sunt observate la corpurile conductoare și semiconductoare parcurse de curent electric și situate în câmp magnetic. Primul efect galvanometric a fost descoperit de W. Thomson în 1856 și constă în modificarea rezistenței electrice a corpului conductor în prezența câmpului magnetic. Pe acest efect se bazează funcționarea spiralei de bismut pentru măsurarea inducției magnetice. Unul din cele mai importante efecte galvanometrice este efectul Hall descoperit în 1879 de fizicianul american E.H. Hall. Acest efect constă în apariția unei tensiuni (denumită tensiune Hall) între două puncte ale unei plăci conductoare (sau semiconductoare) parcursă de curent electric și situată într-un câmp magnetic, ale cărui linii de câmp sunt perpendiculare pe placă. Efectul este mult mai pronunțat la semiconductoare decât la metale și este cauzat de acțiunea forței Lorentz asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice, cărora li se imprimă o mișcare ordonată în placă. Placa Hall este prevăzută cu doi electrozi plini (1 și 2) pentru curentul de comandă  $i$  și doi electrozi punctuali (3 și 4) pentru culegerea tensiunii Hall,  $u_H$ , măsurată cu milivoltmetrul mV. Forța Lorentz  $\vec{F}_0$  imprimă o mișcare ordonată purtătorilor de sarcini.



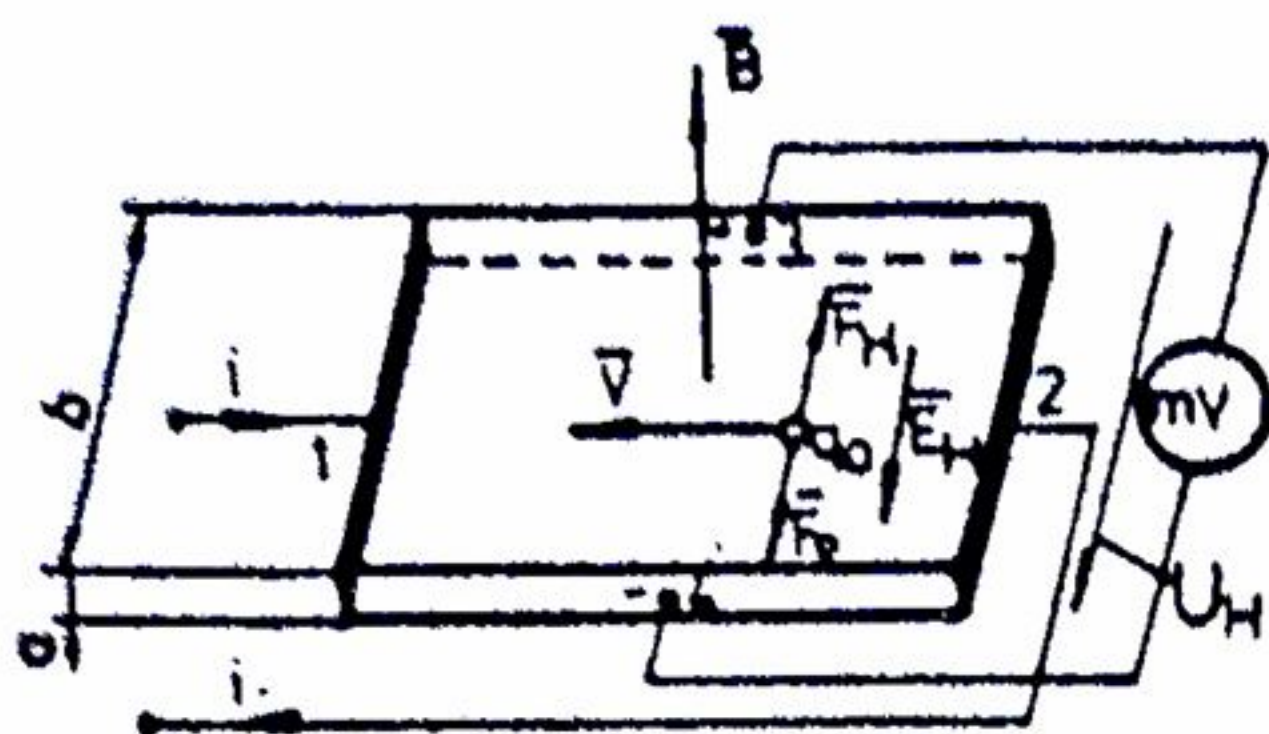


Fig.4.12

pozitive și negative este stabilizat. În acest moment de echilibru se poate scrie :

$$\vec{E}_H = -\vec{E}_0 = -\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.44)$$

unde  $\vec{v}$  este viteza (în linie dreaptă) a purtătorilor mobili de sarcini electrice din placă.

Dacă sarcinile electrice din sondă sunt uniform distribuite, cu densitatea  $\rho_v$ , rezultă un curent de convecție cu densitatea  $\vec{J} = \rho_v \vec{v}$ , din care se scoate  $\vec{v}$  și se înlocuiește în

$$(4.44), \text{ obținându-se } \vec{E}_H = -\vec{v} \times \vec{B} = \frac{-\vec{J} \times \vec{B}}{\rho_v} \quad (4.45)$$

Știind că  $\vec{J} \perp \vec{B}$ , rezultă modulul  $E_H = \frac{JB}{\rho_v}$  și tensiunea lui Hall:

$$u_H = \int_0^b E_H dl = \int_0^b \frac{JB}{\rho_v} dl, \text{ sau : } u_H = \frac{JBb}{\rho_v} = \frac{iB}{a\rho_v} = K_H iB. \quad (4.46)$$

unde  $K_H$  se numește constanta Hall, care depinde de natura materialului sondei și dimensiunile geometrice ale acesteia. Placa Hall are multiple utilizări, printre care, măsurarea inducției magnetice  $B$ , amplificator, întrerupător de mare putere etc.

### 4.3 INDUCTIVITĂȚI

Prin inductivitate se înțelege o mărime  $L = \frac{\phi}{i}$  definită de raportul între fluxul magnetic total ce străbate suprafața limitată de conturul unui circuit și curentul care îl produce.

Unitatea de măsură a inductivității  $L$  este Henry-ul (H) :

$$L = \frac{\phi}{i} \text{ [H]} \quad (4.47)$$

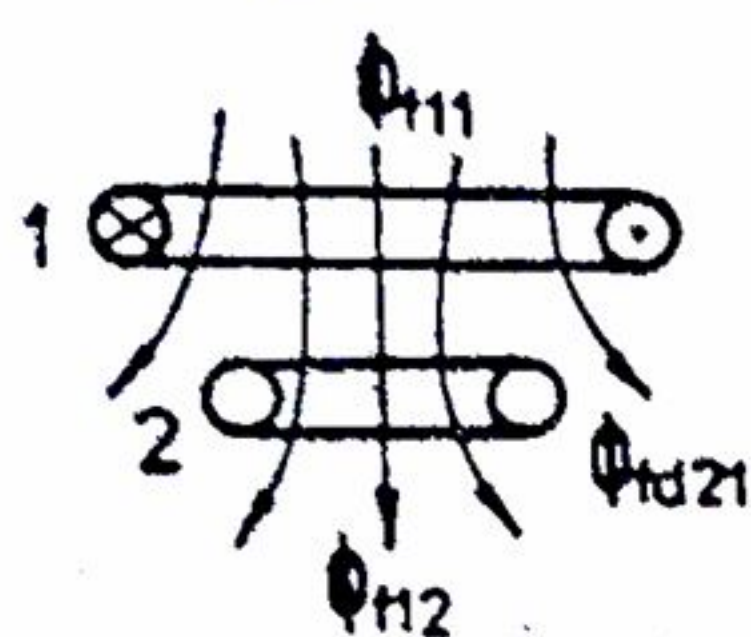
#### 4.3.1 Inductivități proprii și inductivități mutuale

În fig.4.13 sunt prezentate două circuite închise, având fiecare câte  $N_1$  și respectiv



$N_2$  spire, în jurul cărora se admite un mediu magnetic liniar. Se admite, de asemenea, că numai circuitul 1 este străbătut de un curent electric  $i_1$ .

Fluxul produs de circuitul 1 care trece printr-o singură spirală a circuitului 1 (fluxul fascicular), se notează cu  $\phi_{f11}$  și fluxul produs de circuitului 1 care trece printr-o singură



spirală a circuitului 2 se notează cu  $\phi_{f21}$ . Primul indice se referă la circuitul prin a cărei suprafață trece fluxul, iar al doilea indice la curentul care produce fluxul respectiv.

Fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce nu trece prin circuitul 2 se numește fluxul fascicular de dispersie și se notează cu  $\phi_{fd21}$ .

Fig. 4.13

Rezultă :

$$\phi_{f11} = \phi_{f21} + \phi_{fd21} \quad (4.48)$$

Se numește fluxul total  $\phi_{11}$  prin circuitul 1, fluxul produs de cele  $N_1$  spire ale circuitului:

$$\phi_{f11} = N_1 \phi_{f11} \quad (4.49)$$

Se numește inductivitate proprie a circuitului 1 raportul pozitiv dintre fluxul total  $\phi_{11}$  prin circuitul 1 produs de curentul din acest circuit - în sensul asociat după regula burghiului, sensului curentului - și curentul  $i_1$  care îl produce :

$$L_{11} = \frac{\phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \phi_{f11}}{i_1} > 0 \quad (4.50)$$

Se numește inductivitate mutuală  $L_{21}$  între circuitele 1 și 2, raportul între fluxul total  $\phi_{21}$  produs de circuitul 1 care trece prin circuitul 2 și curentul  $i_1$  care îl produce :

$$L_{21} = \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \phi_{f21}}{i_1} < 0 \quad (4.51)$$

Fluxul se consideră pozitiv în sensul asociat după regula burghiului, conform sensului curentului  $i_2$ . Deoarece sensul acestuia poate fi diferit de cel al curentului  $i_1$ , inductivitatea mutuală poate fi pozitivă sau negativă după cum sensurile curenților din cele două circuite coincid sau nu.

Dacă în fig. 4.13 ar fi circulat curentul numai prin circuitul 2, am fi avut :

$$L_{22} = \frac{\phi_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \phi_{f22}}{i_2} \text{ și } L_{12} = \frac{\phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \phi_{f12}}{i_2} \quad (4.52)$$

Se demonstrează că  $L_{12}$  este egal cu  $L_{21}$ . În circuite fără dispersie inductivitatea mutuală este :

$$L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}} = M \quad (4.53)$$

Inductivitatea mutuală se notează adeseori cu  $M$ .

Fiind dat circuitul magnetic fără dispersie, a cărui reluctanță  $R_m$  (suma reluctanțelor în serie la circuitul magnetic neramificat, sau cea echivalentă în exteriorul laturii bobinei în cazul unui circuit magnetic ramificat) este constantă, rezultă inductivitatea bobinelor:



$$L = N \frac{\phi_f}{i} = N \frac{Ni}{iR_m} = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \Lambda \quad (4.54)$$

unde  $\Lambda$  este permeanța circuitului magnetic, definită de relația :  $\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{\sum \frac{l}{\mu S}} = \frac{\phi_f}{Ni}$ .

Cu notațiile de mai sus, se scriu inductivitățile proprii și mutuală pentru cele două

bobine :

$$L_1 = \frac{N_1}{i_1} \phi_{f11} = \frac{N_1}{i_1} \mu \frac{N_1 i_1}{l} S = \frac{N_1^2}{R_m}, \quad (4.55)$$

$$L_2 = \frac{N_2}{i_2} \phi_{f22} = \frac{N_2}{i_2} \mu \frac{N_2 i_2}{l} S = \frac{N_2^2}{R_m}, \quad (4.56)$$

$$M = \frac{N_2}{i_1} \phi_{f21} = \frac{N_2}{i_1} \mu \frac{N_1 i_1}{l} S = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S = \frac{N_1 N_2}{R_m}. \quad (4.57)$$

Dacă se compară produsul inductivităților proprii (4.55) și (4.56).

$$L_1 L_2 = \frac{N_1^2}{R_m} \frac{N_2^2}{R_m} = \left( \frac{N_1 N_2}{R_m} \right)^2, \text{ cu pătratul inductivităților mutuale (4.57), } M^2 = \left( \frac{N_1 N_2}{R_m} \right)^2.$$

se obține relația  $M = \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.58)$

care corespunde situației ideale când fluxul unei bobine este complet îmbrățișat de cealaltă bobină, care în practică nu se realizează, chiar dacă bobinele sunt suprapuse. De aceea se utilizează un coeficient numeric de cuplaj inductiv definit de relația

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1 \quad (4.59)$$

Pentru un cuplaj strâns,  $K$  se apropie de unitate, iar pentru un cuplaj slab,  $K$  se apropie de zero.

#### 4.3.2 Inductivitățile bobinelor electrice

Pe baza principiului superpoziției, în medii liniare, teorema lui Maxwell referitoare la inductivități este :

$$\phi_j = \sum_{m=1}^n \phi_{jm} = \sum_{m=1}^n L_{jm} i_m; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.60)$$

unde  $L_{11}, L_{22}, \dots, L_{nn}$  sunt inductivitățile proprii,  $L_{12}, L_{13}, \dots, L_{1n}$  inductivitățile mutuale;  $i_1, i_2, \dots, i_n$  - curenții din cele  $n$  bobine, iar  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_n$  - fluxurile respective.

În (4.60) se poate arăta că  $L_{mj} = L_{jm} = M. \quad (4.61)$



Teorema (4.60) se scrie dezvoltat :

$$\begin{cases} \phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + \dots + L_{1n}i_n \\ \phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + \dots + L_{2n}i_n \\ \vdots \\ \phi_n = L_{n1}i_1 + L_{n2}i_2 + \dots + L_{nn}i_n \end{cases} \quad (4.62)$$

T.e.m. indusă în bobine se obține (pentru medii liniare și nedeformabile) :

$$u_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_{11}\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt} - \dots - L_{1n}\frac{di_n}{dt}, \quad (4.63)$$

sau

$$u_1 = u_{11} + u_{12} + \dots + u_{1n}. \quad (4.64)$$

Termenul  $u_{11} = -L_{11}\frac{di_1}{dt}$  se numește t.e.m. obținută prin inducție proprie, iar ceilalți termeni se numesc t.e.m. obținute prin inducție mutuală.

Dacă inductivitatea  $L$  este variabilă în timp, atunci, în cazul general:

$$u = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}, \quad (4.65)$$

unde primul termen  $-L\frac{di}{dt}$  este t.e.m. obținută prin inducție statică sau transformare, iar

al doilea termen  $-i\frac{dL}{dt}$  este t.e.m. obținută prin mișcare.

Legarea în serie a bobinelor. Se admit două bobine (cu inductivitățile  $L_1$  și  $L_2$ ), cuplate magnetic (cu inductivitatea mutuală  $M$ ). Ele se pot lega în serie, astfel încât fluxurile lor ( $\phi_1$  și  $\phi_2$ ) să se adune fiind în același sens (fig.4.14.a) sau să se scadă (fig.4.14.b), fluxurile fiind în opoziție, adică  $M < 0$  în fig.4.14.a și  $M > 0$  în fig.4.14.b.

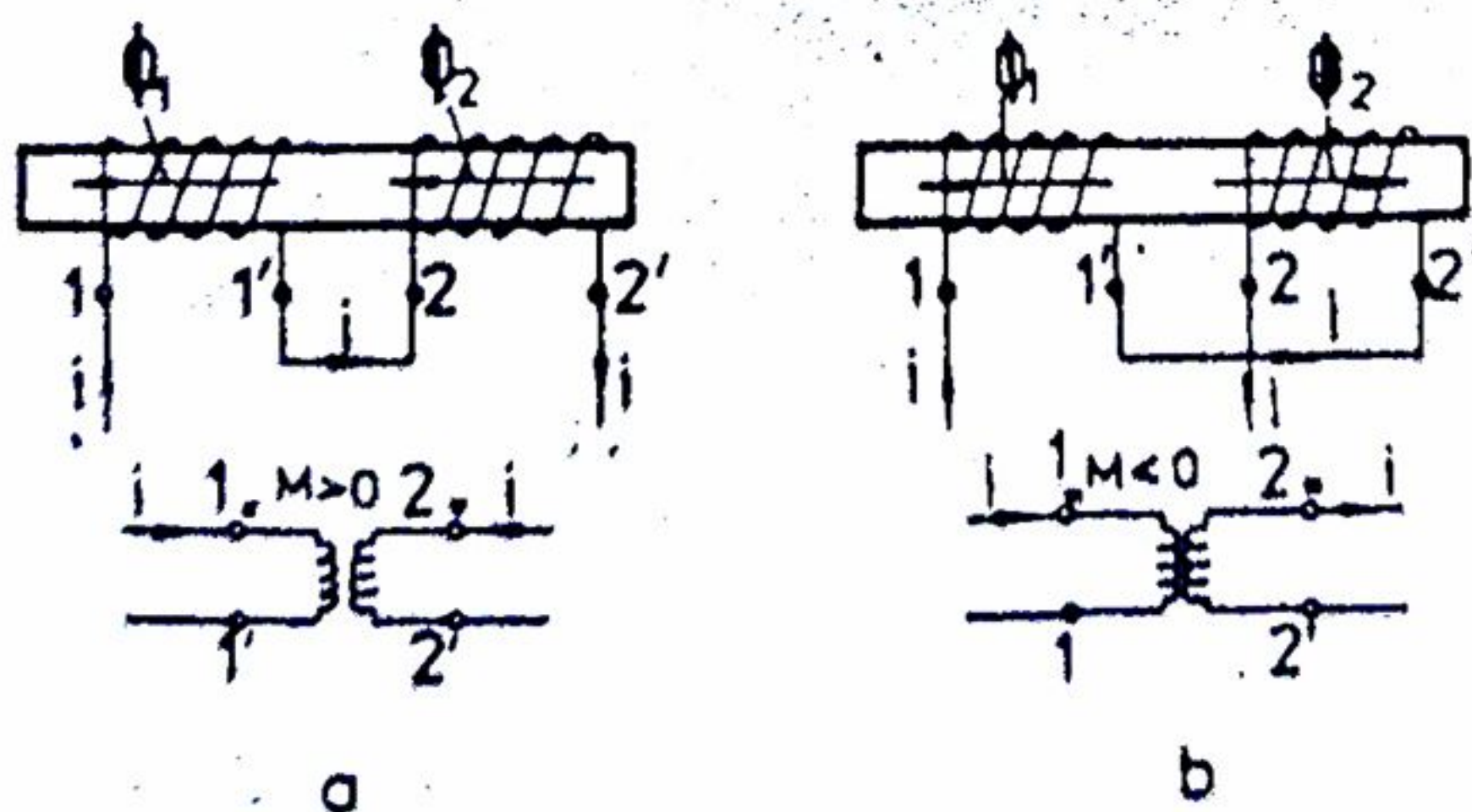


Fig.4.14

În aceste cazuri, ecuațiile lui Maxwell (4.62) se scriu:

$$\begin{cases} \phi_1 = L_{11}i + L_{12}i \\ \phi_2 = L_{21}i + L_{22}i \end{cases} \quad (4.66)$$

sau, cu notațiile:  $L_{11} = L_1$ ,

$L_{22} = L_2$ ,  $L_{12} = L_{21} = M$

rezultă inductivitatea totală:

- pentru fig.4.14.a ( $M > 0$ ):

$$L = \frac{\phi_1 + \phi_2}{i} = L_1 + L_2 + 2M \quad (4.67)$$

- pentru fig.4.14.b ( $M < 0$ ):

$$L = \frac{\phi_1 + \phi_2}{i} = L_1 + L_2 - 2M \quad (4.68)$$



Inductivitatea totală a două bobine legate în serie este, reunind (4.67) cu (4.68):

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (4.69)$$

Aplicație. Pe un tor cu lungimea medie  $l = 0,5$  m, secțiunea constantă  $S = 8 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>, și permeabilitatea magnetică relativă  $\mu_r = 400$ , sunt înfășurate două bobine suprapuse, cu  $N_1 = 200$  spire și  $N_2 = 300$  spire, legate în serie.

Inductivitățile proprii și mutuală au valorile:

$$L_1 = \frac{N_1}{i_1} \phi_{f11} = \frac{N_1}{i_1} \mu \frac{N_1 i_1}{l} S = \mu \frac{N_1^2}{l} S = \frac{N_1^2}{R_m} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

$$L_2 = \frac{N_2}{i_2} \phi_{f22} = \frac{N_2}{i_2} \mu \frac{N_2 i_2}{l} S = \mu \frac{N_2^2}{l} S = \frac{N_2^2}{R_m} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

$$M = \frac{N_2}{i_1} \phi_{f21} = \frac{N_2}{i_1} \mu \frac{N_1 i_1}{l} S = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S = \frac{N_1 N_2}{R_m} = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$$

Inductivitatea totală este:

- pentru același sens al fluxurilor:  $L = L_1 + L_2 + 2M = 20 \cdot 10^{-2} \text{ H}$

- pentru opoziția fluxurilor:  $L = L_1 + L_2 - 2M = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ H.}$

Aceleași rezultate se pot obține și din relația:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M = \frac{1}{R_m} (N_1^2 + N_2^2 \pm 2N_1 N_2)$$

$$L = \frac{1}{R_m} (N_1 \pm N_2)^2 = (10,4 \pm 9,6) \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

#### 4.3.3 Inductivitatea liniilor aeriene

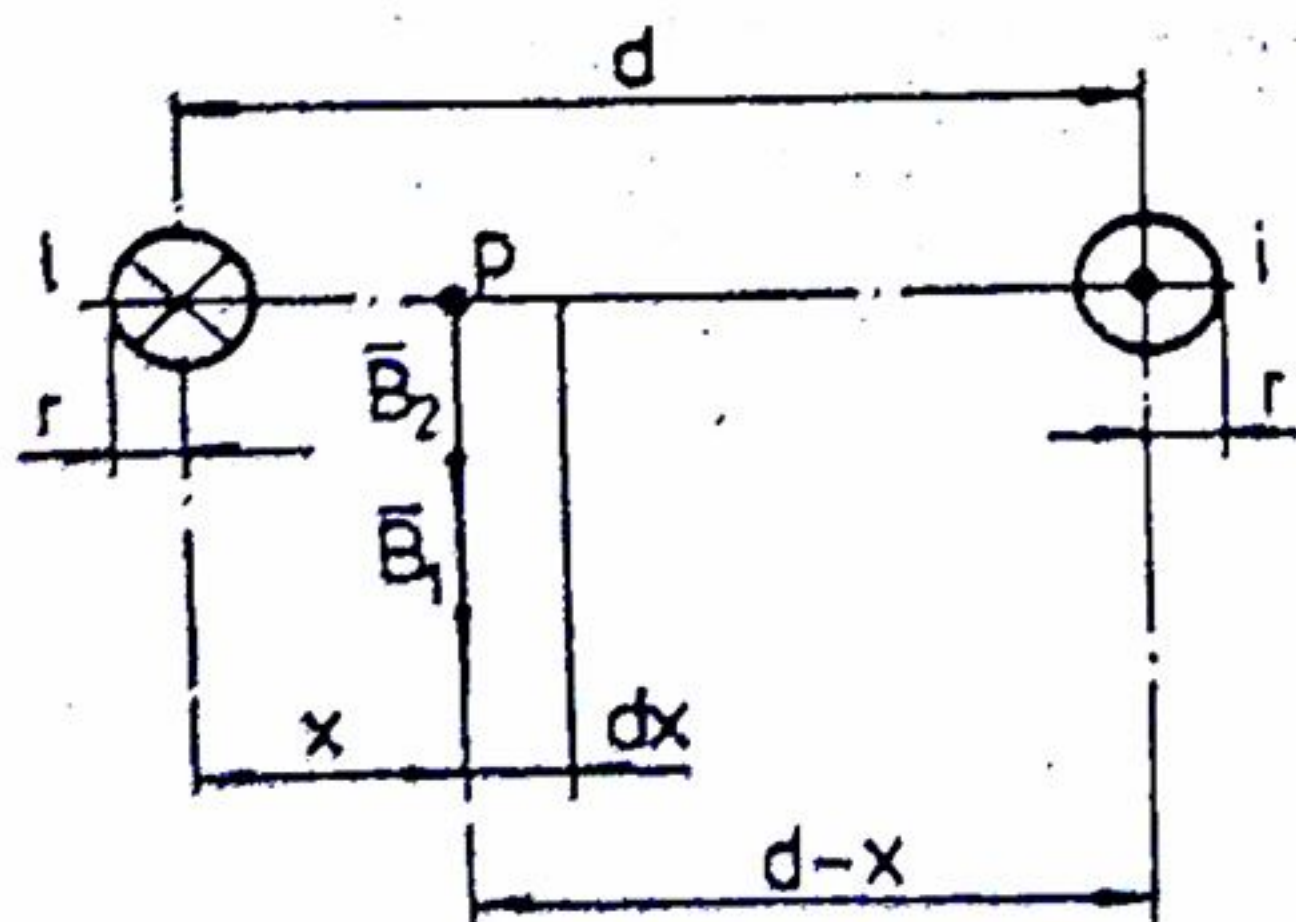


Fig.4.15

Inductivitatea proprie. Se consideră o linie aeriană bifilară (fig.4.15) cu raza conductoarelor  $r$  și distanța între ele  $d$ ;  $d \gg r$ .

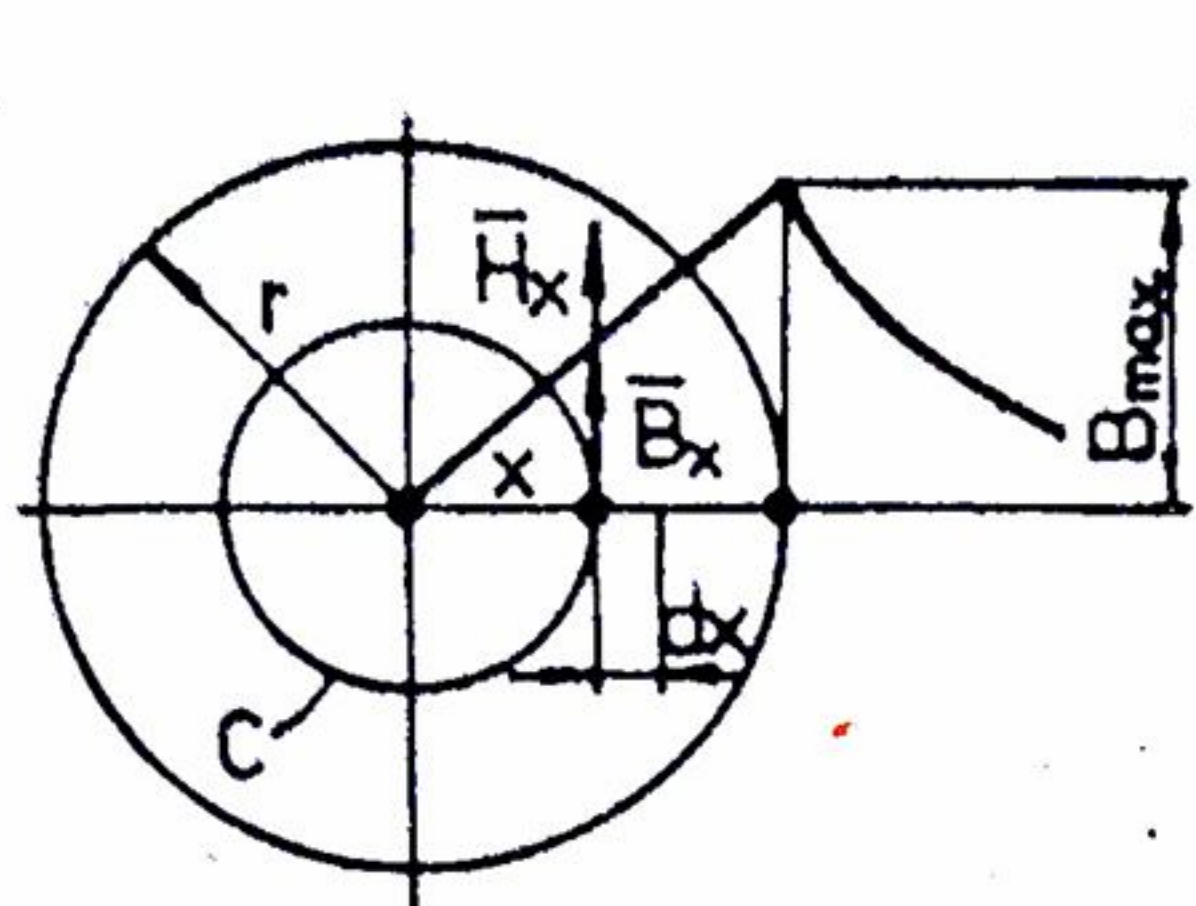
La distanța  $x$  respectiv  $(d-x)$  de axele conductoarelor, în punctul  $P$ , trecerea curentului  $i$  va produce inducțiile  $B_1$  și respectiv  $B_2$ , conform teoremei Biot-Savart-Laplace:  $B_1 = \mu \frac{i}{2\pi x}$  și  $B_2 = \mu \frac{i}{2\pi(d-x)}$ .

Dacă  $l$  este lungimea liniei, atunci fluxul

dintre conductoare este :

$$\phi = \int_r^{d-r} (B_1 - B_2) l dx = \mu \frac{l i}{2\pi} \int_r^{d-r} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$





$$\begin{aligned}\phi &= \mu \frac{li}{2\pi} \int_r^{d-r} \frac{dx}{x} + \mu \frac{li}{2\pi} \int_r^{d-r} \frac{dx}{d-x}, \\ \phi &= \mu \frac{li}{2\pi} \ln \frac{d-r}{r}\end{aligned}\quad (4.70)$$

Inductivitatea exterioară  $L_e$  (între conductoare)

$$\text{are valoarea : } L_e = \frac{\phi}{i} = \mu \frac{l}{\pi} \ln \frac{d-r}{r} \quad (4.71)$$

Fig.4.16

Fluxul fascicular din interiorul conductorului

prin suprafața  $dS = dx dl$  (fig.4.16) este:

$$d\phi_{fx} = B_x dS = B_x dx dl \quad (4.72)$$

pe conturul C de rază x există intensitatea câmpului magnetic  $H_x$  și inducția magnetică  $B_x$ .

care se obțin din legea circuitului magnetic  $\oint_C H_x d\bar{l} = H_x 2\pi x = i_x = \frac{i}{\pi r^2} \pi x^2 = \frac{x^2}{r^2} i$ ,

unde  $i_x$  este curentul electric din interiorul conturului C. Rezultă :

$$H_x = \frac{ix}{2\pi r^2}; \quad B_x = \mu_i \frac{ix}{2\pi r^2} \quad (4.73)$$

Fluxul total prin suprafața radială de grosime  $dx$  se calculează cu relația cunoscută.

$\phi = N\phi_f$  ținând seama de expresia stabilită  $\oint_C \bar{H}_x d\bar{l} = \frac{x^2}{r^2} i$ , adică, se deduce

$$d\phi_x = \frac{x^2}{r^2} d\phi_{fx}.$$

Cu (4.72) rezultă, succesiv :

$$\begin{aligned}d\phi_x &= \frac{x^2}{r^2} B_x dx dl = \mu_i \frac{x^2 idl}{2\pi r^4} & d\phi_i &= \int_0^r d\phi_x = \mu_i \frac{idl}{2\pi r^4} \int_0^r x^3 dx = \mu_i \frac{idl}{8\pi} \\ \phi_i &= \int_0^l d\phi_i = \int_0^l \mu_i \frac{idl}{8\pi} = \mu_i \frac{il}{8\pi}\end{aligned}\quad (4.74)$$

Inductivitatea interioară  $L_i$  are valoarea

$$L_i = \frac{\phi_i}{i} = \mu_i \frac{l}{8\pi}, \quad (4.75)$$

iar inductivitatea proprie totală a liniei (cu  $\mu = \mu_0 \mu_{rac} = \mu_0$  și  $\mu_i = \mu_0 \mu_n$ ) este :

$$L = L_e + 2L_i = \mu_0 \frac{l}{4\pi} \left( 4 \ln \frac{d-r}{r} + \mu_{ri} \right). \quad (4.76)$$

Pe lungimea de 1 km de linie, inductivitatea proprie a liniei aeriene cu două conductoare se calculează, cu formula practică :



$$L = \left( 4 \ln \frac{d-r}{r} + \mu_{ri} \right) 10^{-4} \text{ H / km.} \quad (4.77)$$

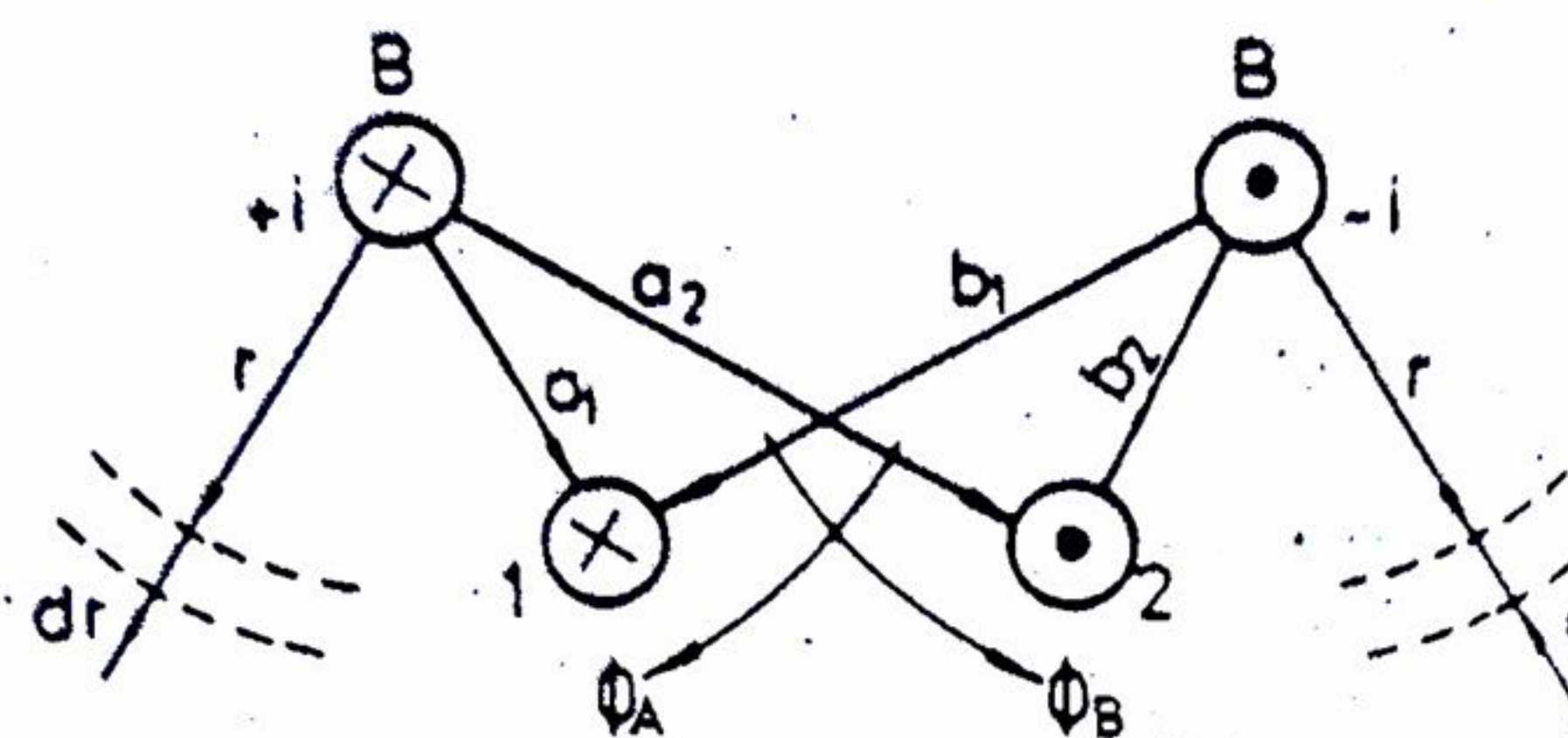


Fig. 4.17

Ţiile magnetice ale câmpului la distanţa  $r$ , conform teoremei Biot-Savart-Laplace.

$B_A = \mu \frac{i}{2\pi r}$ ;  $B_B = \mu \frac{-i}{2\pi r}$ , rezultă fluxurile prin ariile cuprinse între conductoarele 1 şi

2 (lungimea liniilor fiind 1):  $\phi_A = \int_{a_1}^{a_2} B dS = \int_{a_1}^{a_2} B dr = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$ ;  $\phi_B = \int_{b_1}^{b_2} B_B dr = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{b_1}{b_2}$ .

Fluxul total al liniei A, B care îmbrăţişează linia 1, 2 este:  $\phi = \phi_A - \phi_B = \mu \frac{il}{2\pi} \ln \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$

Rezultă inductivitatea mutuală:  $M = \frac{\phi}{i} = \mu \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$  (4.78)

sau, pe lungimea de 1 km, cu  $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0$ :

$$M = 2 \cdot 10^{-4} \ln \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}, [\text{H / km}]. \quad (4.79)$$

## 4.4 ENERGIA CÂMPULUI MAGNETIC ŞI ELECTROMAGNETIC

### 4.4.1 Energia câmpului magnetic

Se consideră că sistemul (de exemplu o bobină) aflat în câmpul magnetic nu efectuează deplasări.

Se poate arăta că energia magnetică înmagazinată în bobina cu inductivitatea  $L$  şi fluxul total  $\phi = Li$ , în timpul  $dt$  este :

$$dW_m = i d\phi \quad (4.80)$$

sau :  $dW_m = i(idL + Ldi)$  (4.81)

Dacă inductivitatea bobinei este constantă,  $dL = 0$  şi (4.81) devine :

$$dW_m = L di. \quad (4.82)$$



Ultima relație se integrează și se obține  $W_m = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2$  sau, ținând seama

de  $\phi = Li$  rezultă pentru o bobină :  $W_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$ . (4.83)

Pentru mai multe bobine, energia magnetică totală înmagazinată este

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \phi_j i_j \quad (4.84)$$

sau, forma dezvoltată :

$$W_m = \frac{1}{2} (\phi_1 i_1 + \phi_1 i_2 + \dots + \phi_2 i_1 + \phi_2 i_2 + \dots + \phi_3 i_1 + \phi_3 i_2 + \dots). \quad (4.85)$$

în care, se recunoaște :

$$\phi_1 i_1 = L_{11} i_1 i_1 = L_1 i_1^2, \phi_1 i_2 = L_{21} i_1 i_2, \phi_2 i_1 = L_{12} i_2 i_1, \text{ etc.} \quad (4.86)$$

Pentru două bobine :

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (4.87)$$

unde :  $L_1 = L_{11}$ ,  $L_2 = L_{22}$ ,  $M = L_{12} = L_{21}$ .

Energia câmpului magnetic este localizată (distribuită) în tot domeniul de câmp, cu o densitate de volum  $W_{m0}$ , care se determină ușor în cazul unui tor cu secțiunea  $S$ , lungimea medie  $l_0$  și numărul de spire  $N$ , prin care circulă curentul  $i$  :  $dW_{m0} = \frac{dW_m}{S l_0}$ .

Cu (4.80), ultima relație devine :  $dW_{m0} = \frac{i d\phi}{S l_0} = \frac{N i}{l_0} d\left(\frac{\phi}{N S}\right) = H dB$  (4.88)

sau, sub formă integrală  $W_{m0} = \int_0^B H dB$  (4.89)

În medii liniare  $B = \mu H$ , deci din ultima relație se obține :

$$W_0 = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} H B. \quad (4.90)$$

Deși relația (4.90) a fost obținută într-un caz particular, ea este generală, extinzându-se asupra tuturor mediilor magnetice liniare și în câmpuri magnetice neuniforme. Această relație este valabilă în cazul mediilor fără polarizare magnetică permanentă.

Dacă se cunoaște  $W_{m0}$  se poate calcula energia magnetică din integrala de volum

$$W_m = \int_V W_{m0} dV \quad (4.91)$$

unde  $dV$  este elementul de volum.

#### 4.4.2 Teorema forțelor generalizate în câmpul magnetic

Se poate arăta că dacă în timpul elementar  $dt$ , corpul (sistemul, circuitului, sau o parte a circuitului) se deplasează în câmp cu distanța elementară  $dx$ , sub acțiunea forței



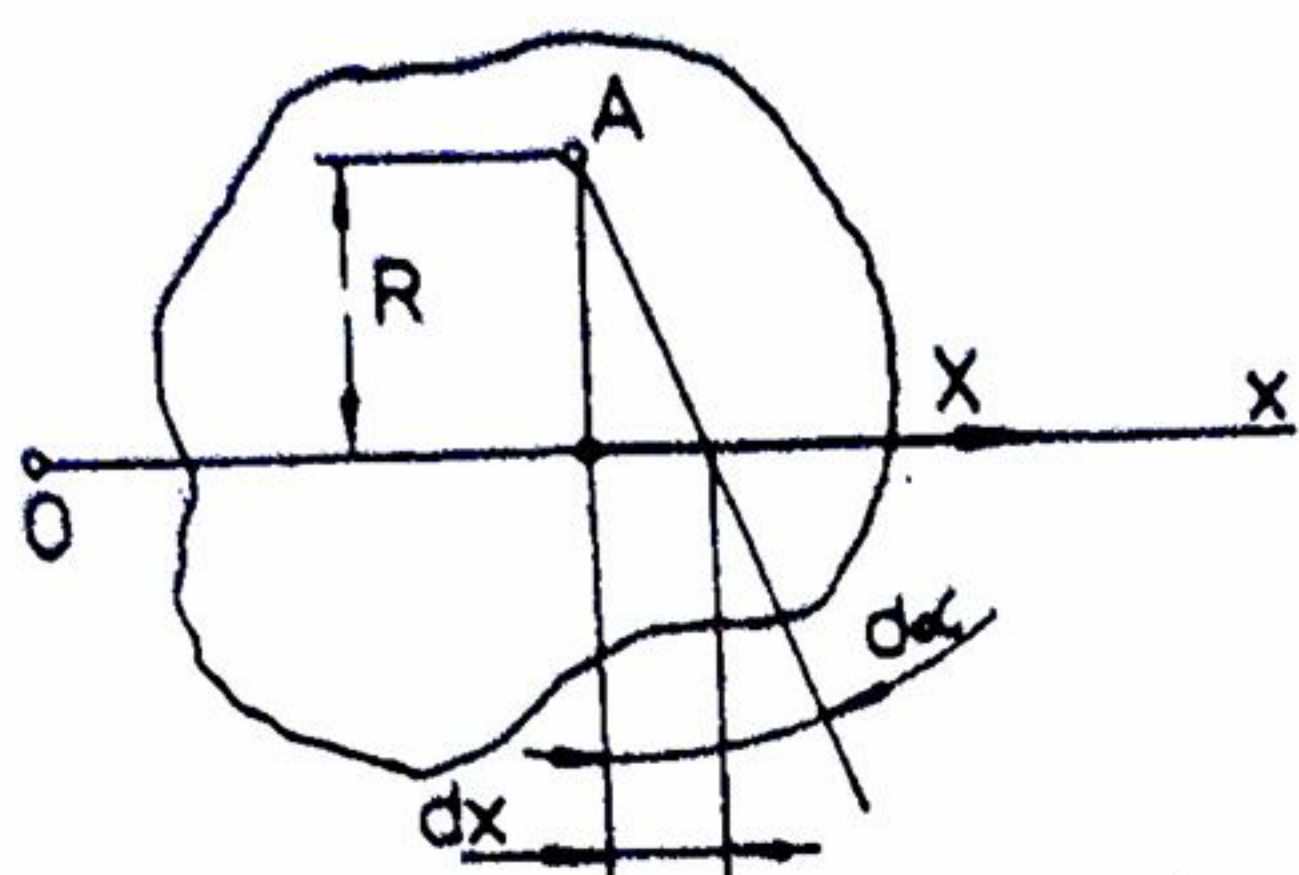


Fig. 4.18

generalizate  $X$ , se efectuează lucrul mecanic elementar  $dL_m$  egal cu variația energiei sistemului în timp  $dt$ :  $dL_m = XdX = dW_m$ .

$$\text{de unde rezultă: } X = \pm \frac{dW_m}{dx} \quad (4.92)$$

care reprezintă teorema forțelor generalizate în câmpul magnetic, luat cu semnul (+) la curent constant și cu (-) la fluxul magnetic constant. Dacă sistemul asupra căruia

acționează forța generalizată are o axă fixă (A), iar distanța de la axă la suportul forței este R (fig. 4.18), se crează un cuplu activ:  $M = RX = R \frac{dW_m}{dx}$  (4.93)

$$\text{sau, observând că } R d\alpha \approx dx, \text{ rezultă: } M = \frac{dW_m}{d\alpha} \quad (4.94)$$

adică, cuplul de rotație al unui sistem material cu o axă fixă, situat în câmpul magnetic, este egal cu derivata parțială a energiei magnetice în raport cu unghiul de rotație  $\alpha$  (considerat coordonată generalizată).

#### 4.4.3 Forța de atracție a unui electromagnet

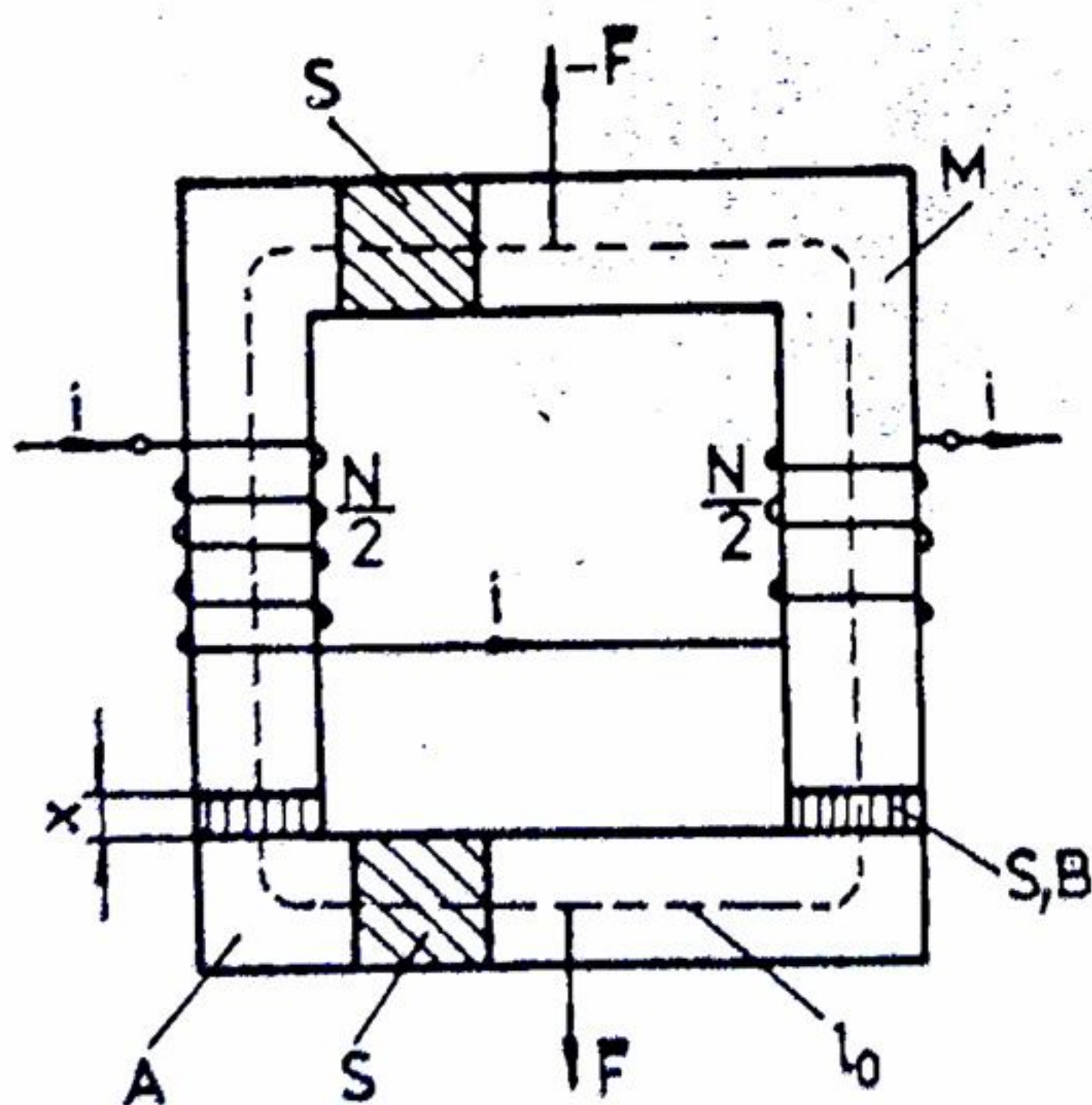


Fig. 4.19

Se consideră un electromagnet cu lungimea medie  $l_0$ , secțiunea  $S$  pe care sunt înfășurate  $N$  spire, prin care circulă curentul  $i$ . Armătura A este situată la distanța  $x$  de piesele polare ale electromagnetului (fig. 4.19). Forța portantă  $\bar{F}$ , cu punctul de aplicație în centrul armăturii A, are valoarea dublă față de forța de atracție  $X$  realizată de una din piesele polare ale electromagnetului. Dacă  $x$  este suficient de mic pentru a se neglija fluxul de scăpări și miezul feromagnetic M nesaturat din punct de vedere magnetic, se poate considera fluxul  $\phi$  constant, iar din (4.92) și (4.83) rezultă succesiv:

$$X = - \frac{dW_m}{dx} = - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{l} \right), \quad (4.95)$$

$$X = - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \phi^2 \frac{\sum R_m}{N^2} \right), \quad X = - \frac{\phi^2}{2N^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{l_0}{\mu S} + \frac{x}{\mu_0 S} \right), \quad X = - \frac{\phi^2}{2\mu_0 N^2 S} = - \left( \frac{\phi}{NS} \right)^2 \frac{S}{2\mu_0},$$

$$X = - \frac{B^2 S}{2\mu_0} = -4 \cdot 10^5 B^2 S \quad (4.96)$$



## 4.5 CIRCUITE MAGNETICE

### 4.5.1 Magnetizarea materialelor feromagnetice

Un corp feromagnetic, inițial neutru din punct de vedere magnetic, se magnetizează proporțional cu permeabilitatea magnetică relativă :

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \quad (4.97)$$

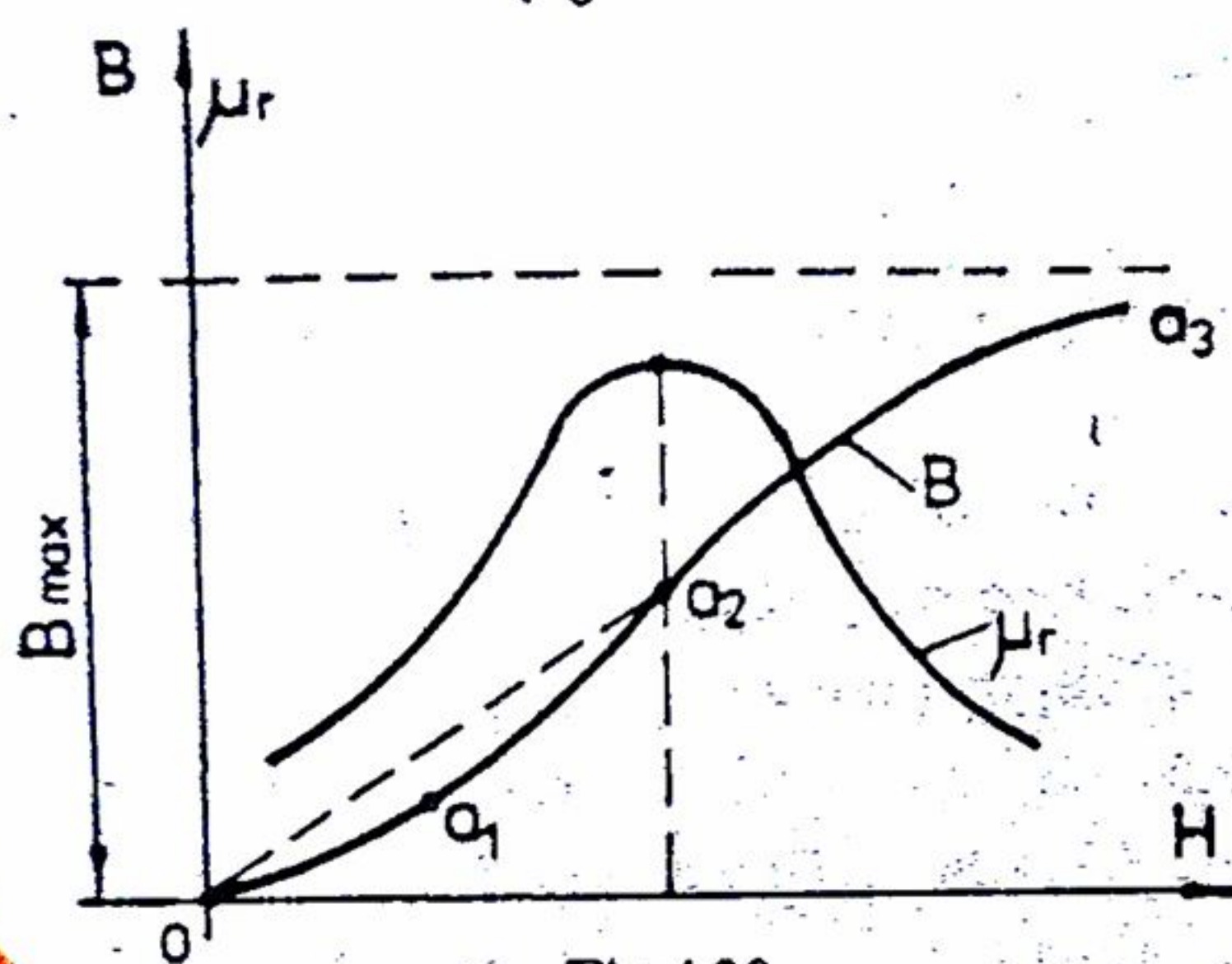


Fig. 4.20

reprezentată în fig. 4.20. Aici s-a reprezentat și variația inducției magnetice  $B$  în funcție de intensitatea câmpului magnetic  $H$ . Porțiunea  $Oa_1$  are forma unei parabole, porțiunea  $a_1a_2$  este partea liniară, iar porțiunea  $a_2a_3$  este porțiunea de saturație; partea din jurul punctului  $a_2$  se numește cot de saturație. Crescând intensitatea câmpului magnetic  $H$ , până la o valoare maximă ( $H_{max}$ ) se obține ciclul liniar (fig. 4.22).

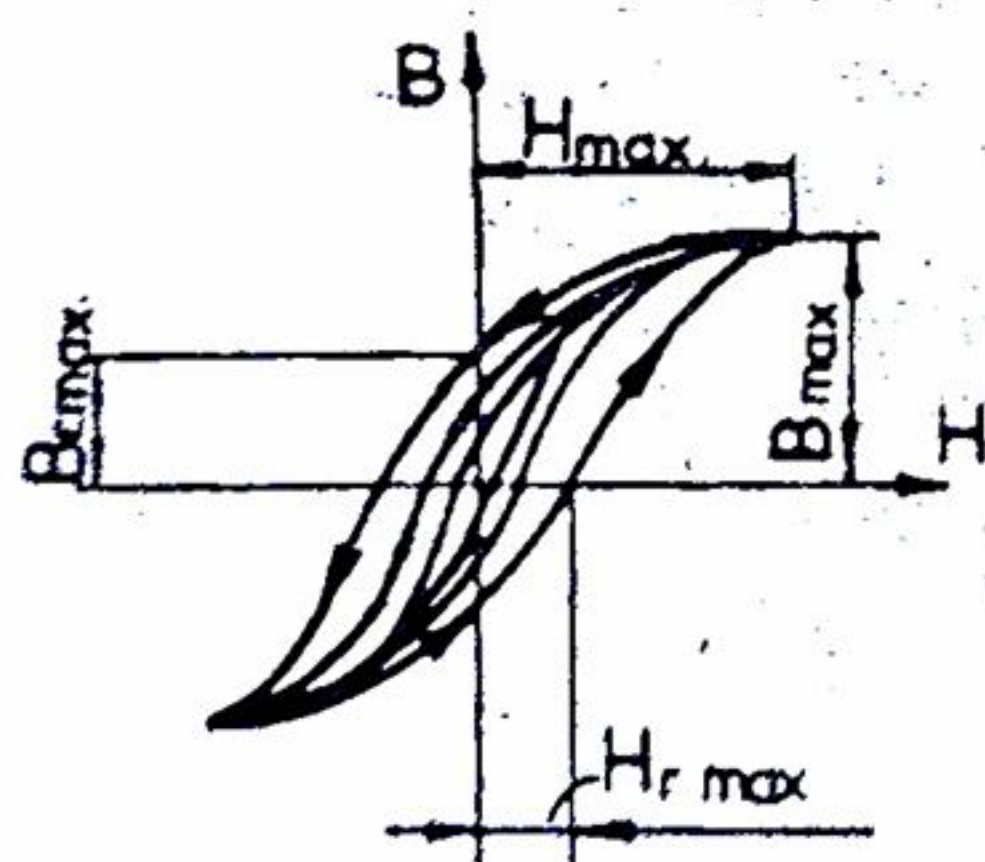


Fig. 4.21

Pentru demagnetizarea unui corp feromagnetic, acesta se introduce în câmp și se parcurg mai multe cicluri de histerezis deschise (fig. 4.22), micșorând continuu intensitatea câmpului magnetic  $H$ .

Se poate arăta că suprafața închisă de ciclul histerezis este proporțională cu energia specifică, necesară magnetizării corpului feromagnetic, care se transformă în căldură, constituind pierderile de magnetizare. Din

(4.90), în forma :  $W_{mo} = \frac{B^2}{2\mu}$ , se obține:

$$dW_{mo} = \frac{1}{2\mu} 2BdB = HdB \quad (4.98)$$

care, integrată pe conturul  $C$  al ciclului histerezis, devine (fig. 4.23):

$$W_{mo} = \oint_C HdB = KS. \quad (4.99)$$

În (4.99)  $K$  este o constantă [ $VAs/m^3$ ], iar  $S$  - suprafața închisă de ciclul histerezis [ $m^2$ ]. Relația

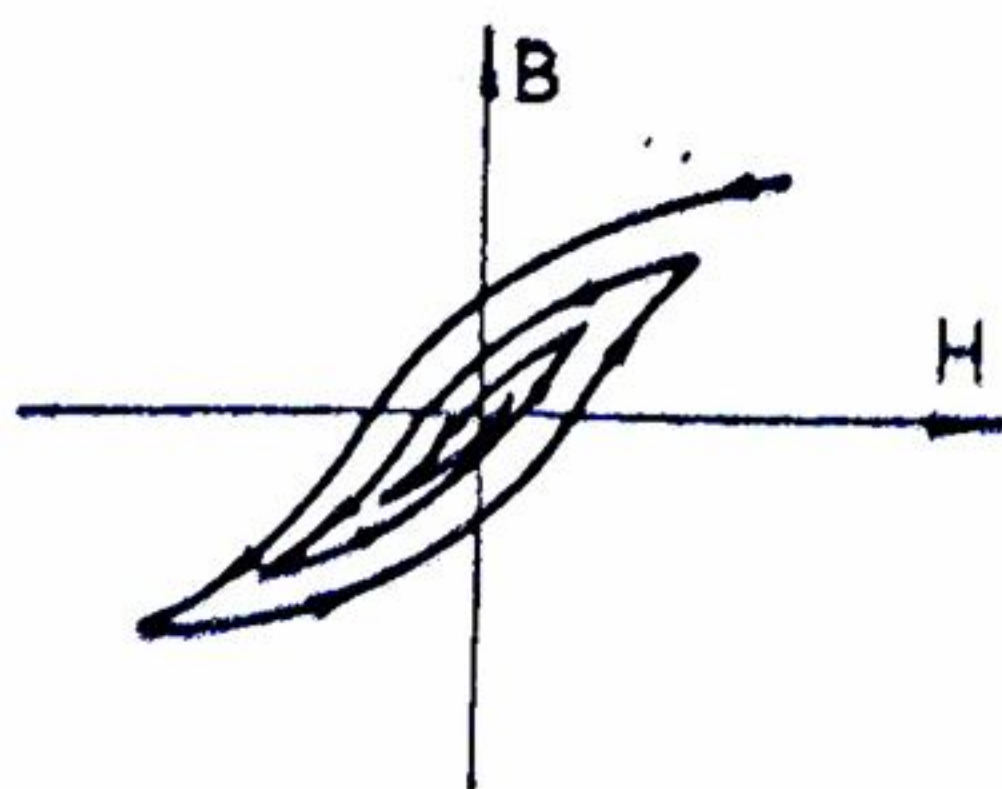


Fig. 4.22



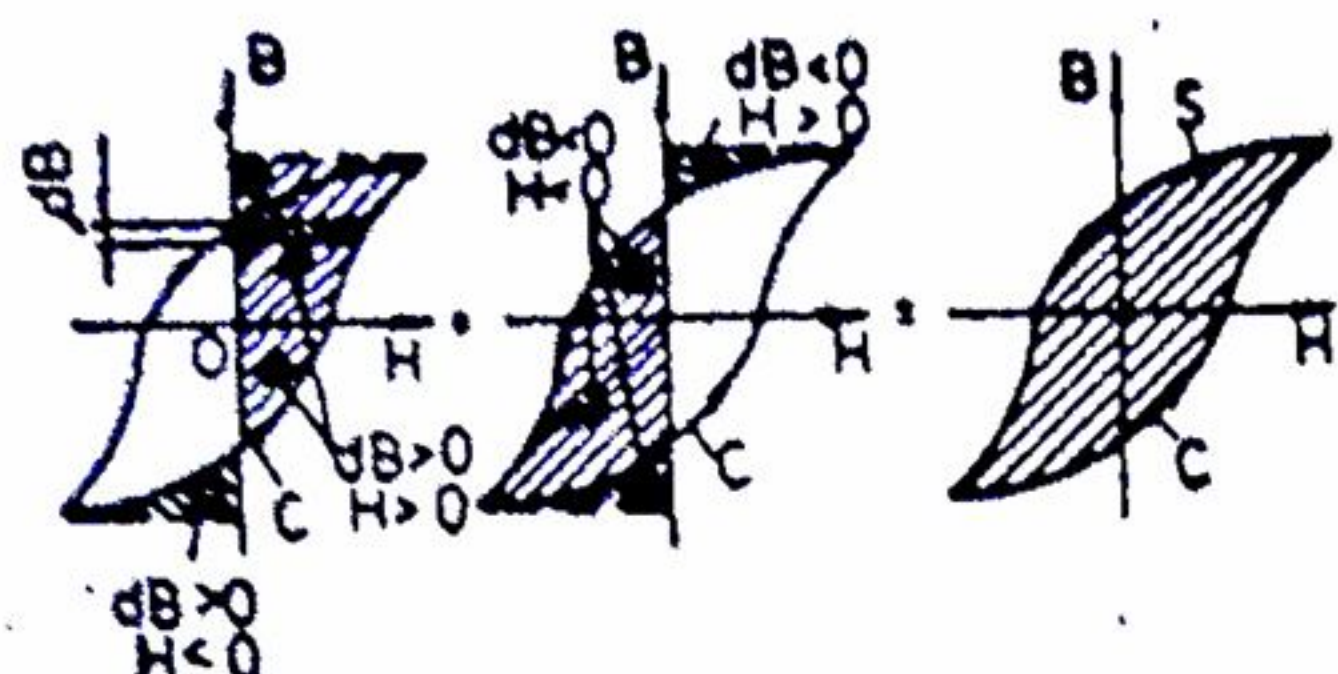


Fig. 4.23

calculează aria limitată de ramura descendentă a ciclului și axa OB, obținându-se zonele hașurate cu semnele respective (fig. 4.23.b). Se însumează algebric aceste arii și se obține aria ciclului (fig. 4.23.c) egală cu integrala din (fig. 4.99)

(4.99) exprimă energia specifică necesară magnetizării fierului și poate fi dedusă prin integrarea relației (4.98) pentru întreg ciclul histerezis din fig. 4.23. Astfel, se calculează aria limitată de ramura ascendentă a ciclului și axa OB, obținându-se zonele hașurate, cu semnele respective (fig. 4.23.a), apoi se

#### 4.5.2 Teorema refracției liniilor de câmp magnetic

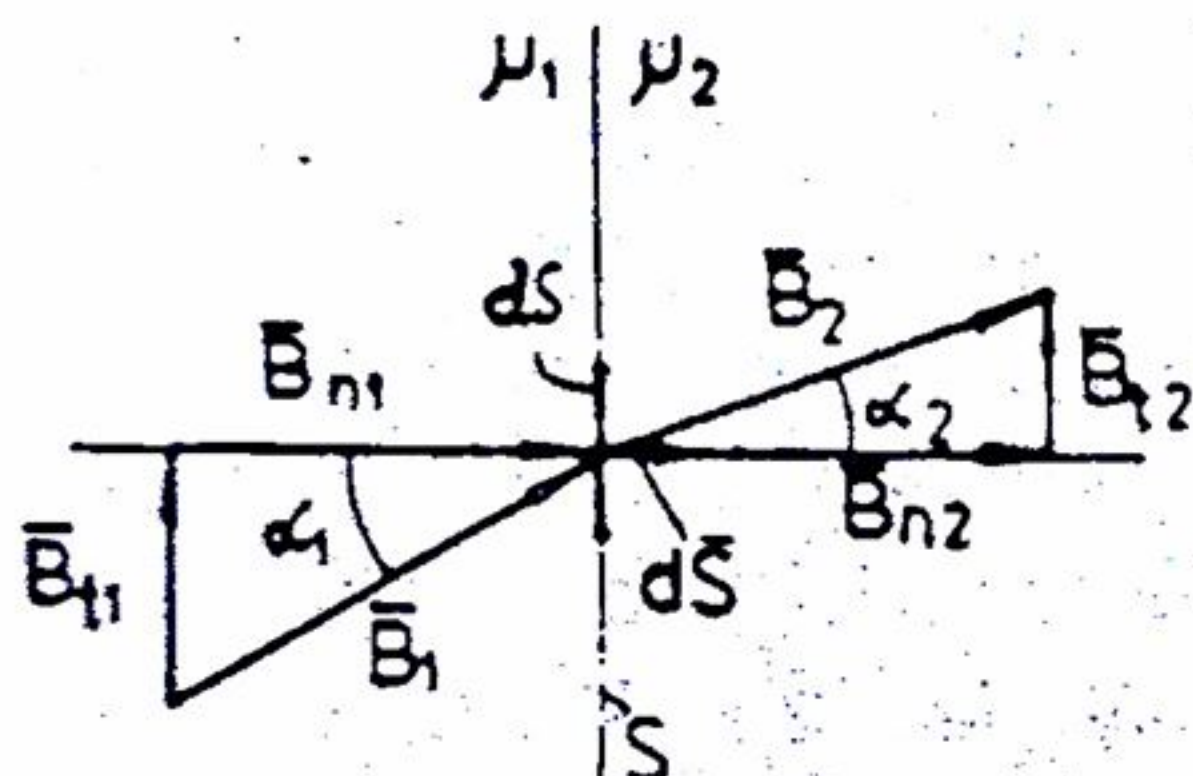


Fig. 4.24

Se consideră două medii magnetice cu permeabilitatea magnetică  $\mu_1$  și  $\mu_2$ , separate de o suprafață de discontinuitate S. Prin elementul de suprafață  $dS$  trec linii de câmp magnetic, cu inducția  $B_1$  în primul mediu și  $B_2$  - în mediul al doilea (fig. 4.24), care se descompun normal ( $B_{n1}, B_{n2}$ ) și tangențial ( $B_{t1}$  și  $B_{t2}$ ).

Fluxul magnetic elementar din suprafața elementară  $dS$  este  $d\phi = \bar{B}_1 d\bar{S} = \bar{B}_2 d\bar{S}$  sau, din fig. 4.24 rezultă egalitatea componentelor :

$$B_1 dS \cos \alpha_1 = B_2 dS \cos \alpha_2 \quad (4.100)$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (4.101)$$

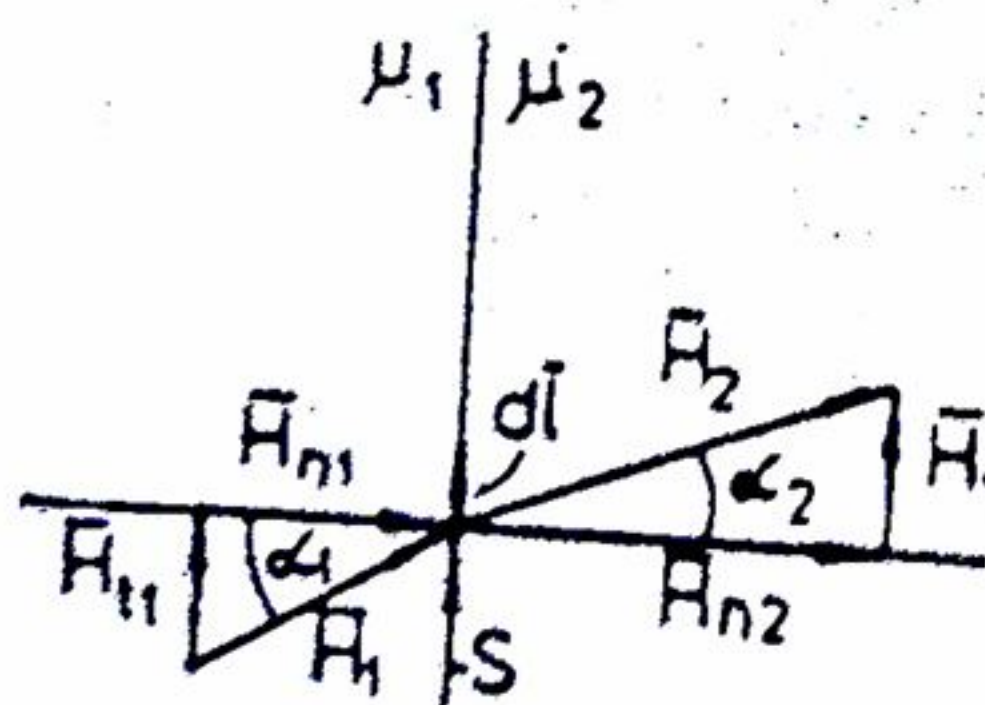


Fig. 4.25

Tensiunea magnetică  $dl$  este :  $dU_m = H_1 dl = H_2 dl$ .

sau, din fig. 4.25 rezultă componentele tangențiale  $H_1 dl \cos(90^\circ - \alpha_1) = H_2 dl \cos(90^\circ - \alpha_2)$ .

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (4.102)$$

Se observă că :  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}}$  și  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}}$ ,  $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{t1} B_{n2}}{B_{n1} B_{t2}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}}$

Dacă cele două medii magnetice sunt omogene și izotrope se poate scrie  $B_{t1} = \mu_1 H_{t1}$  și  $B_{t2} = \mu_2 H_{t2}$ , care înlocuite în relația precedentă se obține:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1 H_{t1}}{\mu_2 H_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \text{ Relația: } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (4.103)$$

reprezintă teorema refracției de câmp magnetic.

Dacă mediul 1 este aer ( $\mu_1 = \mu_0$ ) și mediul 2 este un circuit feromagnetic ( $\mu_2 \gg \mu_1$ ).



rezultă că  $\alpha_1$  tinde spre zero,  $\alpha_2$  spre  $90^\circ$ , adică pentru liniile de câmp magnetic din aer, suprafața circuitului feromagnetic este o suprafață echipotențială.

### 4.5.3 Circuite feromagnetice

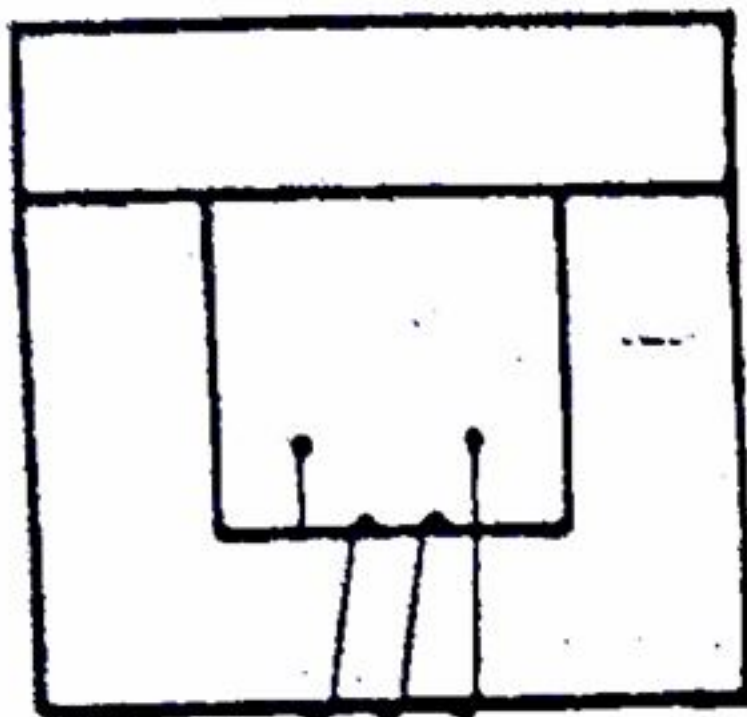


Fig. 4.26

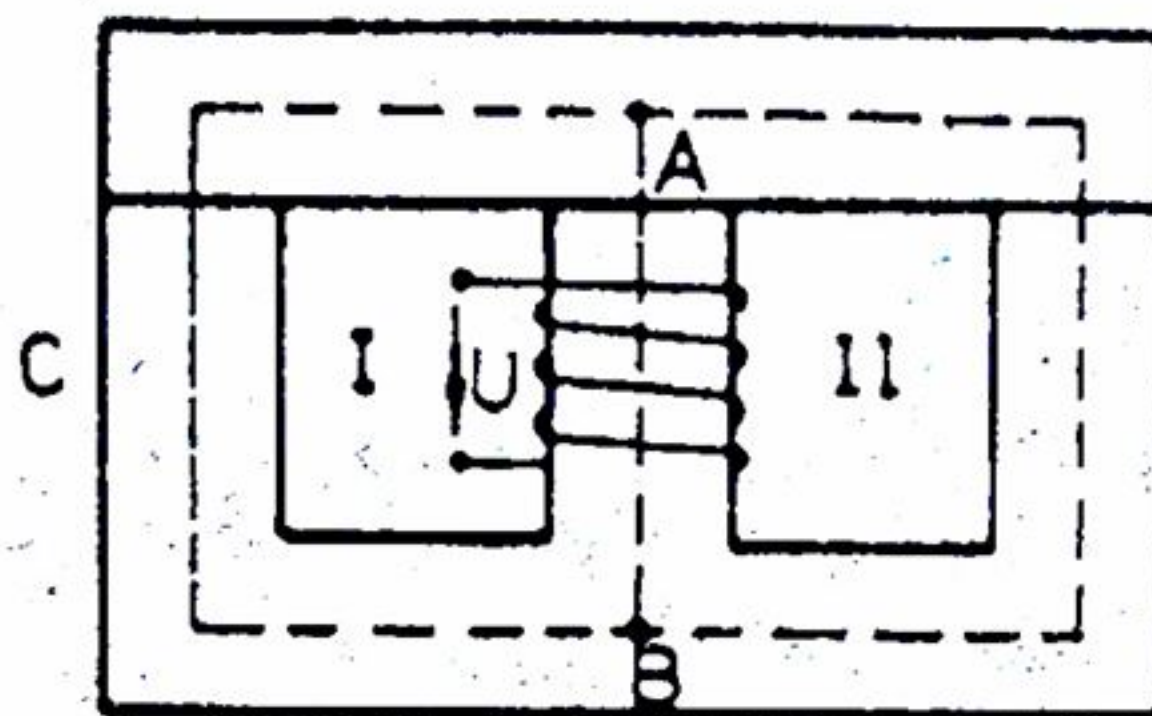


Fig. 4.27

Prin circuitul feromagnetic se înțelege un sistem de medii (conducte feromagnetice) prin care se poate închide un flux magnetic. Având permeabilități magnetică relativ mari.

conductele feromagnetice concentrează liniile de câmp magnetic, deci pentru producerea de fluxuri magnetice intense sunt necesare tensiuni magnetomotoare (t.m.m) relativ mici.

După forma lor geometrică, circuitele feromagnetice pot fi serie (fig. 4.26) sau derivație (fig. 4.27).

Înteruperile din lungul circuitului feromagnetic, ocupate de aer sau materiale nemagnetice se numesc întrefier, care de regulă reprezintă porțiuni utile ale circuitului.

Dacă permeabilitatea magnetică a circuitului este constantă și aceeași în toate punctele circuitului feromagnetic, atunci circuitul este liniar; în caz contrar circuitul este nelinier sau saturat.

La un circuit ramificat (fig. 4.27) distingem: noduri (A, B), laturi (ACB, AB, ADB) și ochiuri sau bucle (I, II): în funcție de tensiunea de magnetizare U, circuitul poate fi de curent continuu sau de curent alternativ.

### 4.5.4 Relații de bază utilizate în calculul circuitelor feromagnetice

1) Relația de dependență dintre inducția magnetică B, permeabilitatea magnetică  $\mu$  și intensitatea câmpului magnetic H:

$$B = \mu H \quad (4.104)$$

2) Relația dintre fluxul magnetic  $\phi$ , inducția magnetică B și secțiunea transversală S dintr-o conductă feromagnetică:

$$\phi = BS \quad (4.105)$$

3) Teorema întâia a lui Kirchhoff pentru circuite feromagnetice:

$$\sum \phi = 0 \quad (4.106)$$

Se enunță: Suma algebrică a fluxurilor magnetice dintr-un nod magnetic (fig. 4.28) este egală cu zero ( $-\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_n = 0$ ).



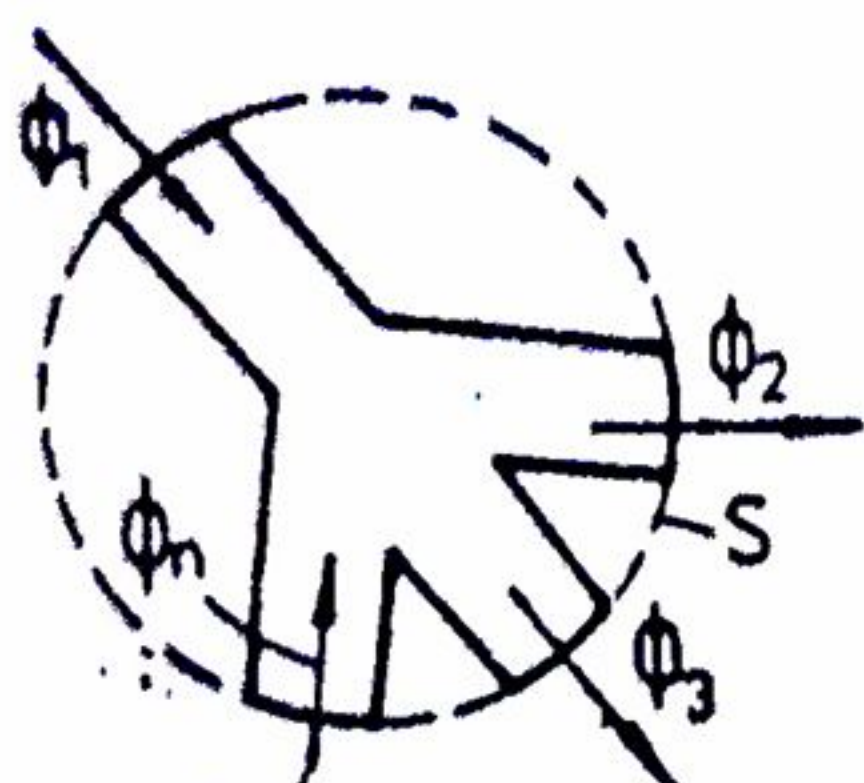


Fig. 4.28

4) Legea circuitului magnetic (legea lui Ampere) scrisă sub formă de sumă algebrică :

$$\sum_{j=1}^n H_j l_j = \sum N_i \quad (4.107)$$

sau în formă integrală:

$$\oint_c H d\vec{l} = U_m \quad (4.108)$$

5) Legea lui Ohm pentru circuite magnetice se deduce din

relația (4.107):  $\sum H l = U_m$ ;  $\sum \frac{B l}{\mu} = \sum \frac{B S l}{\mu S} = \Phi \sum \frac{l}{\mu S} = U_m$  sau:

$$\Phi R_m = U_m \quad (4.109)$$

În legea lui Ohm pentru circuite magnetice  $\Phi$  este fluxul magnetic fascicular, fără dispersie,  $R_m$  - reluctanța magnetică a unor tronsoane de conducte feromagnetice, iar  $U_m$  - t.m.m. între punctele între care se calculează  $R_m$ .

6) Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite magnetice se poate scrie în două variante:

$$\sum H l = \sum N i; \quad (4.110)$$

$$\sum \Phi R_m = \sum N i. \quad (4.111)$$

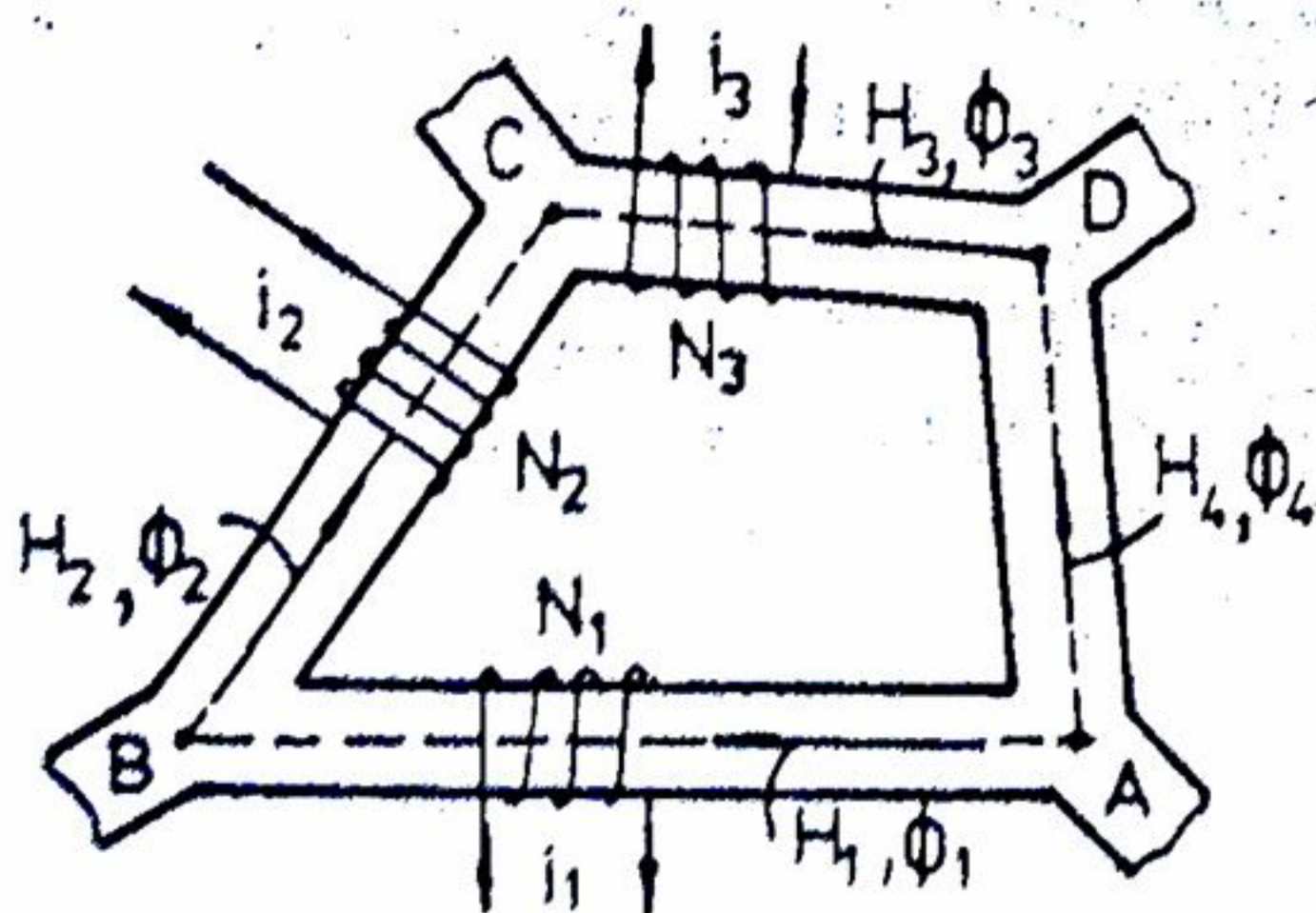


Fig. 4.29

Pentru bucla magnetică din fig. 4.29 se scrie cu (4.110):

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 - H_3 l_3 - H_4 l_4 = N_1 i_1 + N_2 i_2 - N_3 i_3$$

sau cu (4.111), sensul unui flux  $\Phi_i$  fiind același cu sensul câmpului  $H_i$ :

$$\Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 R_{m2} - \Phi_3 R_{m3} - \Phi_4 R_{m4} = N_1 i_1 + N_2 i_2 - N_3 i_3$$

în care  $l_1, l_2, l_3$  și  $l_4$  sunt distanțele între punctele AB, BC, CD și DA iar  $R_{mi}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sunt reluctanțele magnetice între aceleși puncte (noduri magnetice).

7) Reluctanța magnetică echivalentă a mai multor laturi conectate în serie este egală cu suma reluctanțelor laturilor respective

$$R_m = \sum_{j=1}^n R_{mj} \quad (4.112)$$

iar reluctanța magnetică echivalentă a mai multor laturi conectate în paralel este dată de relația :

$$\frac{1}{R_m} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{mj}} \quad (4.113)$$



sau, folosind permanențele magnetice, (4.113) se scrie:

$$\Lambda_m = \sum_{j=1}^n \Lambda_{mj} \quad (4.114)$$

#### 4.5.5 Calculul circuitelor feromagnetice liniare

La circuitele feromagnetice liniare se consideră permeabilitatea magnetică constantă și aceeași în toate punctele miezului și circuitului util, adică se consideră liniară curba de magnetizare a materialului din care este construit circuitul. La aceste circuite, mărimile necunoscute se determină cu ajutorul relațiilor (4.104) ... (4.114).

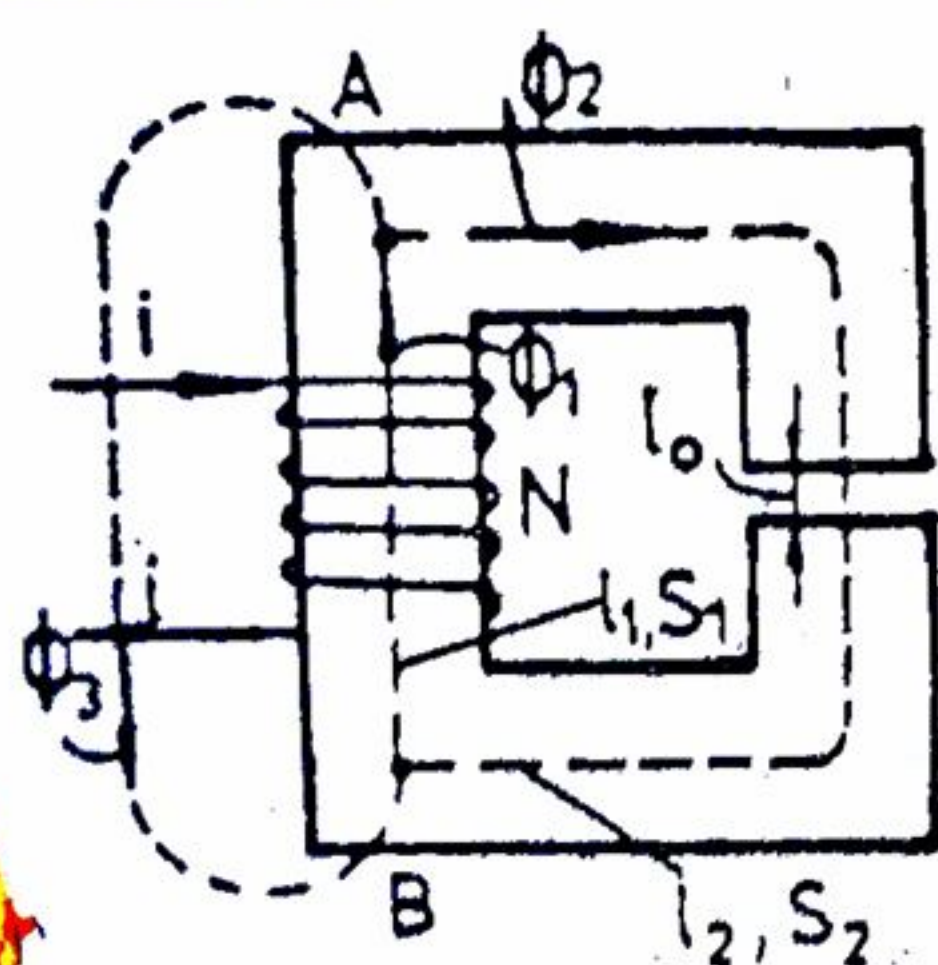


Fig. 4.30

Pentru  $l_0 = 0$ :

Fluxul de scăpări este  $\phi_3 = 0,2\phi_1$ , fluxul util este  $\phi_2 = 0,8\phi_1$ , iar reluctanțele

respective sunt  $R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} = \frac{5 \cdot 10^6}{6\pi} \text{ H}^{-1}$ ,  $R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S_2} = \frac{10^8}{24\pi} \text{ H}^{-1}$ .

Din teorema a doua a lui Kirchhoff, scrisă pentru circuitul util și pentru circuitul de scăpări,  $\phi_1 = R_{m1} + 0,8\phi_1 R_{m2} = Ni$ ,  $\phi_1 R_{m1} + 0,2\phi_1 R_{m3} = Ni$  rezultă, după egalarea

expresiilor:  $R_{m3} = 4R_{m2} = \frac{10^8}{6\pi} \text{ H}^{-1}$ .

Reluctanța echivalentă a întregului circuit feromagnetic este

$$R_m = R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{10^8}{24\pi} \text{ H}^{-1}$$

Fluxul total este:  $\phi_1 = \frac{Ni}{R_m} = 14,4\pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$  și, deci, celelalte mărimi magnetice:

$$\phi_2 = 0,8\phi_1 = 11,52\pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \phi_3 = 0,2\phi_1 = 2,88\pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, B_1 = \frac{\phi_1}{S_1} = 0,576\pi \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$



$$B_2 = \frac{\phi_2}{S_2} = 0,576\pi \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}, H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_r} = 2400 \text{ A/m}, H_2 = \frac{B_2}{\mu_0\mu_r} = 2400 \text{ A/m}.$$

Pentru  $l_0 = 10 \text{ mm}$ :

Calculul este similar. Se modifică (crește) reluctanța echivalentă  $R_m$ , deoarece

$$\text{crește reluctanța circuitului util: } R_{m20} = \frac{l_2}{\mu_0\mu_r S_2} + \frac{l_0}{\mu_0 S_2} = \frac{10^8}{6\pi} \text{ H}^{-1}.$$

Se menține proporția fluxului de scăpări, deci se menține și relația  $R_{m3} = 4R_{m20}$ , iar

$$\text{reluctanța echivalentă este: } R_{m0} = R_{m1} + \frac{R_{m20} 4R_{m20}}{R_{m20} + 4R_{m20}} = \frac{17 \cdot 10^7}{12\pi} \text{ H}^{-1}.$$

$$\text{Fluxul total este } \phi_{10} = \frac{Ni}{R_{m0}} = \frac{72\pi}{17} 10^{-4} \text{ Wb} < \phi_1, \text{ și deci celelalte mărimi}$$

$$\text{magnetice: } \phi_{20} = 0,8\phi_{10} = 3,38\pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \quad \phi_{30} = 0,2\phi_{10} = 0,844\pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

$$B_{10} = \frac{\phi_{10}}{S_1} = 0,169\pi \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}, \quad B_{20} = \frac{\phi_{20}}{S_2} = 0,169\pi \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}, \quad H_{10} = H_{20} = \frac{B_{10}}{\mu_0\mu_r} = 705 \text{ A/m}.$$

Se constată egalitatea rapoartelor

$$\frac{R_{m0}}{R_m} = \frac{\phi_1}{\phi_{10}} = \frac{\phi_2}{\phi_{20}} = \frac{B_1}{B_{10}} = \frac{B_2}{B_{20}} = \frac{H_1}{H_{10}} = \frac{H_2}{H_{20}} = 3,4$$

#### 4.5.6 Calculul circuitelor feromagnetice neliniare

La circuitele neliniare permeabilitatea magnetică nu este constantă, deci curba de magnetizare a materialului din care este construit circuitul este neliniară. Calculul acestor circuite se efectuează cu ajutorul relațiilor (4.104) ... (4.114) și a dependenței grafice  $B = f(H)$ , pe baza elementelor și datelor inițiale, care, de regulă sunt: dimensiunile geometrice, natura materialului circuitului (deci curba de magnetizare) și, fie fluxurile (sau alte mărimi magnetice) din laturile circuitului, fie numărul amper-spire. Există două categorii de probleme referitoare la circuitele feromagnetice neliniare.

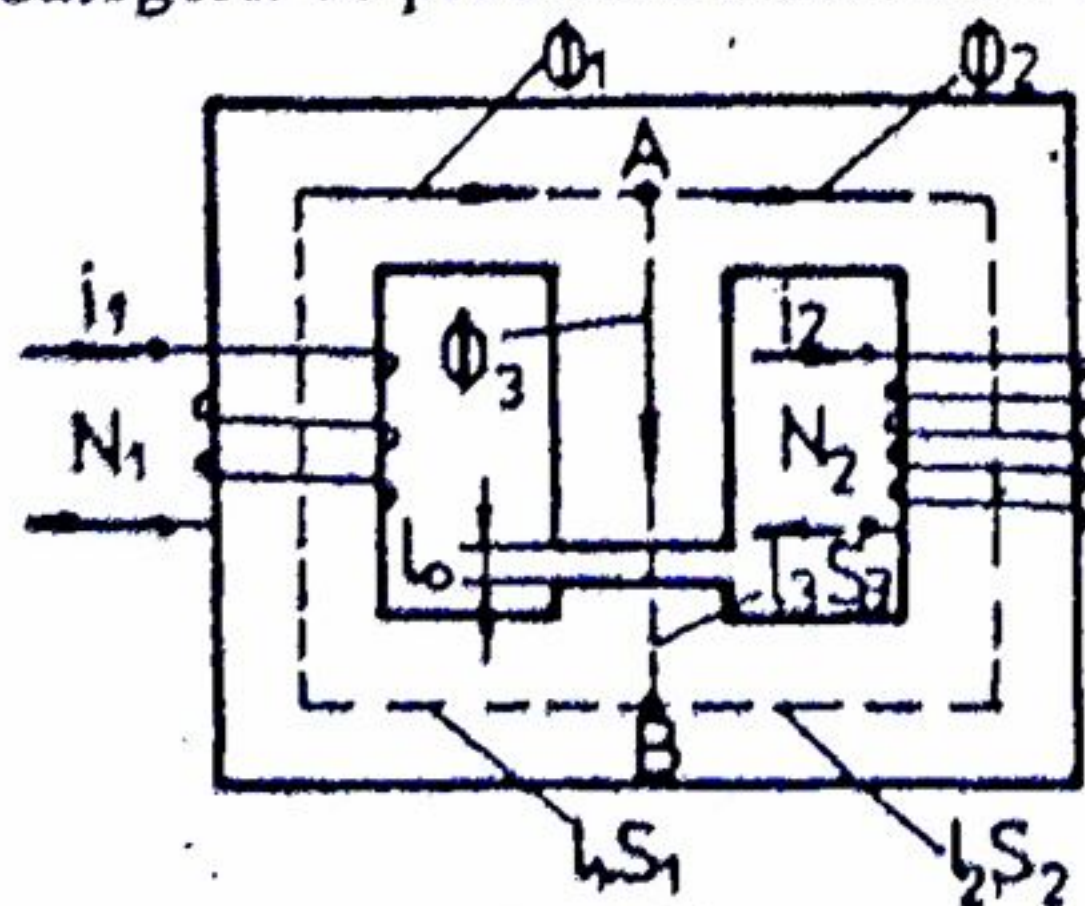


Fig.4.31

1). Dacă se cunosc fluxurile  $\phi$  din laturile circuitului, se pot determina inducțiile magnetice ( $B = \phi/S$ ), intensitățile câmpului magnetic  $H$  din curbele de magnetizare,  $H = f(B)$ , și apoi, se calculează numărul de amper-spire (solenajile) din sistemul de ecuații, rezultate din aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff pentru circuite feromagnetice.

Aplicația 1. Să se rezolve circuitul feromagnetic din fig.4.31 în care:  $l_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $l_2 = 40 \text{ cm}$ ,  $l_3 = 20 \text{ cm}$ .



$l_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $S_1 = S_3 = 25 \text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $\phi_1 = 2 \text{ mWb}$ ,  $\phi_2 = 1 \text{ mWb}$ , iar materialul este oțel laminat la rece în tole de transformator de 0,5 mm.

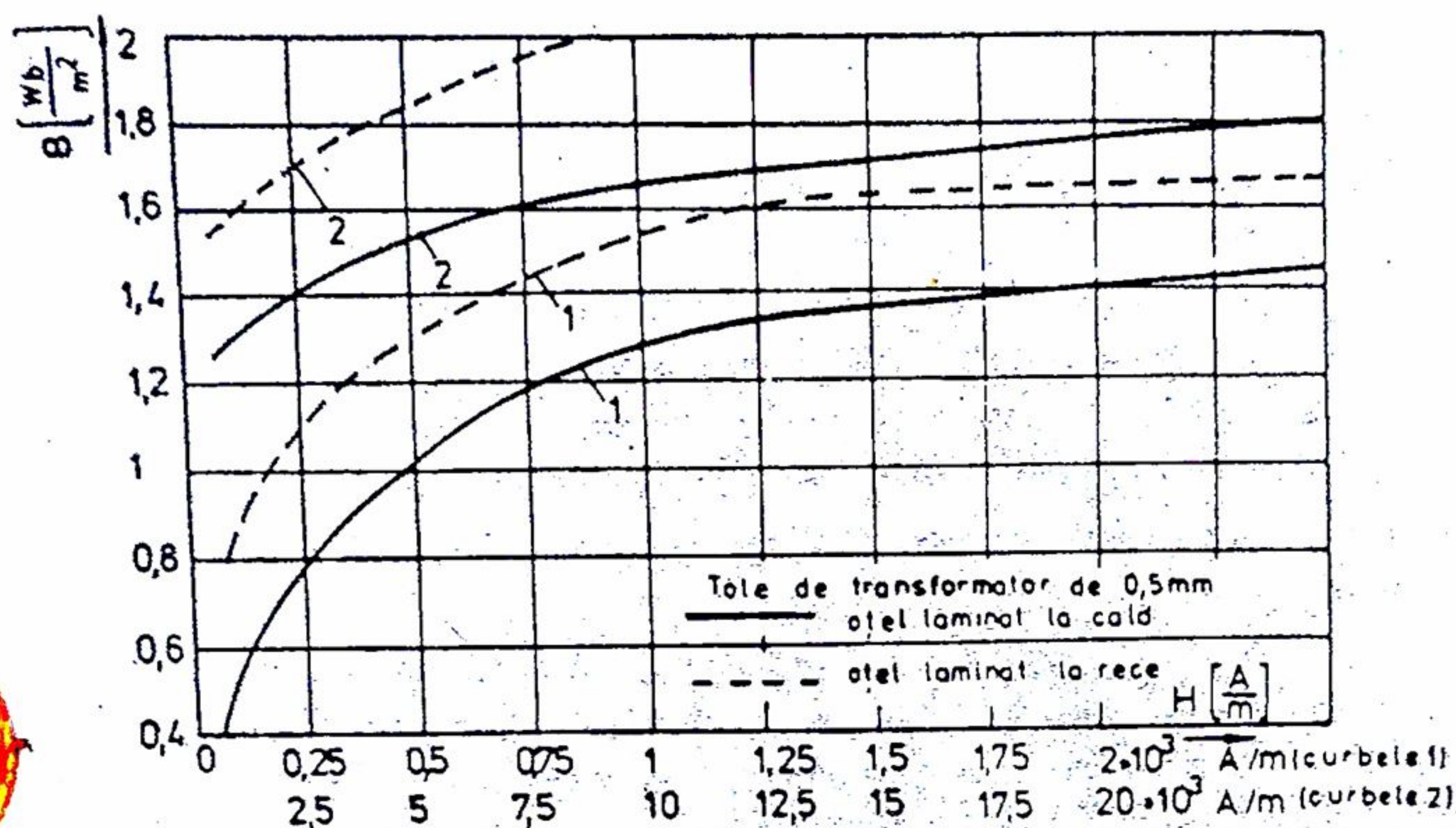


Fig.4.32

Fluxul în latura centrală este:  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = 3 \text{ mWb}$ . Se calculează

$$\text{inducțiile: } B_1 = \frac{\phi_1}{S_1} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 0,8 \text{ Wb/m}^2, B_2 = \frac{\phi_2}{S_2} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ Wb/m}^2,$$

$$B_3 = \frac{\phi_3}{S_3} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Wb/m}^2. \quad \text{Din fig.4.32 pentru oțel laminat la rece (curba 1$$

punctată) se deduc intensitățile câmpului magnetic:  $H_1 = 80 \text{ A/m}$ ,  $H_2 = 200 \text{ A/m}$ ,  $H_3 = 360 \text{ A/m}$ . Intensitatea câmpului magnetic în interfier este:

$$H_0 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 9,6 \cdot 10^5 \text{ A/m}.$$

Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru buclele din fig.4.31 și se obțin produsele  $Ni$ :  $H_3 l_3 + H_1 l_1 + H_0 l_0 = N_1 i_1 = 2032 \text{ A}$ ;  $H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 l_0 = N_2 i_2 = 2072 \text{ A}$ .

În lipsa întrefierului (adică pentru:  $l_0 = 0$ ), ar fi fost necesare solenații ( $Ni$ ) mult mai mici:  $N_{10} i_{10} = H_1 l_1 + H_3 l_3 = 112 \text{ A}$ ;  $N_{20} i_{20} = H_2 l_2 + H_3 l_3 = 152 \text{ A}$ .

Permeabilitățile magnetice ale ramurilor sunt:  $\mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{0,8}{80} = 10^{-2} \text{ H/m}$ ,

$$\mu_2 = \frac{B_2}{H_2} = \frac{1}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}, \mu_3 = \frac{B_3}{H_3} = \frac{1,2}{360} = \frac{1}{3} 10^{-2} \text{ H/m}, \text{ iar reluctanțele}$$



conductelor feromagnetice au valorile:  $R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = 2 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}$ ,

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} = 8 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}, R_{m3} = \frac{l_1}{\mu_3 S_3} + \frac{l_0}{\mu_0 S_3} = 66,4 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}.$$

Tensiunea magnetică între nodurile magnetice A și B (fig.4.31) este:  $U_{mAB} = \phi_3 R_{m3} = 1992 \text{ A}$ .

Aceeași valoare se obține și cu relațiile:  $U_{mAB} = N_1 i_1 - \phi_1 R_{m1} = N_2 i_2 - \phi_2 R_{m2} = 1992 \text{ A}$ , care pot constitui relațiile de verificare.

2) Dacă se cunosc solenatiile (numărul de amper-spire) dimensiunile geometrice și curba de magnetizare a materialului, atunci pentru determinarea fluxurilor, inducțiilor și intensităților câmpului magnetic din ramuri, se folosește o metodă grafo-analitică, adică se trasează curbele de variație ale fluxurilor în funcție de tensiunile magnetice,  $\phi = f(Hl)$ , pentru toate ramurile, după care se aplică teorema întâi a lui Kirchhoff pentru circuite feromagnetice.

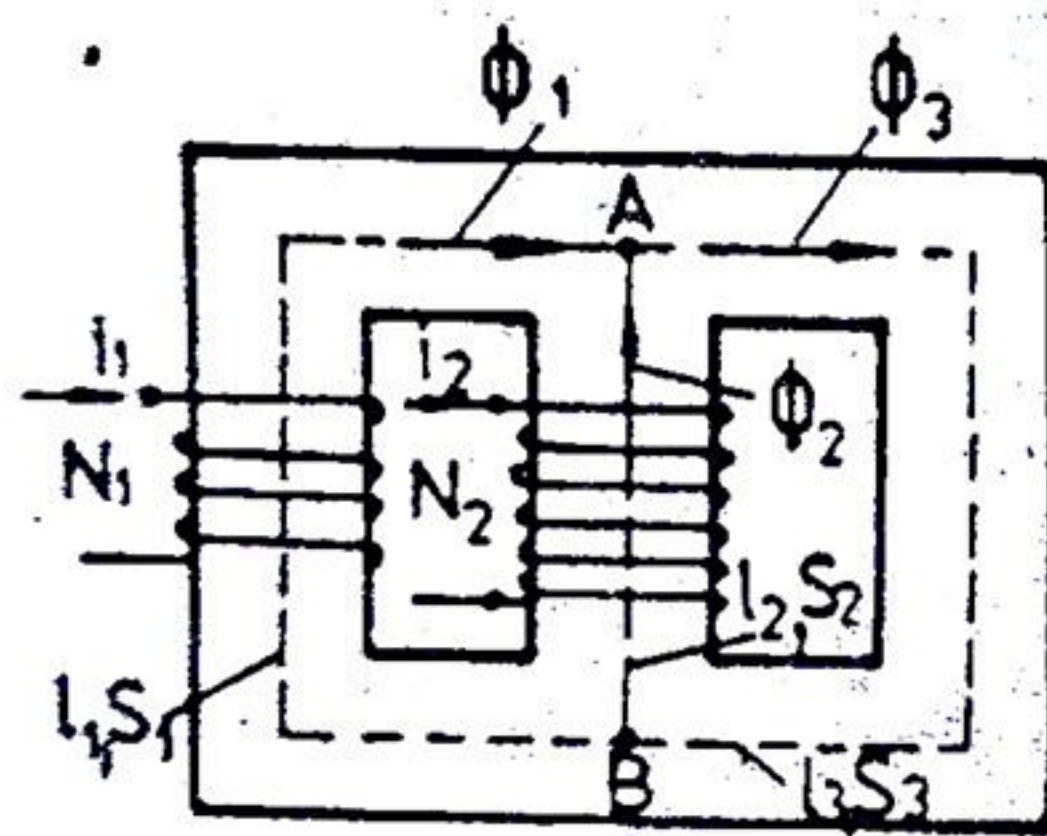


Fig.4.33

**Aplicația 2.** Să se rezolve circuitul din fig.4.33 în care  $l_1 = 60 \text{ cm}$ ,  $l_2 = 25 \text{ cm}$ ,  $l_3 = 50 \text{ cm}$ ,  $S_1 = 20 \text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 25 \text{ cm}^2$ ,  $S_3 = 20 \text{ cm}^2$ ,  $N_1 i_1 = 1055 \text{ A}$ ,  $N_2 i_2 = 975 \text{ A}$ . Materialul circuitului este oțel turnat. Se pot scrie următoarele ecuații:  $\phi_1 + \phi_2 = \phi_3$ ,

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = N_1 i_1, H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_2 i_2. \quad (4.115)$$

în care necunoscutele ( $\phi$  și  $H$ ) se determină grafo-analitic, trasând curbele:

$$\phi_1 = f_1(H_1 l_1), \phi_2 = f_2(H_2 l_2), \phi_3 = f_3(H_3 l_3) \quad (4.116)$$

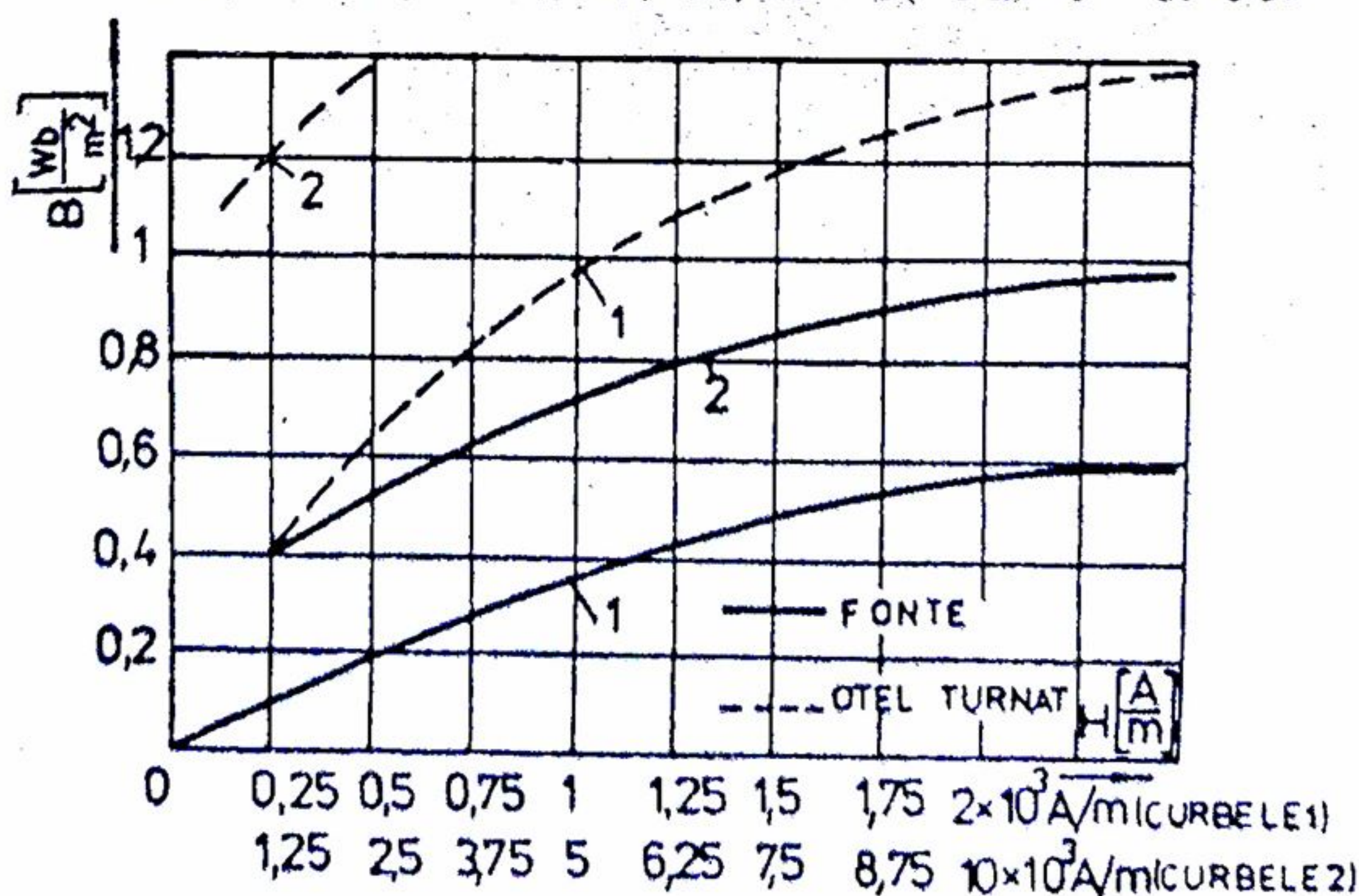


Fig.4.34



Pentru trasarea curbei  $\phi_3$  se ia o valoare arbitrară  $H_3 = 200 \text{ A/m}$ . Se deduce  $H_1 l_1 = 100 \text{ A}$ . Din curba de magnetizare a materialului (fig.4.34) rezultă inducția magnetică  $B_3 = 0,35 \text{ Wb/m}^2$ .

Se calculează fluxul:  $\phi_3 = B_3 S_3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ . Se obține un punct P (100;  $7 \cdot 10^{-4}$ ) al curbei  $\phi_3$  (fig.4.36). Se construiesc în mod analog curbele  $\phi_1$  și  $\phi_2$ , luând ca origine punctul  $N_1 i_1 = 1055 \text{ A}$  pentru curba  $\phi_1$  și punctul  $N_2 i_2 = 975 \text{ A}$  pentru curba  $\phi_2$ , măsurând abscisele în sens invers (de la dreapta la stânga).

Coordonatele punctului M de intersecție între curbele  $\phi_3$  și  $\phi_1 + \phi_2$  (suma aritmetică a ordonatelor) satisfac ecuațiile (4.115).

Din fig.4.35 rezultă fluxurile și apoi inducțiile:  $\phi_1 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ,  $\phi_2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ,  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = 26 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ;  $B_1 = \frac{\phi_1}{S_1} = 0,5 \text{ Wb/m}^2$ ,  $B_2 = \frac{\phi_2}{S_2} = 0,64 \text{ Wb/m}^2$ .

$B_3 = \frac{\phi_3}{S_3} = 1,3 \text{ Wb/m}^2$ , cu ajutorul cărora, din fig.4.34 pentru oțel turnat, se obțin

câmpurile:  $H_1 = 300 \text{ A/m}$ ,  $H_2 = 400 \text{ A/m}$ ,  $H_3 = 1750 \text{ A/m}$ .

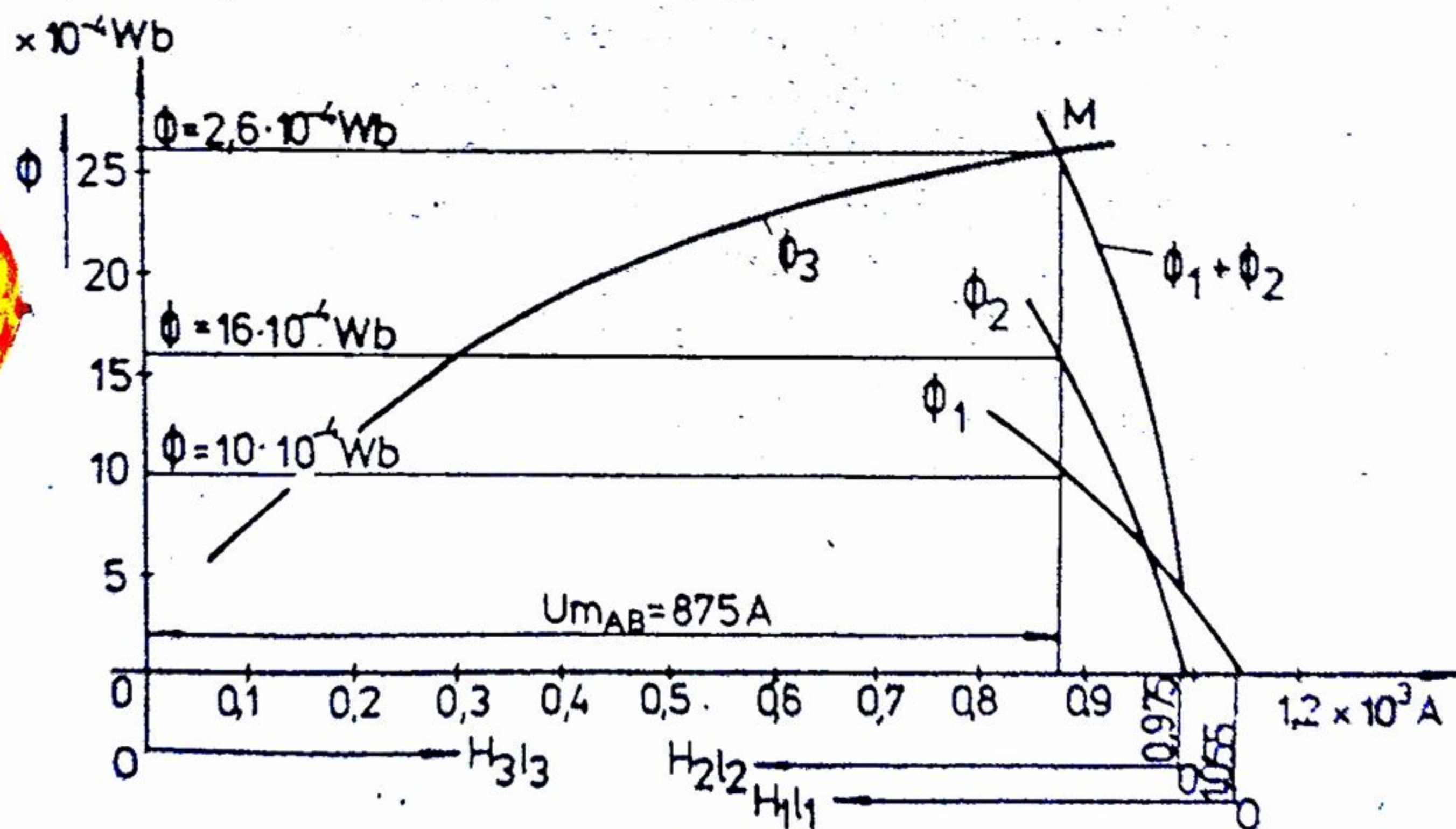


Fig.4.35

Rezultă  $U_{mAB} = H_3 l_3 = \phi_3 R_{m3} = \phi_3 \frac{l_3}{\mu_3 S_3} = 875 \text{ A}$ , sau, ca verificare :

$$U_{mAB} = N_1 i_1 - \phi_1 R_{m1} = N_2 i_2 - \phi_2 R_{m2} = 875 \text{ A unde}$$

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = 18 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}, \mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{0,5}{300} \text{ H/m}, R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} = \frac{10^6}{16} \text{ H}^{-1}.$$



$$\mu_2 = \frac{B_2}{H_2} = \frac{0,64}{400} \text{ H/m}, R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_3 S_3} = \frac{0,5}{7,43 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 33,6 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}.$$

$$\mu_3 = \frac{B_3}{H_3} = \frac{1,3}{1750} = 7,43 \cdot 10^4 \text{ H/m}.$$

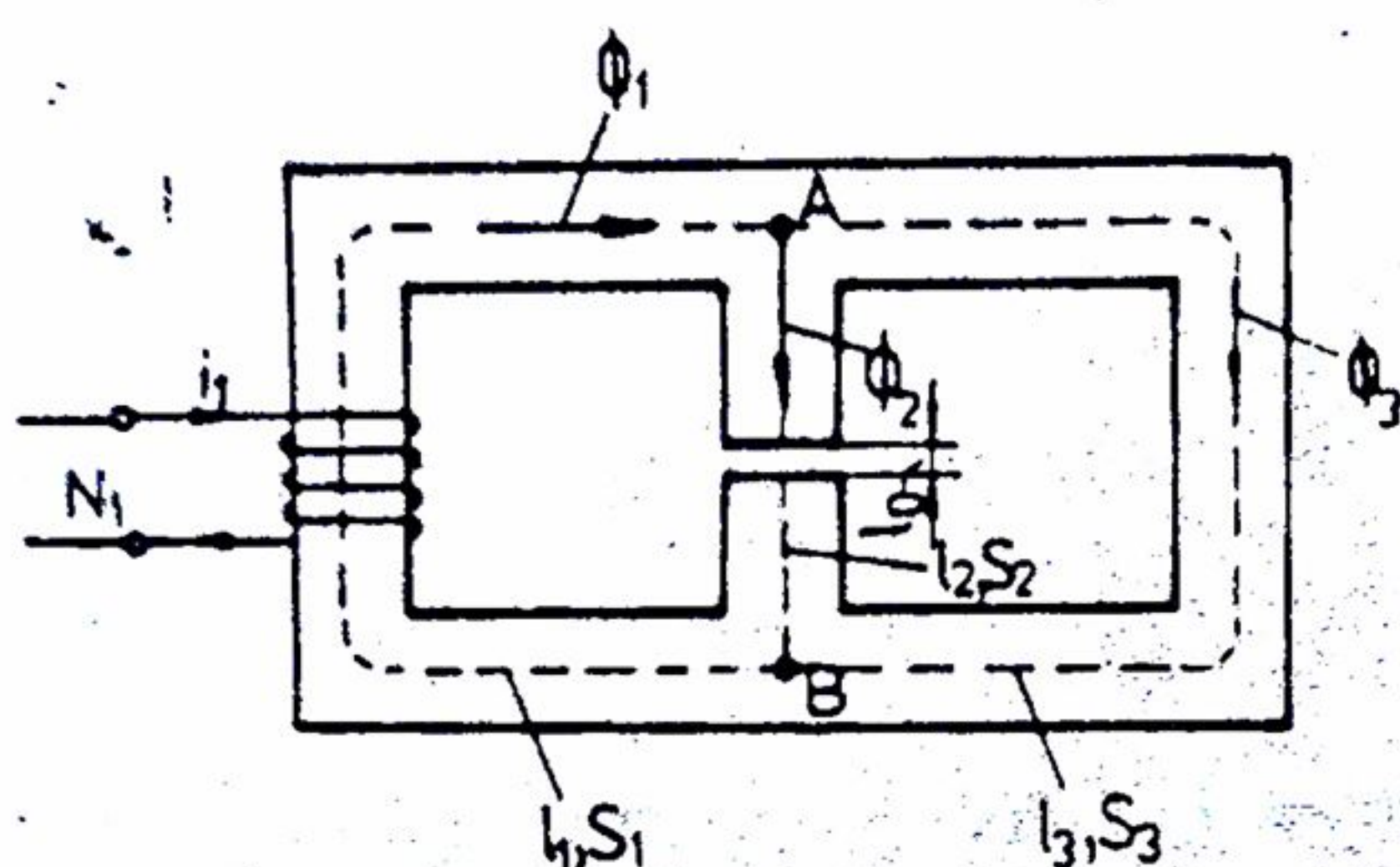


Fig.4.36

Aplicația 3. Să se rezolve circuitul din fig.4.36 în care  $l_1 = l_3 = 0,5 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,2 \text{ m}$ , iar întrefierul  $l_0$  are valoarea:  $0,1 \text{ mm}$ . Secțiunile au valorile:  $S_1 = S_3 = 8 \text{ cm}^2$  și  $S_2 = 6 \text{ cm}^2$ . Solenaija este  $N_1 i_1 = 250 \text{ A}$ . Materialul circuitului este oțel laminat la cald în tole de  $0,5 \text{ mm}$  având curba de magnetizare în fig.4.34.

Se formează sistemul de ecuații:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 = N_1 i_1; H_1 l_1 +$$

$+H_3 l_3 = N_1 i_1; \phi_1 = \phi_2 + \phi_3$ , în care necunoscutele ( $H$  și  $\phi$ ) se determină din curbele  $\phi_1 = f_1(H_1 l_1)$ ;  $\phi_2 = f_2(H_2 l_2 + H_0 l_0)$ ;  $\phi_3 = f_3(H_3 l_3)$ , pentru diferitele valori ale întrefierului.

Pentru trasarea curbei  $\phi_1 = f_1(H_1 l_1)$  se procedează ca și la aplicația 1.

În mod similar se procedează la determinarea funcției  $\phi_3 = f_3(H_3 l_3)$ . Deoarece  $l_1 = l_3$  și  $S_1 = S_3$ , funcțiile  $f_1(H_1 l_1)$  și  $f_3(H_3 l_3)$  au aceeași alură.

Pentru trasarea funcției  $\phi_2 = f_2(H_2 l_2 + H_0 l_0)$ , cu  $S_0 = S_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $l_2 = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  și  $l_0 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , se procedează astfel:

- se ia arbitrar  $H'_2 = 100 \text{ A}$  și din fig.4.32 se obține  $B'_2 = 0,4 \text{ Wb/m}^2$  și  $\phi'_2 = B'_2 S_2 = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ .

$$\text{Rezultă } H'_0 = \frac{B'_2}{\mu_{\text{aer}}} = \frac{0,4}{4 \cdot 10^{-7}} = 3 \cdot 10^5 \text{ A/m}, \text{ coordonatele punctului } M'_2 \text{ fiind:}$$

$$M'_2(H'_2 l_2 + H'_0 l_0; \phi'_2) \text{ sau } M'_2(52; 2,4 \cdot 10^{-4});$$

- se repetă operațiile pentru diferite valori ale câmpului  $H_2$ , până se obțin suficiente puncte  $M_2$ .

Funcția  $\phi_3 = f_3(H_3 l_3)$  are aceeași alură ca și funcția  $\phi_1$  (fig.4.37).

Din fig.4.37 rezultă:  $\phi_1 = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ;  $\phi_2 = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ;  $\phi_3 = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ;  $H_1 l_1 = 175 \text{ A}$ ;  $H_2 l_2 + H_0 l_0 = 75 \text{ A}$ .

Cunoscând fluxurile se pot calcula inducțiile  $B$ , intensitățile câmpului  $H$ , permeabilitatea magnetică  $\mu$  și reluctanțele magnetice  $R_m$ .

$$\text{Ca verificare, rezultă: } N_1 i_1 = \phi_1 R_{\text{me}} = \phi_1 \left( R_{m1} + \frac{R_{m2} R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} \right) = 250 \text{ A}.$$



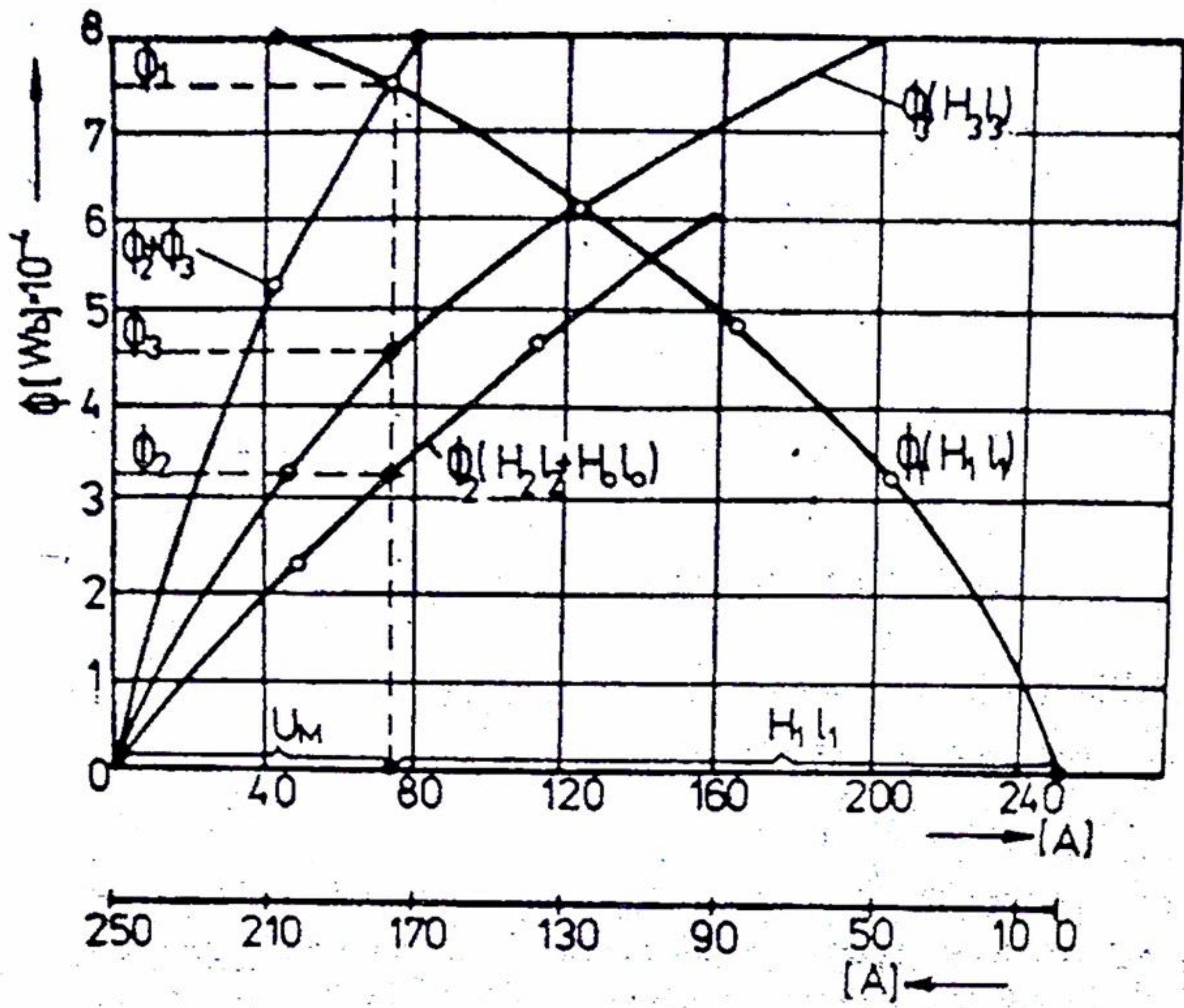


Fig. 4.37



## Capitolul V

# CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM PERMANENT

## 5.1. CIRCUITE ELECTRICE MONOFAZATE

### 5.1.1. Mărimi alternative sinusoidale

Mărimile electrice alternative sunt mărimi periodice de timp, care au valoarea momentană exprimată printr-o funcție  $f$ ,

$$u = f[\omega(t \pm kT)] \quad (5.1)$$

unde  $k$  este un număr întreg,  $T$  - perioada. După o perioadă, mărimea periodică  $u$  reia aceeași valoare, cu aceeași pantă. Inversul perioadei se numește frecvență.

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \quad (5.2)$$

Expresia  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  (5.3)

se numește pulsatie și se măsoară în  $[\text{rad/s}]$  sau  $[\text{s}^{-1}]$ .

Mărimea electrică sinusoidală (de exemplu, tensiunea):

$$u = U_m \sin(\omega t \pm \varphi) \quad (5.4)$$

are elementele:  $U_m$  - valoarea maximă (de vârf),  $(\omega t \pm \varphi)$  - faza, iar  $\varphi$  - faza inițială (fig.5.1 și 5.2).

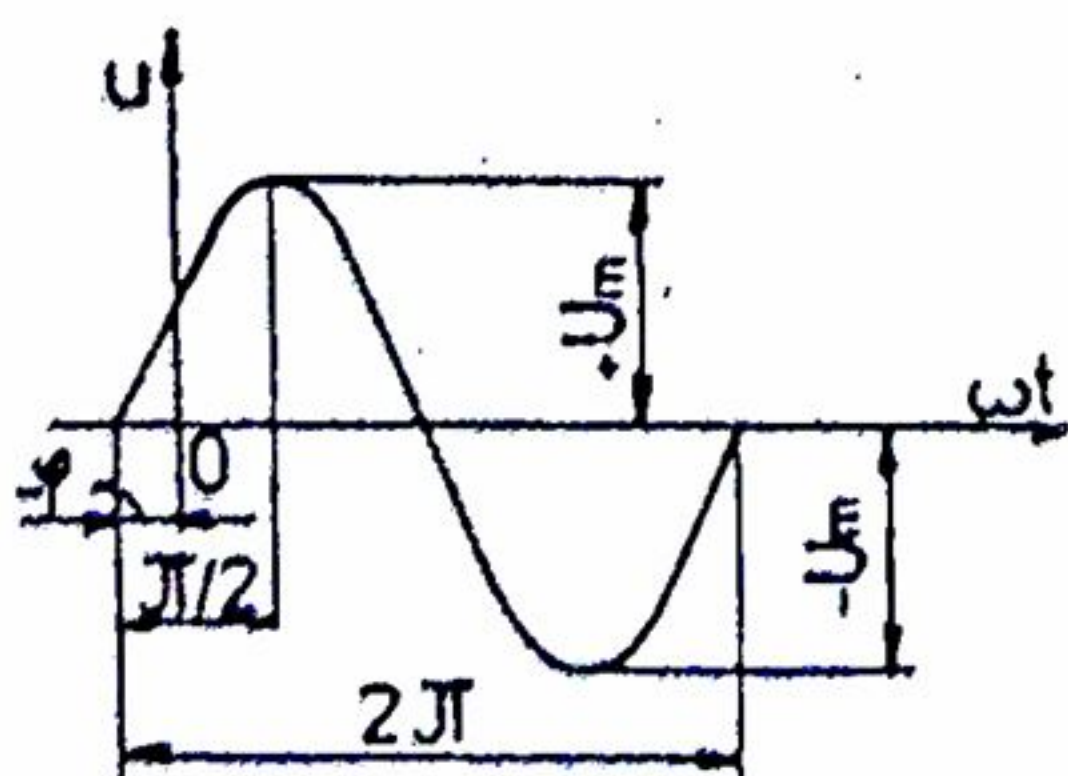


Fig.5.1

În fig.5.1,  $\varphi < 0$ , iar (5.4) se scrie:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.5)$$

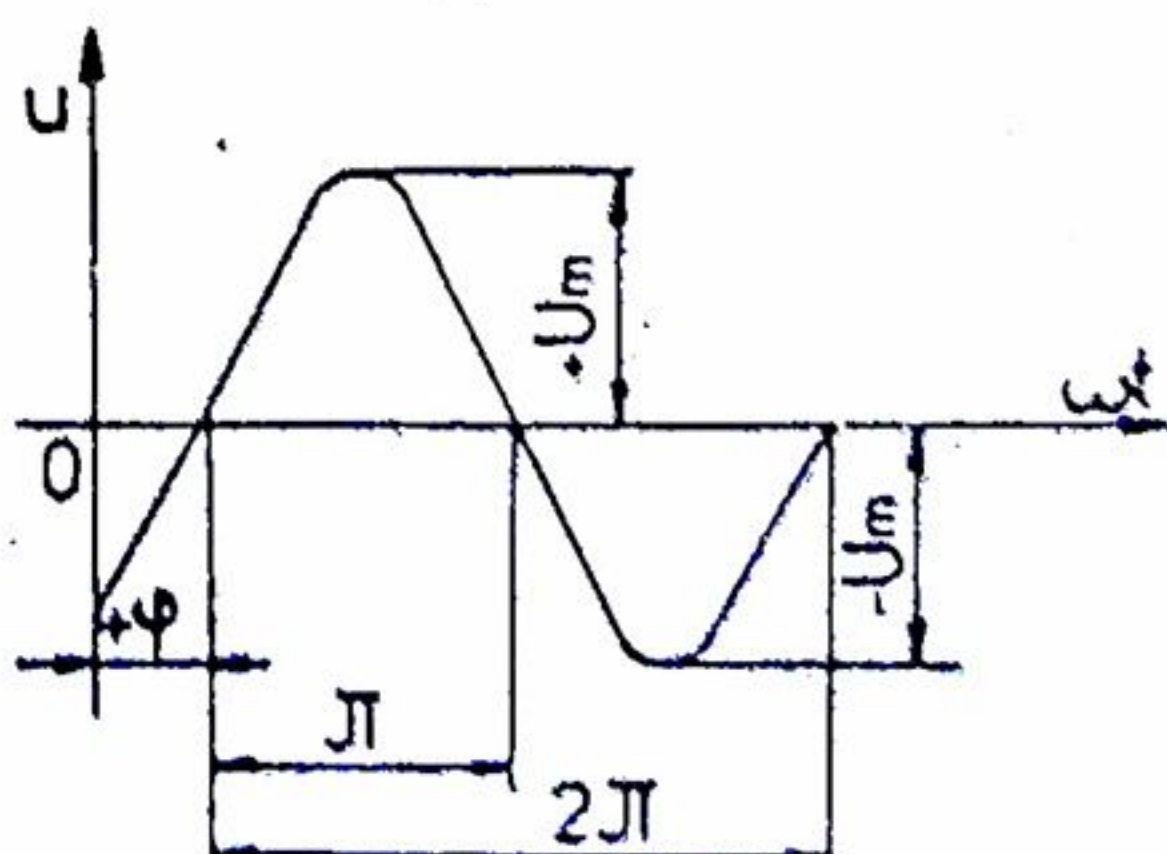


Fig.5.2



În fig.5.2,  $\varphi > 0$ , iar (5.4) se scrie:

$$u = U_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (5.6)$$

Dacă două tensiuni au valori maxime și faze inițiale diferite, rezultă:

$$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1); \quad u_2 = U_{m2} \sin(\omega t - \varphi_2); \quad \text{iar } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ se numește defazaj.}$$

Valoarea medie a unei mărimi electrice sinusoidale pe o perioadă este nulă

$$U_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt. \quad (5.7)$$

De aceea, în electrotehnică se utilizează pentru valoarea medie expresia:

$$U_{med} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt. \quad (5.8)$$

Introducând (5.5) sau (5.6) în (5.8) se obține:

$$U_{med} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,636 U_m. \quad (5.9)$$

Valoarea medie a curentului se obține în mod analog:

$$I_{med} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,636 I_m. \quad (5.10)$$

Aparatele electrice de măsurat destinate pentru curentul alternativ (cu excepția celor cu redresor), măsoară valoarea efectivă sau eficace definită de expresia:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \quad (5.11)$$

Introducând (5.5) sau (5.6) în (5.11) se obține, succesiv (cu  $\varphi = 0$ ):

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cdot dt},$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m. \quad (5.12)$$

Prin analogie, valoarea efectivă pentru curent este:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (5.13)$$

Cu (5.12) și (5.13) valorile momentane ale tensiunii și curentului se scriu:

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t - \varphi_u); \quad i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi_i) \quad (5.14)$$

sau, dacă  $u$  este considerată referință (fără fază inițială), adică  $\varphi_u = 0$ , iar  $\varphi_i = \varphi$ , se obține:

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t; \quad i = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.15)$$

unde  $\varphi$  este defazajul curentului  $i$  față de tensiunea  $u$ .



Acțiunea termică sau electrodinamică a curentului alternativ cu valoarea efectivă  $I$  este identică cu acțiunea curentului continuu de aceeași valoare  $I$ . Din punct de vedere fizic, valoarea efectivă a curentului sinusoidal este egală cu acea valoare constantă,  $I$ , a unui curent continuu care, trecând printr-un rezistor cu rezistența  $R$  dezvoltă în timp de o perioadă  $T$  aceeași energie  $Q$  ca și curentul sinusoidal,  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$  ce trece prin același rezistor, în același interval de timp:

$$Q = RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt, \quad (5.16)$$

din care se regăsește (5.13).

Raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie a aceleiași mărimi sinusoidale  $u$  este constant:

$$K = \frac{U}{U_{med}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \quad (5.17)$$

și se numește factor de formă.

### 5.1.2. Producerea t.e.m. monofazate sinusoidale

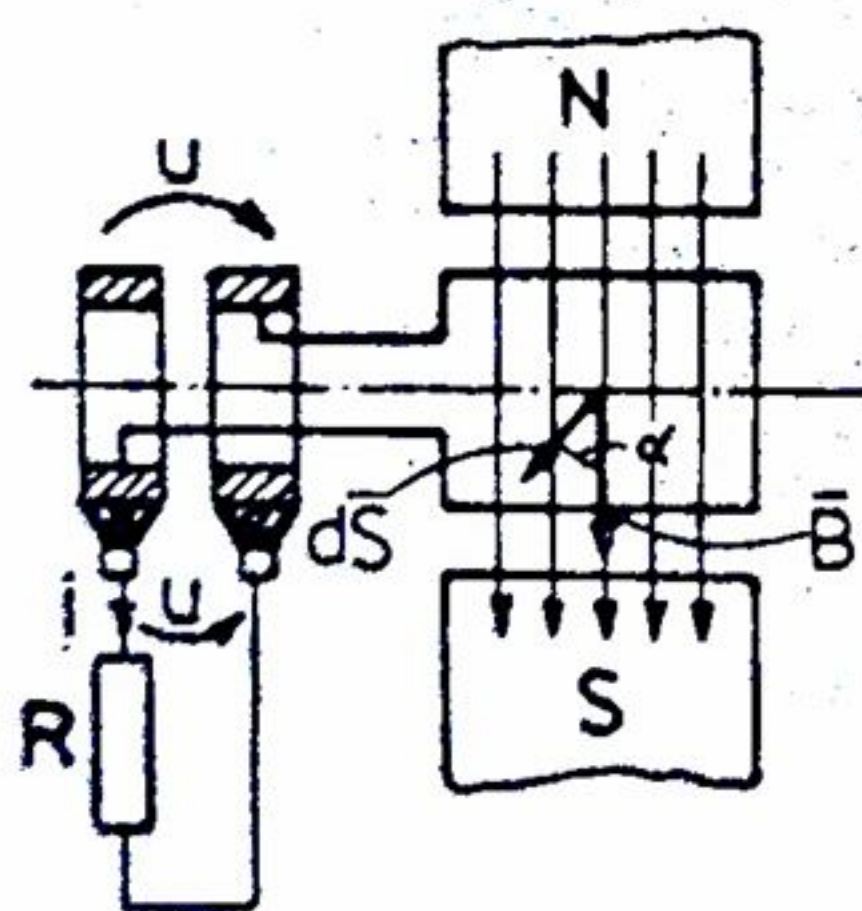


Fig. 5.3

Se consideră un câmp magnetic constant cu fluxul maxim  $\phi_m$  în care se rotește o spirală, închisă pe două inele. Inelele alunecă pe două perii, iar perii închid un circuit cu o rezistență  $R$  (fig. 5.3). Când planul spirei este perpendicular pe liniile de câmp, spira îmbrățișează tot fluxul  $\phi_m$ , deci la un moment dat spira îmbrățișează fluxul

$$\phi = \phi_m \cos \alpha \quad (5.18)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre normala la planul spirei și direcția liniilor de câmp magnetic.

Admițând că viteza de rotație a spirei este constantă în timp

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \quad (5.19)$$

se obține pe inele o tensiune  $u$ , a cărei expresie este dată de legea inducției electromagnetice (pentru  $N$  spire):  $u = -N \frac{d\phi}{dt}$ . Cu (5.18) și (5.19) rezultă, succesiv:

$$u = -N \frac{d}{dt} (\phi_m \cos \omega t) = \omega N \phi_m \sin \omega t. \quad (5.20)$$

Comparând (5.20) cu (5.15) și ținând seama de (5.3) se obține:

$$\sqrt{2}U = \sqrt{2}\omega f N \phi_m; \quad U = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \phi_m = 4,44 f N \phi_m \quad (5.21)$$



### 5.1.3. Circuite electrice cu rezistență, inductivitate și capacitate

Circuitele electrice de c.a. conțin rezistențe, inductivități și capacități distribuite în lungul circuitului, sau localizate în anumite puncte ale circuitului. De regulă, rezistențele, inductivitățile și capacitățile distribuite se neglijează față de cele localizate, sau se consideră incluse în acestea, cu scopul de a se ușura calculul, erorile comise fiind, practic, fără importanță.

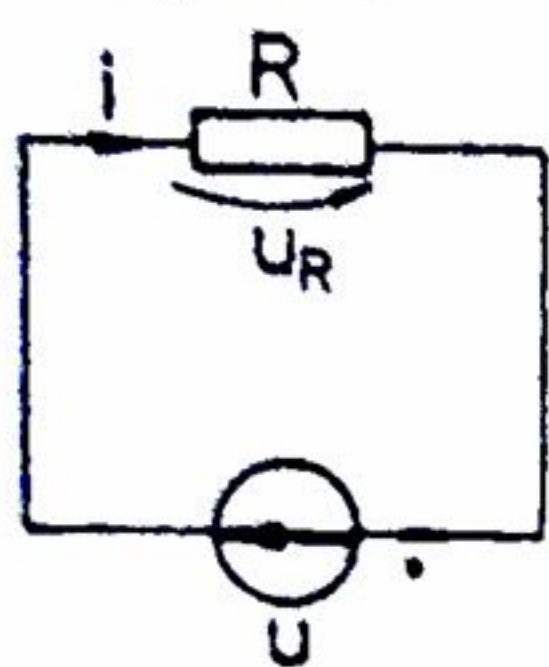


Fig. 5.4

1) Circuit cu rezistență. Se consideră un circuit cu rezistență  $R$  conectată la sursa de tensiune (fig. 5.4):  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ . În circuit ia naștere un curent:

$$i = \frac{u}{R} = \sqrt{2} \frac{U}{R} \sin \omega t = \sqrt{2}I \sin \omega t, \quad (5.22)$$

unde:  $I = \frac{U}{R}$  este curentul efectiv. Puterea instantanee este prin

definiție:  $p = ui = UI 2 \sin^2 \omega t = UI(1 - \cos 2\omega t).$  (5.23)

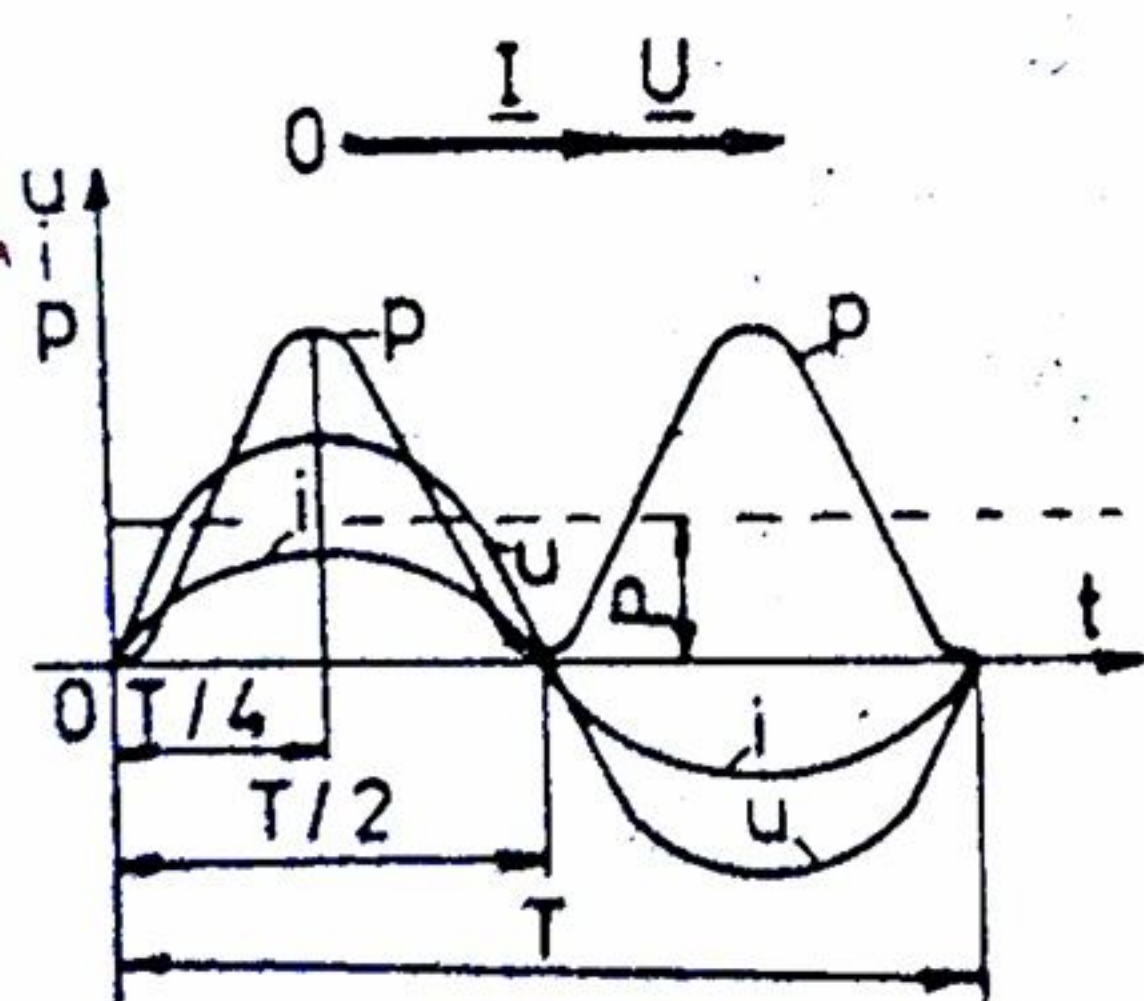


Fig. 5.5

Mărimile  $u$ ,  $i$ ,  $p$  sunt reprezentate în diagramele carteziană și polară în fig. 5.5, din care rezultă că tensiunea și curentul sunt în fază ( $\varphi = 0$ ), iar puterea este mereu pozitivă, are o pulsație dublă ( $2\omega$ ) față de tensiune și are o valoare medie  $P$  dată de expresia:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI. \quad (5.24)$$

În diagrama polară s-au folosit fazorii  $\underline{U}$  și  $\underline{I}$  ai tensiunii și curentului. Fazorii sunt vectori, care nu au punct de aplicație și cu care se pot efectua aceleași operații ca și cu vectorii forțelor mecanice.

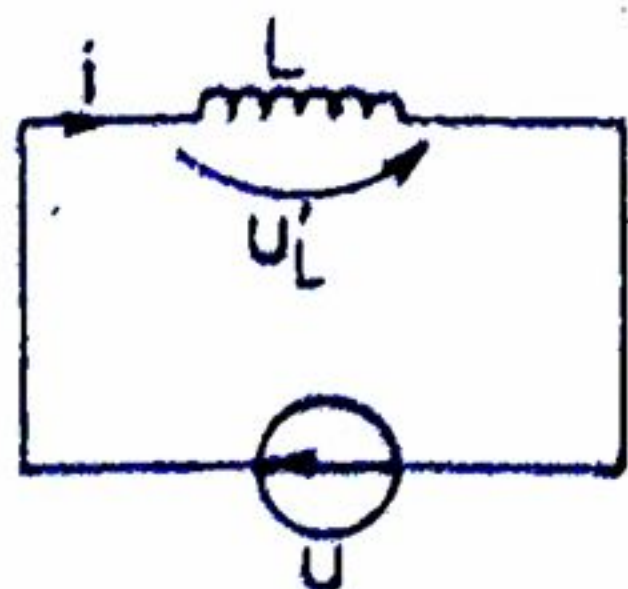


Fig. 5.6

2) Circuit cu inductivitate. Se consideră un circuit cu inductivitatea  $L$  (fig. 5.6) și t.e.m. momentană:  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , care produce în spirele bobinei un curent  $i$  variabil. Conform legii inducției electromagnetice, t.e.m. indusă este:  $u_L' = -L \frac{di}{dt}$ . Cu a doua teoremă a lui Kirchhoff,

$$u + u_L' = 0, \text{ se obține: } u = -u_L' = L \frac{di}{dt} = u_L, \text{ unde } u_L \text{ este}$$

tensiunea pe bobină. Rezultă, succesiv:



$$di = \frac{1}{L} u dt; i = \frac{1}{L} \int u dt = \sqrt{2} \frac{U}{\omega L} (-\cos \omega t),$$

în care  $\omega L = X_L$  se numește reactanță inductivă ( $\Omega$ ), deci:

$$i = \sqrt{2} I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.25)$$

unde  $I = \frac{U}{X_L}$  reprezintă valoarea efectivă a curentului din circuit.

Puterea momentană este:

$$p = ui = 2UI \sin \omega t \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -UI \sin 2\omega t. \quad (5.26)$$

Mărimile  $u$ ,  $i$ , și  $p$  sunt reprezentate în diagramele polară și carteziană, în fig.5.7, din care rezultă că curentul este defazat în urma tensiunii cu unghiul pozitiv  $\frac{\pi}{2}$ , de unde rezultă că puterea are alternanțe pozitive și negative, cu pulsație dublă ( $2\omega$ ) față de tensiune, cu valoare medie nulă:

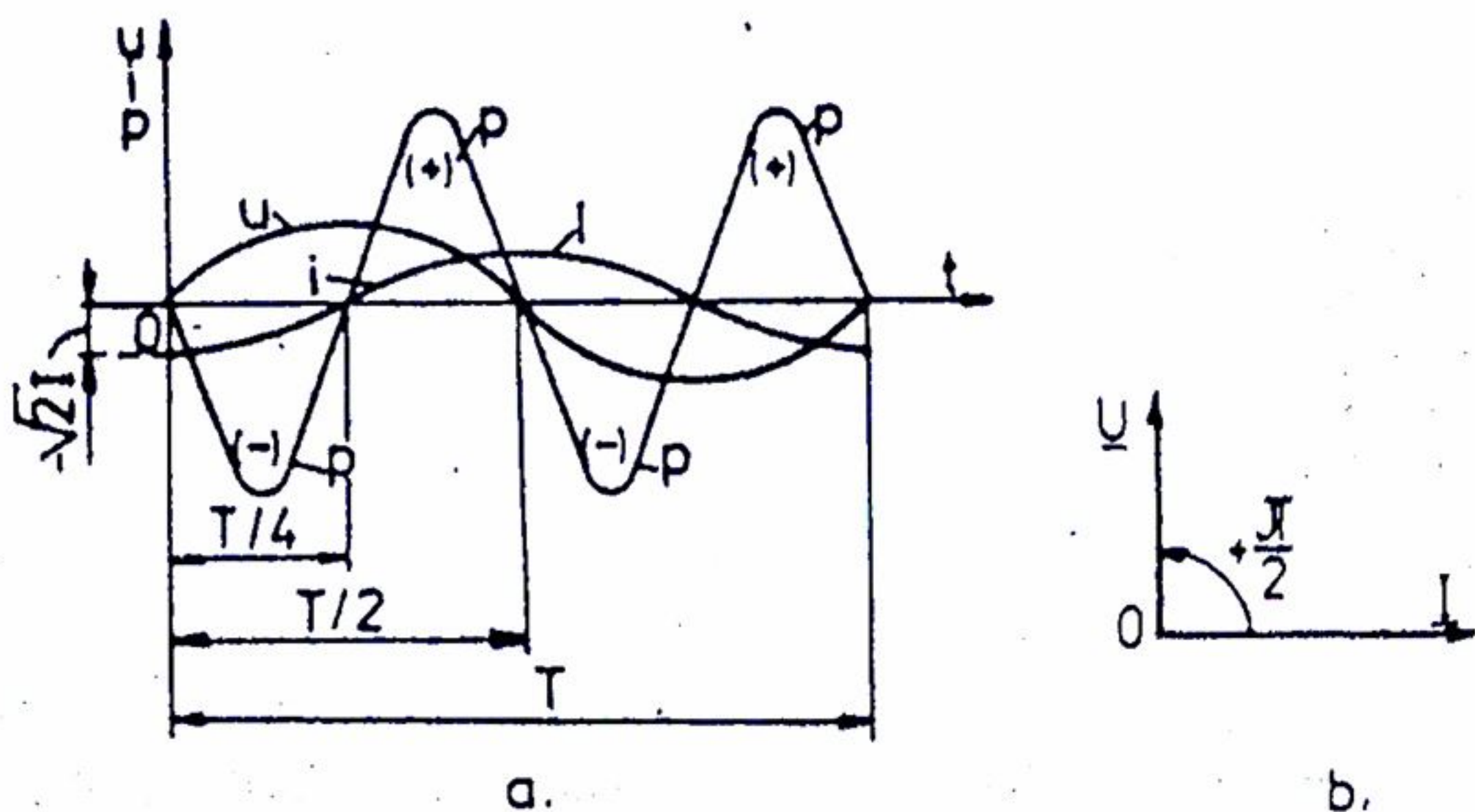


Fig.5.7

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = -\frac{UI}{T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0 \quad (5.27)$$

Se observă că energia consumată într-un sfert de perioadă este cedată înapoi sursei în următorul sfert de perioadă:

$$W' = \int_0^{\frac{T}{4}} p dt = -UI \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\omega t dt = -\frac{UI}{\omega} \quad (5.28)$$

fiind egală în modul cu energia acumulată anterior în câmpului magnetic al bobinei

$$W' = \frac{1}{2} L I_m^2 = L I^2 = \frac{UI}{\omega} \quad (5.29)$$



și din care se regăsește expresia reactanței inductive a bobinei

$$\omega L = \frac{U}{I} = X_L. \quad (5.30)$$

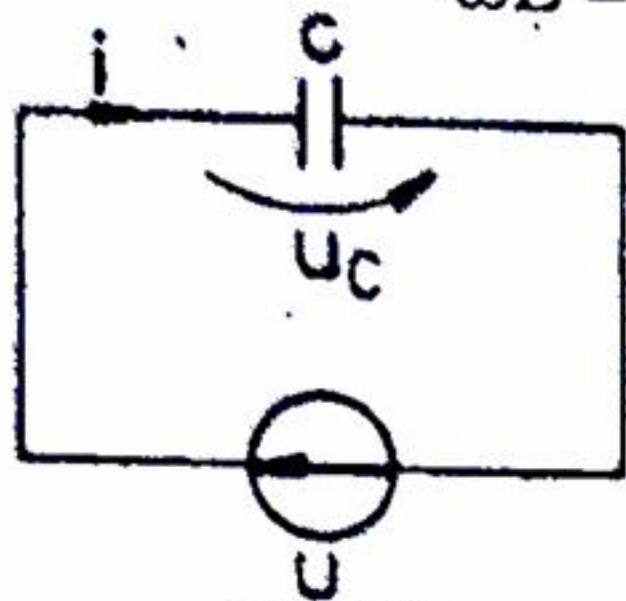


Fig. 5.8

3) Circuit cu capacitate. Se consideră un circuit cu condensator ideal (fără pierderi) conectat la sursa de tensiune (fig. 5.8):  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ . Cu teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u = u_c \quad (5.31)$$

și ținând seama de relația dintre sarcina  $q$  și capacitatea  $C$  a condensatorului:

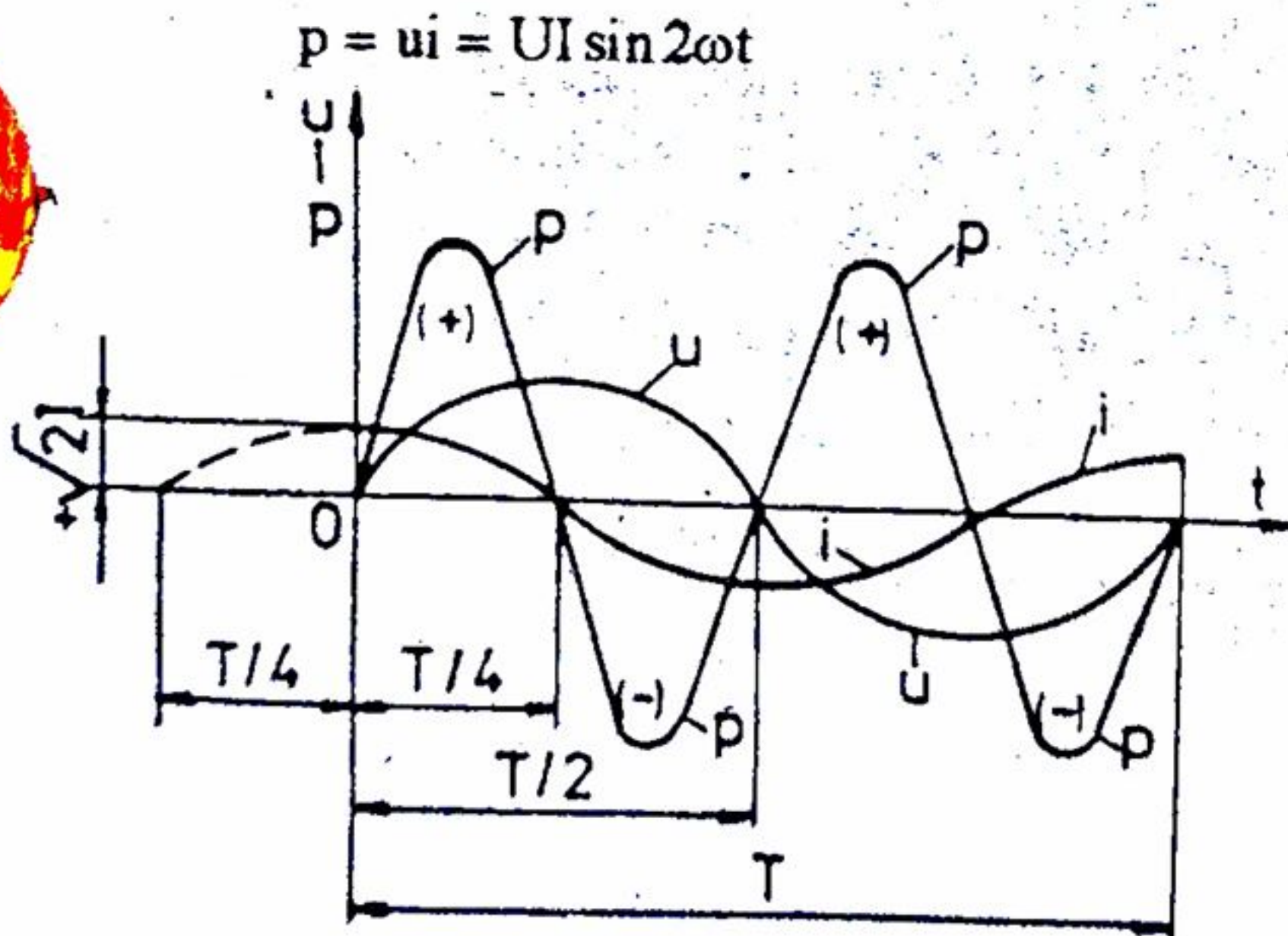
$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = u, \quad (5.32)$$

rezultă succesiv:

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} (\sqrt{2}U \sin \omega t) = \sqrt{2}I \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.33)$$

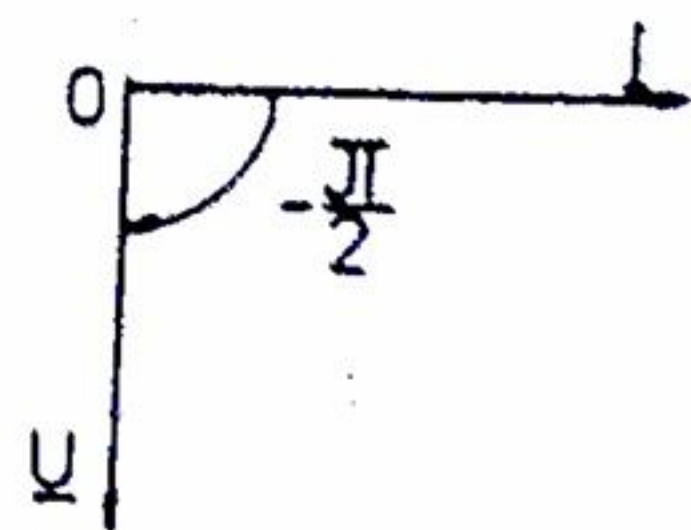
unde  $\frac{1}{\omega C} = X_c$  se numește reactanță capacitivă ( $\Omega$ ), iar  $I = \frac{U}{X_c}$  reprezintă curentul efectiv din circuit. Puterea momentană este:

$$p = ui = UI \sin 2\omega t \quad (5.34)$$



a

Fig. 5.9



b.

Mărimile  $u$ ,  $i$  și  $p$  sunt reprezentate în diagramele carteziană și polară, în fig. 5.9, din care rezultă că curentul este defazat înaintea tensiunii cu unghiul negativ  $\frac{\pi}{2}$ , de unde rezultă că puterea momentană are alternanțe pozitive și negative, cu pulsația dublă ( $2\omega$ ) față de tensiune, cu valoare medie nulă

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{UI}{T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0 \quad (5.35)$$



Se observă că energia consumată într-un sfert de perioadă este cedată înapoi sursei în următorul sfert de perioadă:

$$W = \int_0^{\frac{T}{4}} p dt = UI \int_0^{\frac{T}{4}} \sin 2\omega t dt = \frac{UI}{\omega} \quad (5.36)$$

fiind egală cu energia câmpului electric al condensatorului :

$$W = \frac{1}{2} CU_m^2 = CU^2 = \frac{UI}{\omega} \quad (5.37)$$

și din care se regăsește expresia reactanței capacitive a condensatorului

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I} = X_c \quad (5.38)$$

4) Circuit cu rezistență, inductivitate și capacitate legate în serie. Se consideră circuitul din fig.5.10 în care sursa are la borne tensiunea momentană :  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , care produce în circuit curentul momentan  $i$  și căderile de tensiune  $u_R$ ,  $u_L$  și  $u_C$ . Rezultă:

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (5.39)$$

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (5.40)$$

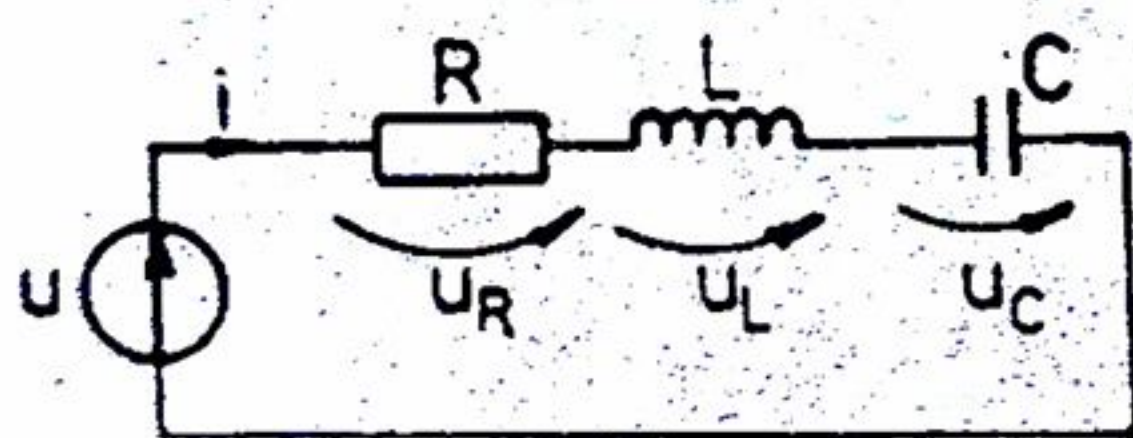


Fig.5.10

Din diagramele polare (fig.5.5, 5.7 și 5.9) și luând fazor de referință curentul  $I$ , rezultă fig.5.11. Din triunghiul OAB se obține :

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \quad (5.41)$$

sau, cunoscând că :

$$U_R = IR; U_L = IX_L = I\omega L \text{ și } U_C = IX_C = I \frac{1}{\omega C}, \text{ rezultă: } U^2 = I^2 R^2 + I^2 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \text{ adică :}$$

$$U = I \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = IZ \quad (5.42)$$

în care :

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = X \quad (5.43)$$

se numește reactanța circuitului ( $\Omega$ ), iar

$$\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = Z \quad (5.44)$$

se numește impedanța circuitului ( $\Omega$ ).

Defazajul  $\varphi$  dintre curent și tensiune rezultă din fig.5.11.



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad (5.45)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5.46)$$

Deci curentul momentan este

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi) \quad (5.47)$$

Mărimile  $u, i$  și  $p = ui$  sunt reprezentate în diagramele carteziană (fig.5.12) și polară (5.11) din care rezultă că curentul este defazat în urma tensiunii, dacă  $\varphi > 0$  ( $X_L > X_C$ ), sau este defazat înaintea tensiunii, dacă  $\varphi < 0$  ( $X_L < X_C$ ). Dacă ecuația tensiunilor (5.40):

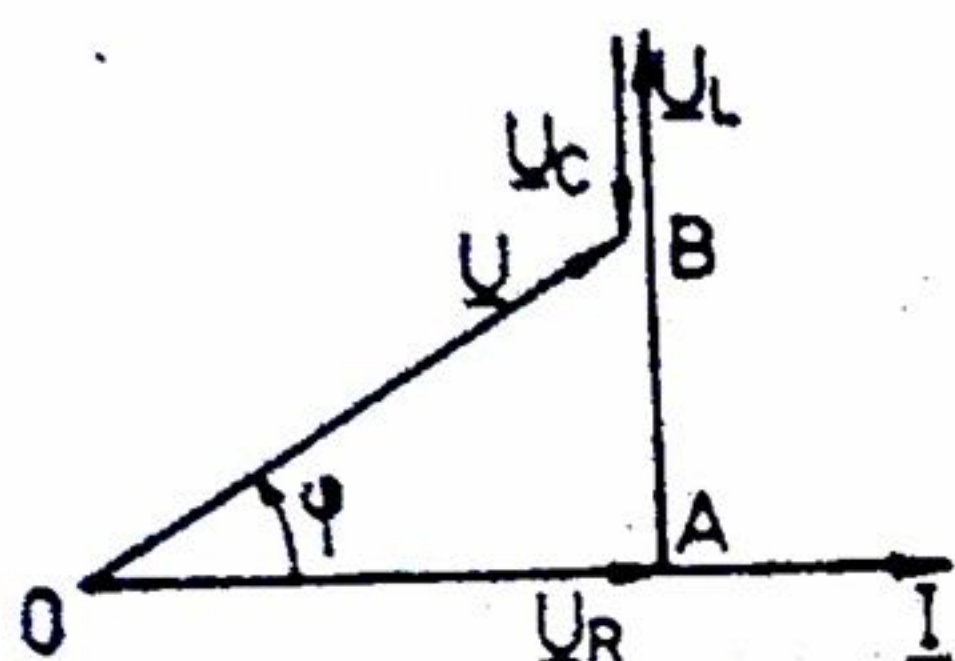


Fig.5.11

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \text{ se înmulțește cu: } i dt = dq = C du_C,$$

se obține, succesiv:

$$u i dt = Ri^2 dt + L i di + C u_C du_C = Ri^2 dt + d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) + d\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right);$$

$$u i dt = Ri^2 dt + d(W_m + W_e), \quad (5.48)$$

adică energia elementară  $u i dt$  produsă de sursa de tensiune este, pe de o parte, transformată ireversibil sub formă de căldură în rezistența  $R$ , iar pe de altă parte, energia este reversibilă, fiind absorbită sau cedată înapoi sursei, în anumite intervale de timp, de câmpul electric al condensatorului și câmpul magnetic al bobinei.

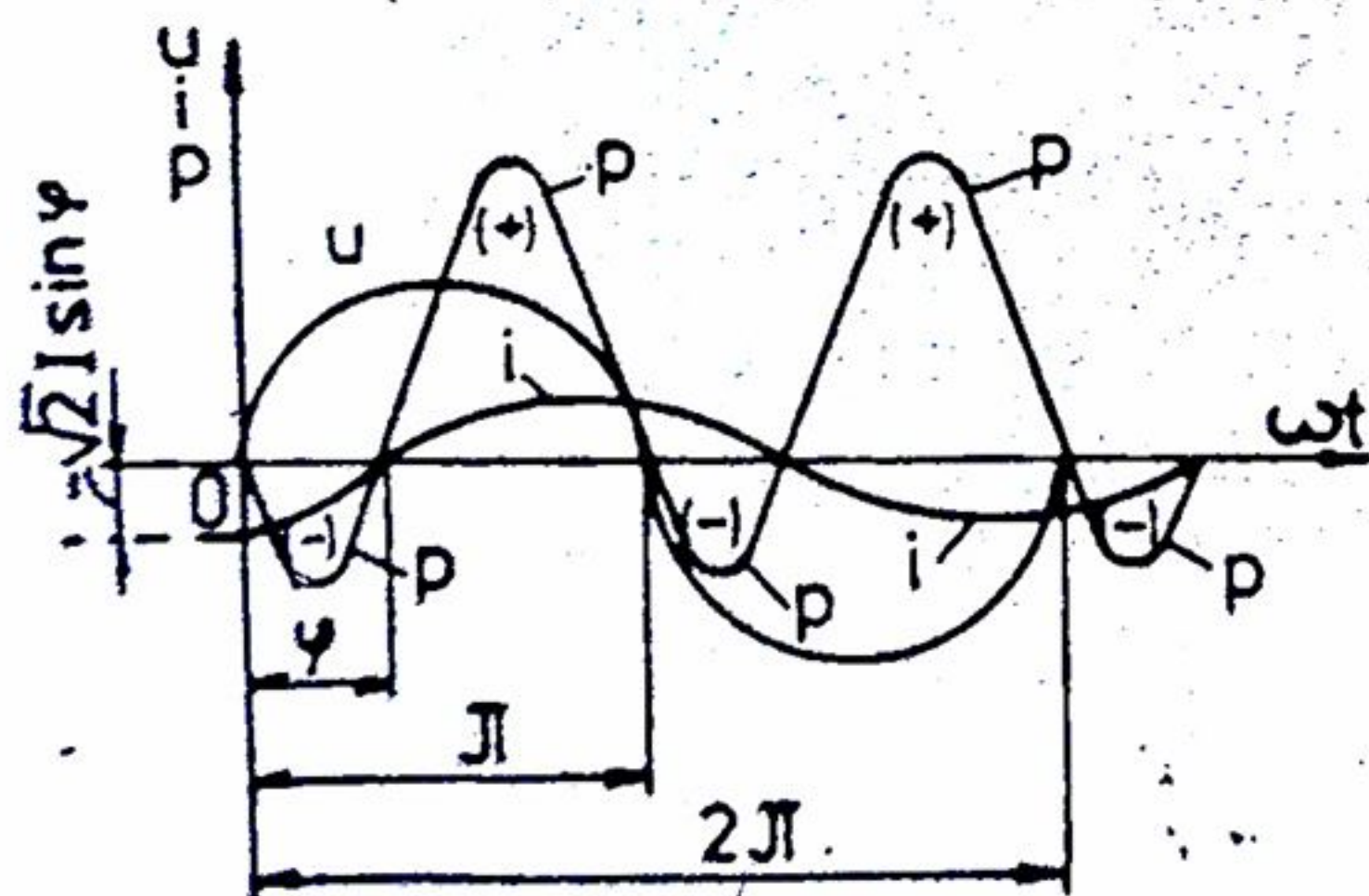


Fig.5.12

considerând  $X_L > X_C$  adică circuitul este inductiv. Dacă se consideră  $X_L < X_C$  ( $\varphi < 0$ ), atunci diagramele respective au aspectul din fig.5.13, adică circuitul este capacitiv, având curentul momentan:  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi)$ . (5.49)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{UI}{T} \int_0^T 2 \sin \omega t \sin(\omega t \pm \varphi) dt,$$

$$P = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t \pm \varphi)] dt = UI \cos \varphi > 0.$$



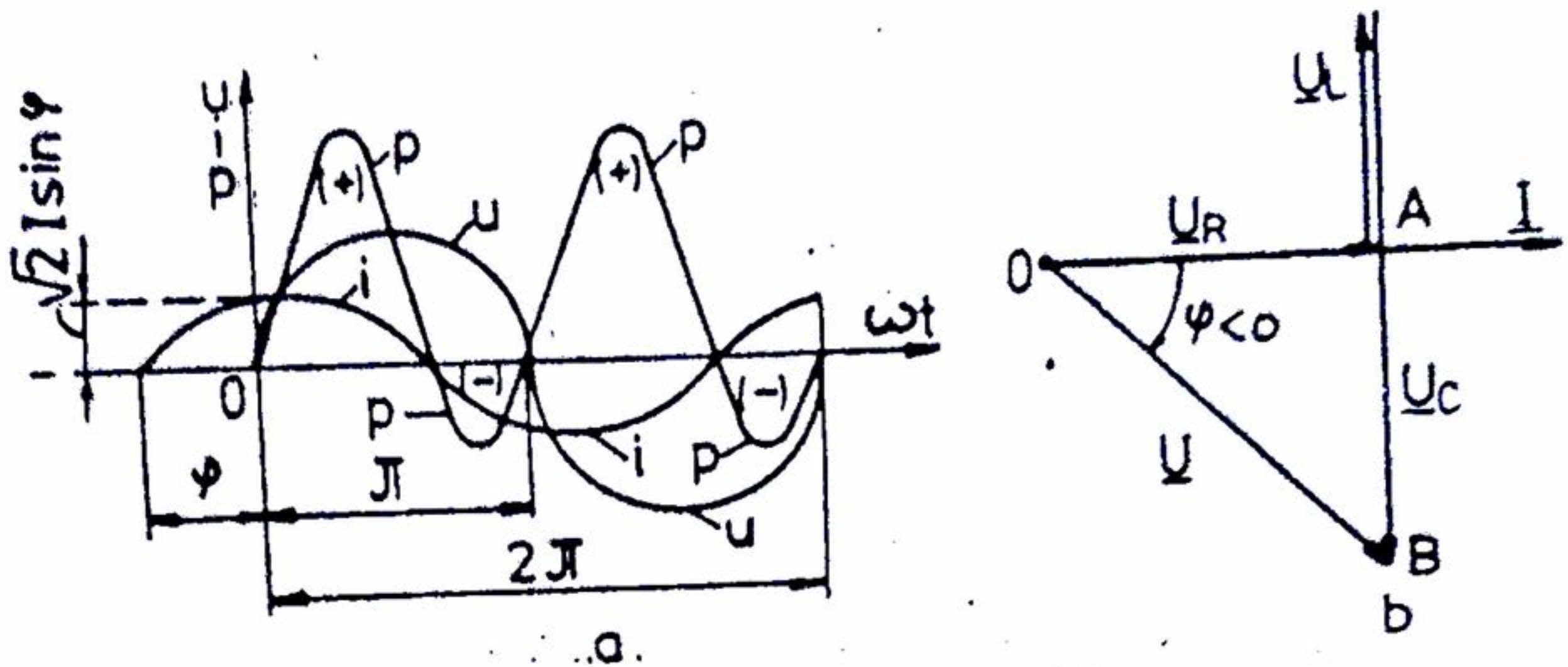


Fig.5.13

Dacă  $R=0$  și  $X_L \neq X_C$ , atunci  $\rho = \pm \frac{\pi}{2}$ , circuitul fiind capacitiv, sau respectiv, inductiv; iar dacă  $R \neq 0$  și  $X_L = X_C$ , atunci  $\rho = 0$ , circuitul fiind într-un regim special numit rezonanță electrică.

5) Circuit cu rezistență, inductivitate și capacitate legate în paralel. Se consideră circuitul din fig.5.14a, în care se cunosc  $R, L, C$  și tensiunea momentană:  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ .

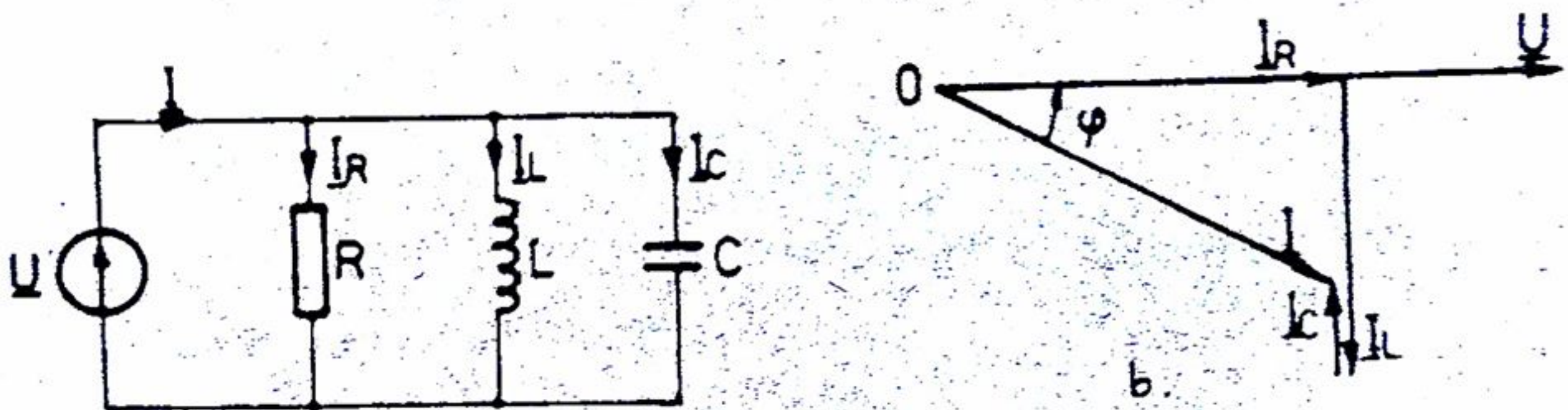


Fig.5.14

Curenții din ramuri au valorile efective :

$$I_R = \frac{U}{R}, I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}, I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C. \quad (5.52)$$

Ținând seama de defazajele curenților  $I_R, I_L$  și  $I_C$  față de tensiunea comună, precum și de teorema lui Kirchhoff,  $I = I_R + I_L + I_C$ , se obține diagrama polară

(fig.5.14.b), din care rezultă  $I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$  sau, cu (5.52) :  $I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$  :

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{U}{Z} \quad (5.53)$$

Defazajul dintre curentul  $I$  și tensiunea  $U$  este dedus din expresia

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = R \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right). \quad (5.54)$$



Valoarea momentană a curentului este

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi). \quad (5.55)$$

din care rezultă că mărimile  $u, i$  și  $p=ui$  au digrama carteziană similară cu cea din fig.5.12 dacă  $\varphi > 0$ , sau similar cu cea din fig.5.13, dacă  $\varphi < 0$ . Aceasta înseamnă că circuitul paralel din fig. (5.14.a) poate fi transformat într-un circuit echivalent cu rezistența  $R_e$  și reactanța  $X_e$  legate în serie.

Din (5.53) și (5.54) rezultă :

$$I = U \frac{1}{Z_e} = \frac{U}{\sqrt{R_e^2 + X_e^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e} \text{ adică, se obțin relațiile de transfigurare:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_e^2 + X_e^2}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2} \quad (5.56)$$

$$\frac{X_e}{R_e} = R \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (5.57)$$

Rezultă soluțiile:

$$R_e = \frac{R}{1 + R^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2} \quad (5.58)$$

$$X_e = \frac{R^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)}{1 + R^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2} \quad (5.59)$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2}} = Z \quad (5.60)$$

Dacă  $X_e > 0$ , circuitul echivalent este inductiv, cu inductivitatea  $L_e = \frac{X_e}{\omega}$ , iar

dacă  $X_e < 0$ , circuitul este capacitiv, cu capacitatea  $C_e = \frac{1}{\omega X_C}$ .

Pentru circuitul paralel  $R - L$ , se consideră  $\frac{1}{X_C} = \omega C = 0$  și rezultă:

$$R_e = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} \quad (5.61)$$



$$X_e = \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} \quad (5.62)$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (5.63)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e} = \frac{R}{X_L} \quad (5.64)$$

Pentru circuitul paralel R-C se consideră  $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\infty} = 0$  și rezultă:

$$R_e = \frac{RX_C^2}{R^2 + X_C^2} \quad (5.65)$$

$$X_e = \frac{R^2 X_C}{R^2 + X_C^2} \quad (5.66)$$

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2} = \frac{RX_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \quad (5.67)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e} = \frac{R}{X_C} \quad (5.68)$$

6) Condensatorul real. Datorită imperfecțiunii dielectricului, în care au loc pierderi prin efect Joule-Lenz și pierderi prin histerezis, condensatoarele reale se încălzesc, ceea ce echivalează cu prezența în circuitul condensatorului a unei rezistențe. Pe baza echivalenței circuitelor serie și paralel, rezultă schemele echivalente ale condensatorului real (fig.5.16 și 5.17), din care se constată că unghiul de pierderi  $\delta$  are valoarea:

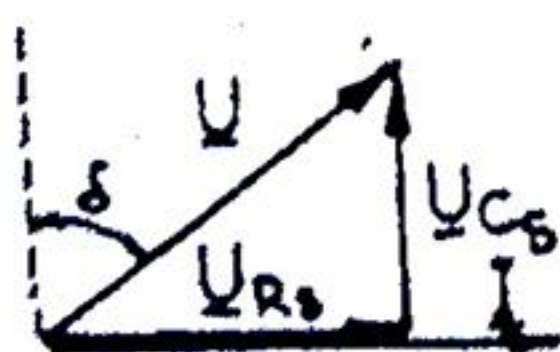
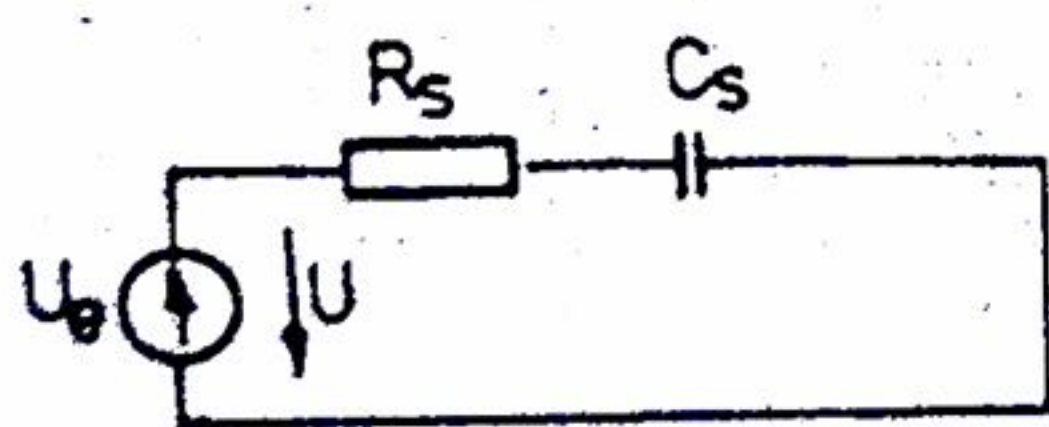


Fig.5.16

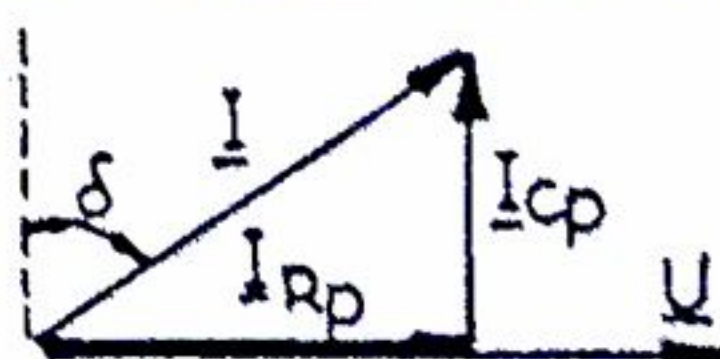
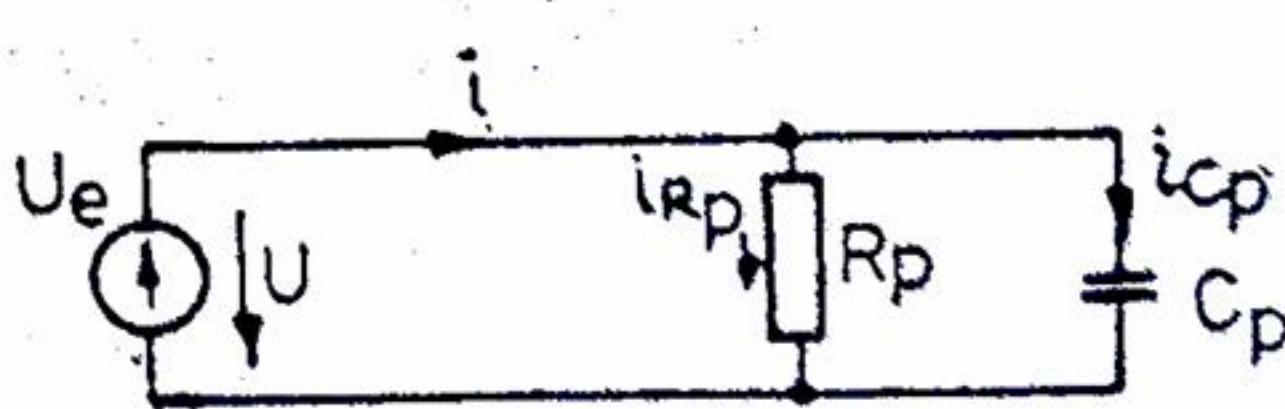


Fig.5.17

$$\delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{U_{R_s}}{U_{C_s}} = \frac{R_s}{\frac{1}{\omega C_s}} = \omega R_s C_s, \text{ sau } \delta \approx \operatorname{tg} \delta = \frac{I_{R_p}}{I_{C_p}} = \frac{\frac{U}{R_p}}{U \omega C_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p}, \text{ unde } \operatorname{tg} \delta$$



variază între  $10^{-4}$  și la  $10^{-1}$ . Rezultă:  $R_s = \frac{\text{tg} \delta}{\omega C_s} \approx \frac{\delta}{\omega C_s}$  (5.69)

sau  $R_p = \frac{1}{\text{tg} \delta \omega C_p} \approx \frac{1}{\delta \omega C_p}$  (5.70)

Deoarece se admite  $C_s \approx C_p = C$ , se deduce

$$\frac{R_s}{R_p} = \delta^2, \text{ sau : } R_s \ll R_p, \quad (5.71)$$

La condensatoarele ideale  $R_s = 0$  și  $R_p = \infty$ , fiind considerate fără pierderi.

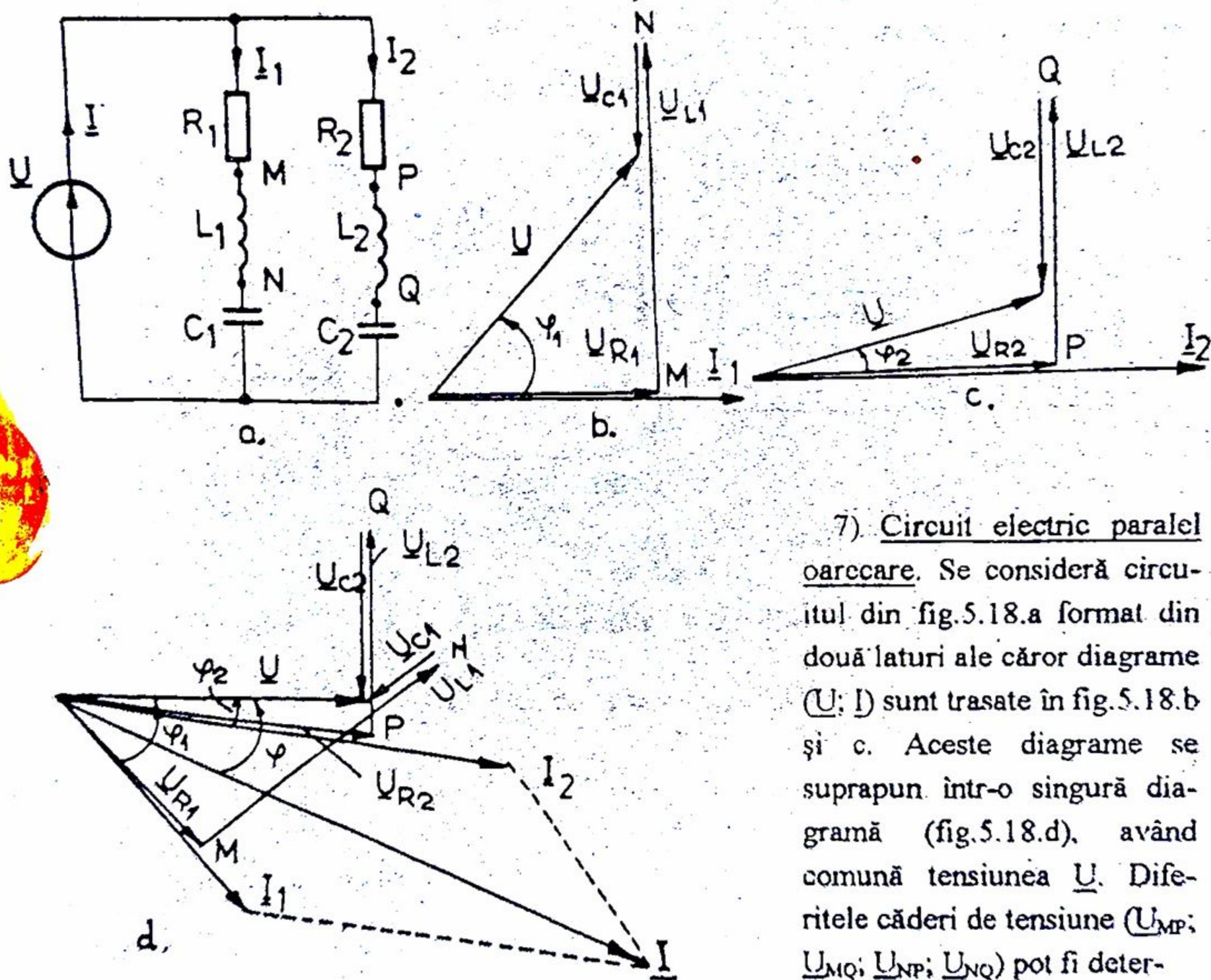


Fig.5.18

cu condiția ca aceasta să fie trasată la scară.

Se constată că:  $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$  (5.72)

în care  $I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2}}, I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}}$

7). Circuit electric paralel oarecare. Se consideră circuitul din fig.5.18.a format din două laturi ale căror diagrame ( $\underline{U}; \underline{I}$ ) sunt trasate în fig.5.18.b și c. Aceste diagrame se suprapun într-o singură diagramă (fig.5.18.d), având comună tensiunea  $\underline{U}$ . Diferitele căderi de tensiune ( $\underline{U}_{MP}$ ;  $\underline{U}_{MQ}$ ;  $\underline{U}_{NP}$ ;  $\underline{U}_{NQ}$ ) pot fi determinate grafic din fig.5.18.d.



$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_2}$$

Rezultă defazajul global al circuitului  $\varphi$ , din relația:  $I_1^2 = I_2^2 + I^2 - 2I_2I \cos(\varphi - \varphi_2)$ .

Se mai pot calcula: impedanța, rezistența și reactanța echivalente ale circuitului

$$Z = \frac{U}{I}; R = Z \cos \varphi; X = Z \sin \varphi \quad (5.73)$$

8) Circuitul ramificat, cu rezistență, inductivitate și capacitate legate mixt. Se consideră circuitul din fig.5.19 cu parametrii  $R, L, C$  și tensiunea momentană  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , cunoscute.

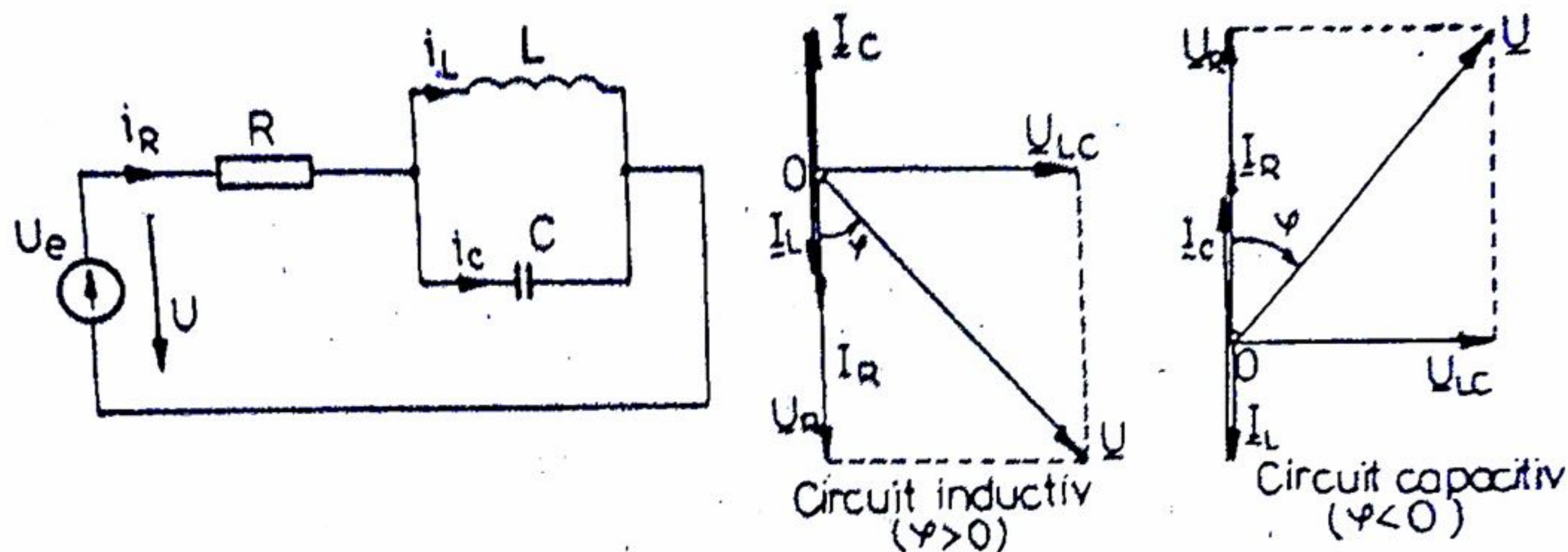


Fig.5.19

Pentru determinarea curenților din ramuri se alege o valoare arbitrară pentru tensiunea  $U_{LC}$  între nodurile circuitului, obținându-se curenții  $I'_{LC} = \frac{U'_{LC}}{X_L}$ ;  $I'_C = \frac{U'_{LC}}{X_C}$ ;

$I'_R = I'_L - I'_C$  și tensiunea pe rezistența  $R$ :  $U'_R = I'_R R$ .

Rezultă o tensiune  $U' = \sqrt{(U'_{LC})^2 + (U'_R)^2}$ , care de regulă este diferită de  $U$ .

Valorile reale ale mărimilor se obțin prin înmulțirea cu factorul  $k$  (circuitul fiind liniar):

$$k = \frac{U}{U'} \quad (5.74)$$

și rezultă:  $I_L = kI'_L$ ;  $I_C = kI'_C$ ;  $I_R = kI'_R$ ;  $U_R = kU'_R$ ;  $U_{LC} = kU'_{LC}$ .

Defazajul total al circuitului este:

$$\varphi = \arctg \frac{U_{LC}}{U_R} \quad (5.75)$$



În fig.5.20 este prezentată a doua variantă de conectare mixtă a elementelor R,L,C și diagramele polare în cazul circuitului inductiv și capacitiv.

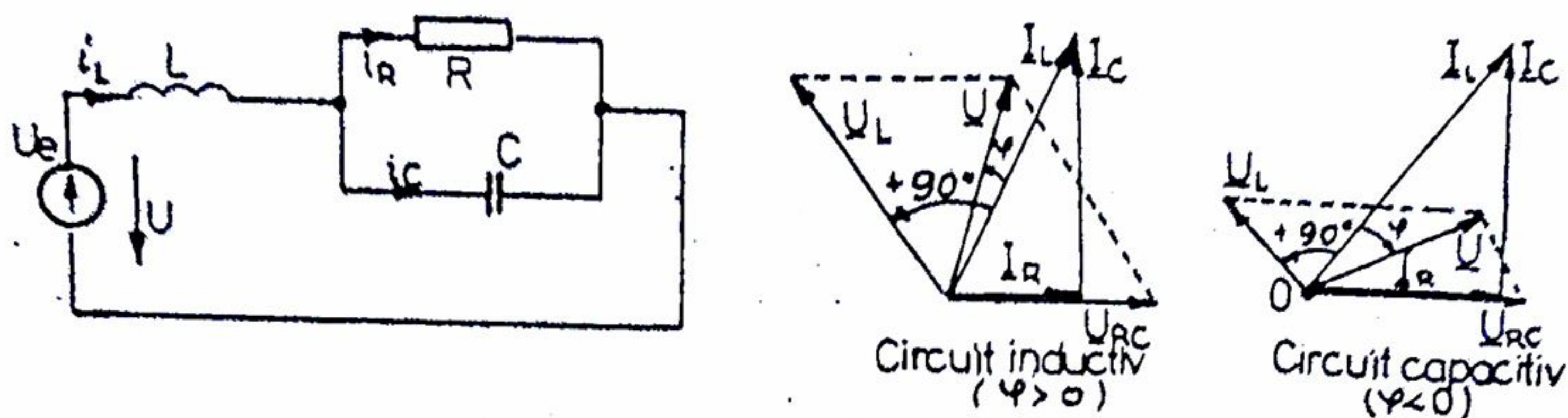


Fig.5.20

Se alege o valoare arbitrară pentru tensiunea  $U'_{RC}$  între nodurile circuitului și se deduce:  $I'_R = \frac{U'_{RC}}{R}$ ;  $I'_C = \frac{U'_{RC}}{X_C}$ ;  $I'_L = \sqrt{(I'_R)^2 + (I'_C)^2}$ ;  $U'_L = I'_L X_L$ ;

$$U' = \sqrt{(U'_{RC})^2 + (U'_L)^2 + 2U'_{RC}U'_L \cos \alpha}, \text{ unde } \alpha \text{ are valoarea: } \alpha = 90^\circ + \arctg \frac{I'_C}{I'_R}.$$

Cu factorul  $k = \frac{U}{U'}$  se obțin valorile reale:  $I_R = kI'_R$ ;  $I_C = kI'_C$ ;  $I_L = kI'_L$ ;  $U_L = kU'_L$ ;  $U_{RC} = kU'_{RC}$ .

Din relația:  $U_{RC}^2 = U^2 + U_L^2 - 2UU_L \cos(\underline{U}; \underline{U}_L)$  se obține defazajul circuitului:

$$\varphi = 90^\circ - \arccos \frac{U^2 + U_L^2 - U_{RC}^2}{2UU_L} \quad (5.76)$$

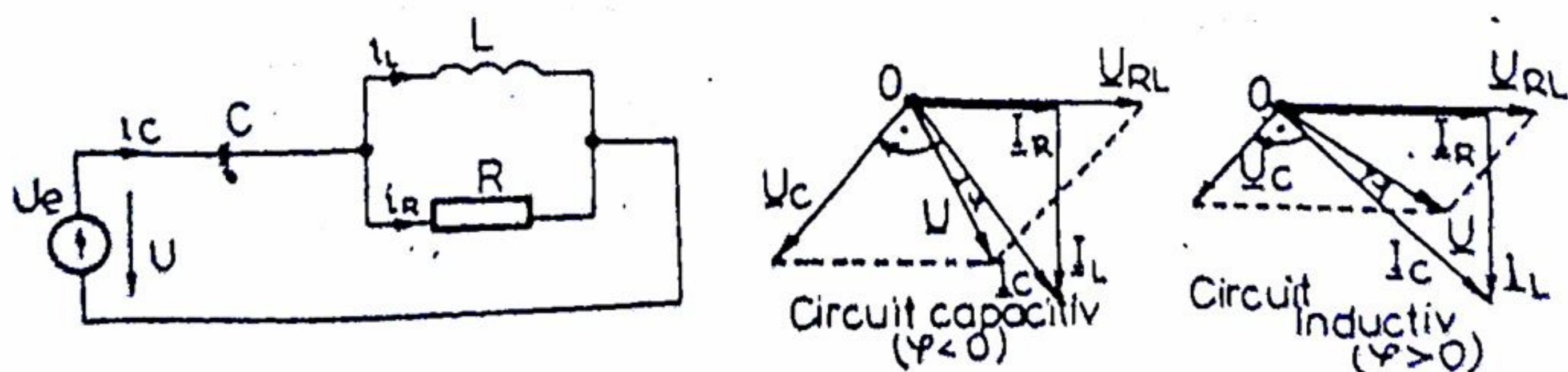


Fig.5.21

În fig.5.21 este prezentată a treia variantă de conectare mixtă a elementelor R,L,C și diagramele polare, cu  $\varphi > 0$  (circuit inductiv) și  $\varphi < 0$  (circuit capacitiv).

Cu o valoare arbitrară  $U'_{RL}$  între nodurile circuitului se obține  $I'_R = \frac{U'_{RL}}{R}$ ;



$$I'_L = \frac{U'_{RL}}{X_L}; I'_C = \sqrt{(I'_R)^2 + (I'_L)^2}; U'_C = I'_C X_C; U = \sqrt{(U'_{RL})^2 + (U'_C)^2 + 2U'_{RL}U'_C \cos \alpha},$$

unde  $\alpha$  are valoare:  $\alpha = 90^\circ + \arctg \frac{I'_L}{I'_R}$ .

Notând  $k = \frac{U}{U'}$  rezultă valorile reale:  $I_R = kI'_R; I_L = kI'_L; I_C = kI'_C; U_C = kU'_C;$

$U_{RL} = kU'_{RL}$ . Defazajul circuitului este:

$$\varphi = 90^\circ - \arccos \frac{U^2 + U_C^2 - U_{RL}^2}{2UU_C} \quad (5.77)$$

Aplicație. Să se rezolve circuitul din fig.5.22.a, în care  $U=100V$ ,  $\omega = 10^3 s^{-1}$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 10mH$ ,  $C = 100\mu F$ .

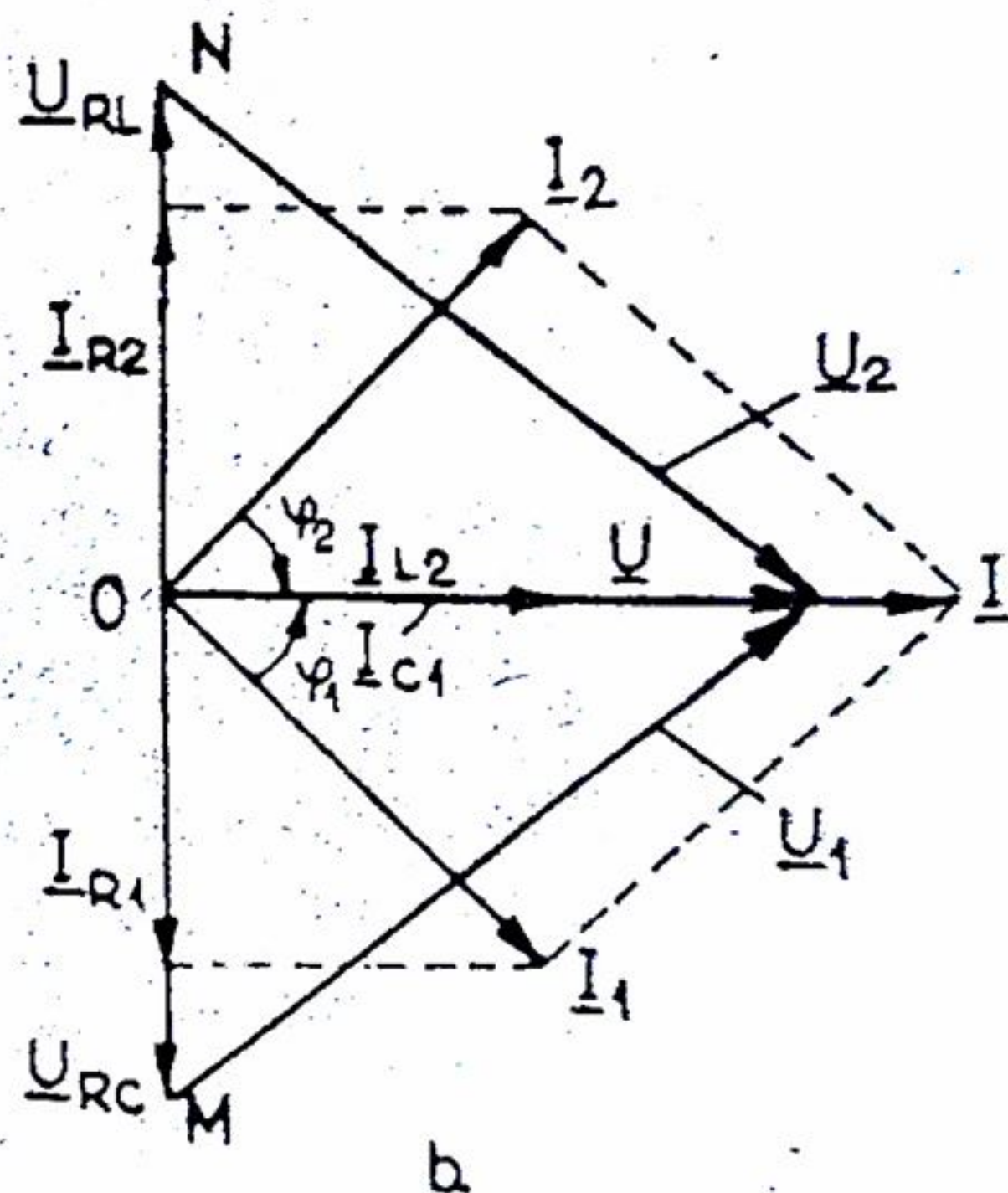
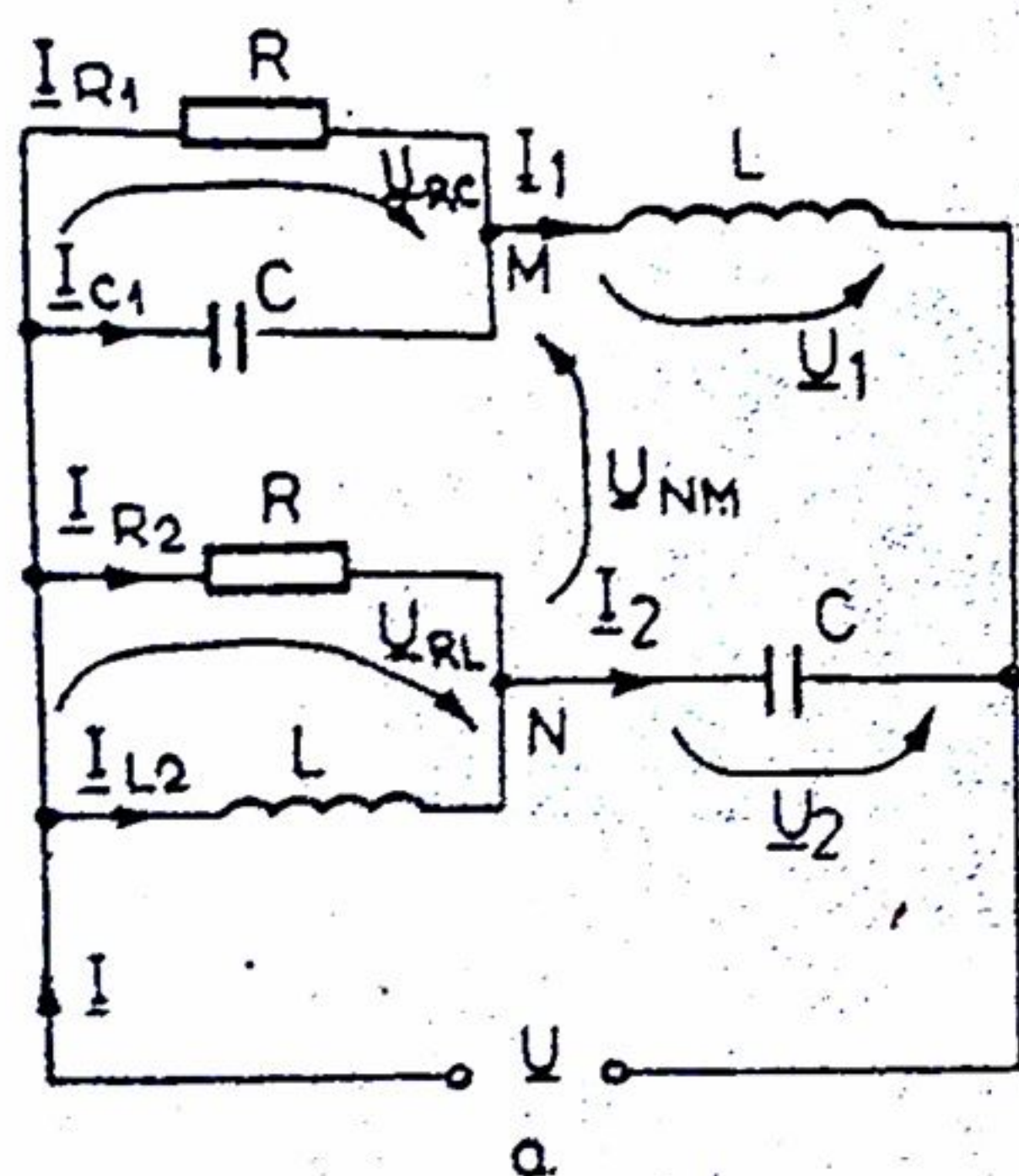


Fig.5.22

Pe baza metodei prezentate și a diagramelor din fig.5.20 și 5.21, se obține diagrama din fig.5.22,b, în care:  $U_{RC} = U_{RL} = 100V$ ,  $I_{R1} = I_{R2} = I_{C1} = I_{C2} = I_{L2} = 10A$ ,  $I_1 = I_2 = 10\sqrt{2} A$ ,  $I = 20A$ ,  $U_1 = U_2 = 100\sqrt{2} V$ ,  $\varphi_1 = -\varphi_2 = 45^\circ$ ,  $\varphi = 0$ ,  $U_{NM} = 200V$  (obținută grafic).

#### 5.1.4 Puterea electrică activă, reactivă și aparentă. Triunghiurile puterii, tensiunii, impedanței și admitanței

Puterea electrică are valoarea momentană:  $p = ui$ , unde  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ ;  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$ . Rezultă:  $p = ui = [UI \cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$ .



Valoarea medie:

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi, \quad (5.78)$$

se numește putere activă, cu unitatea de măsură watt (W). iar energia consumată se numește energie activă. Dacă un circuit conține rezistență, inductivitate și capacitate, atunci numai în rezistență se transformă energia electrică în energie calorică prin curentul de conducție activ:

$$I_a = I \cos \varphi \quad (5.79)$$

puterea activă având valoarea

$$P = UI_a = UI \cos \varphi, \quad (5.80)$$

Într-un circuit cu rezistența și tensiunea eficace constante, puterea activă este constantă, deci și curentul activ  $I_a$  este constant, iar curentul din circuit depinde de defazajul  $\varphi$  al circuitului (fig.5.23):  $I = \frac{I_a}{\cos \varphi}$ .

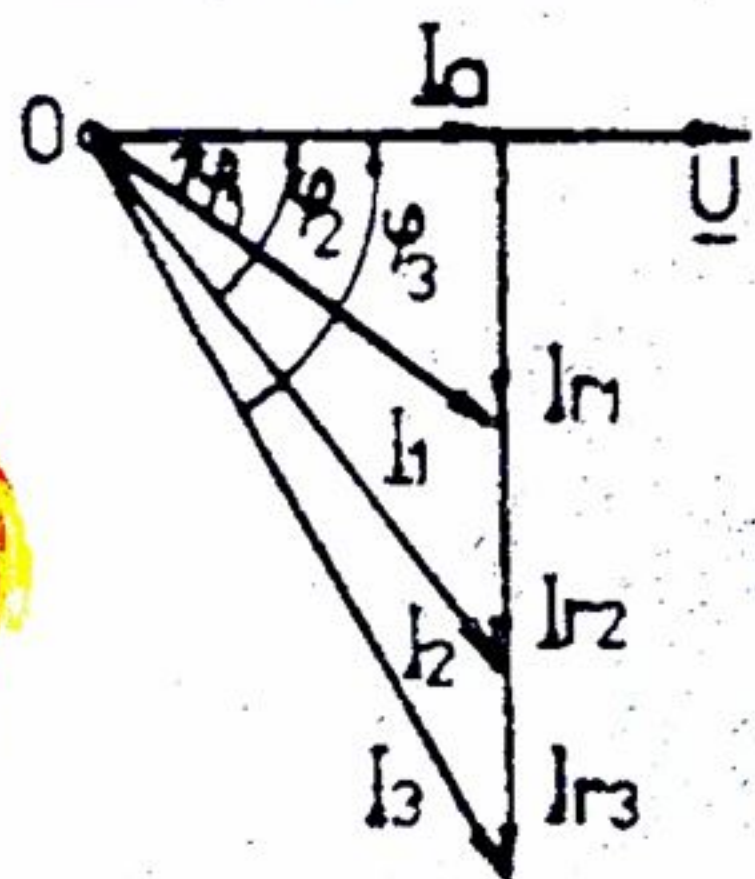


Fig.5.23

Este deci avantajos ca mărimea  $\cos \varphi$  numită factor de putere să fie cât mai mare, adică să tindă spre unitate.

În circuitele de curent alternativ, reactanța inductivă, sau capacitivă, provoacă un schimb bilateral de energie între sursă și circuit; curentul se numește curent de conducție reactiv (fig.5.23):

$$I_r = I \sin \varphi \quad (5.81)$$

iar puterea respectivă

$$Q = UI_r = UI \sin \varphi \quad (5.82)$$

se numește puterea reactivă, cu unitatea de măsură voltamper reactiv (VAr). Puterea reactivă este absorbită de bobinele și condensatoarele din circuit, într-un sfert de perioadă și apoi cedată înapoi sursei în următorul sfert de perioadă, în mod independent.

Eliminând unghiul de defazaj  $\varphi$  din relațiile puterilor activă și reactivă:  $P = UI \cos \varphi$ ,  $Q = UI \sin \varphi$ , se obține o mărime pozitivă

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \quad (5.83)$$

numită putere aparentă și care se măsoară în voltamper (VA).

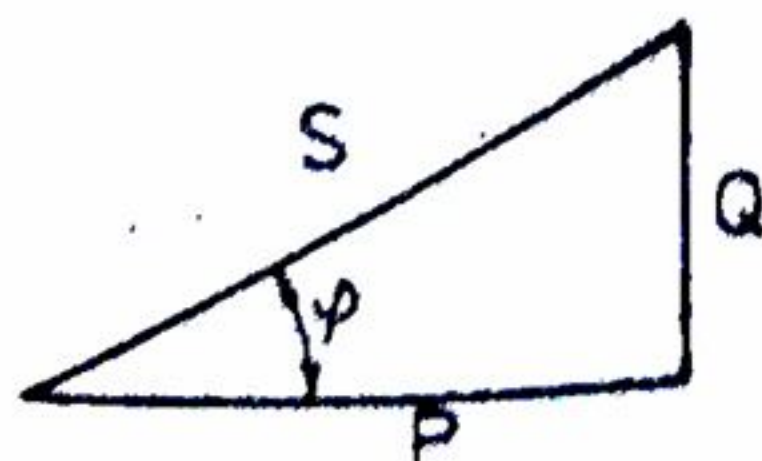


Fig.5.24

Ultimele trei relații se pot atașa la triunghiul dreptunghic din fig.5.24 numit triunghiul puterilor. Știind că  $P > 0$  și  $Q \geq 0$  rezultă că într-un circuit cu mai multe rezistențe, inductivități și capacități, legate în serie, paralel sau mixt, puterea activă totală este egală cu suma aritmetică a puterilor rezistoarelor ( $n$ ), puterea reactivă totală este egală cu suma algebrică a puterilor



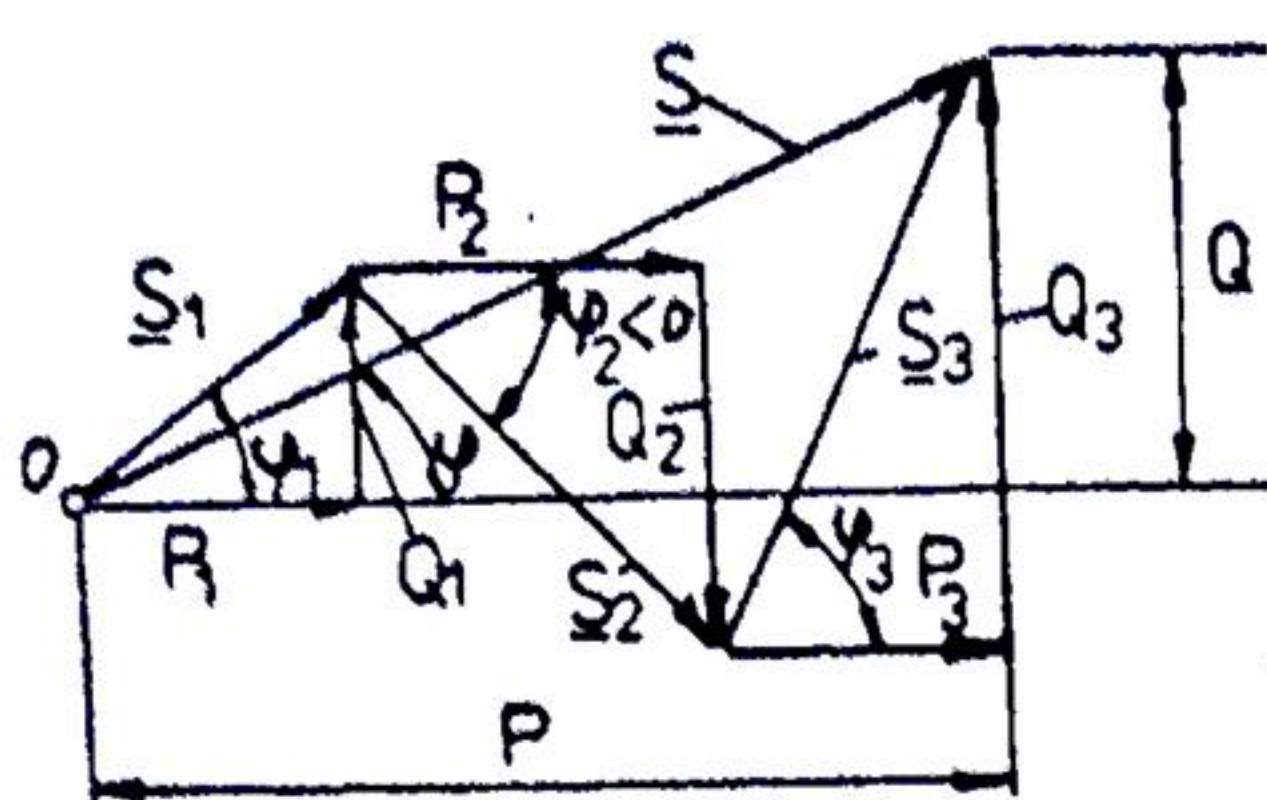


Fig. 5.25

câmpului magnetic (+) și câmpului electric (-) al bobinelor și condensatoarelor (m), iar puterea aparentă totală a circuitului considerat este egală cu suma vectorială (fig. 5.25-pentru trei impedanțe):

$$P = \sum_{i=1}^n P_i; Q = \sum_{i=1}^m Q_i; S = \sum_{i=1}^r S_i \quad (5.84)$$

unde r este numărul de impedanțe, iar modulul

S este (5.83):  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Dacă laturile triunghiului puterilor (fig. 5.24) se împart la curentul efecace I, se obține triunghiul tensiunilor (fig. 5.26), cu laturile:

$$U = \frac{S}{I}; U_R = \frac{P}{I} = U \cos \varphi; U_X = \frac{Q}{I} = U \sin \varphi \quad (5.85)$$

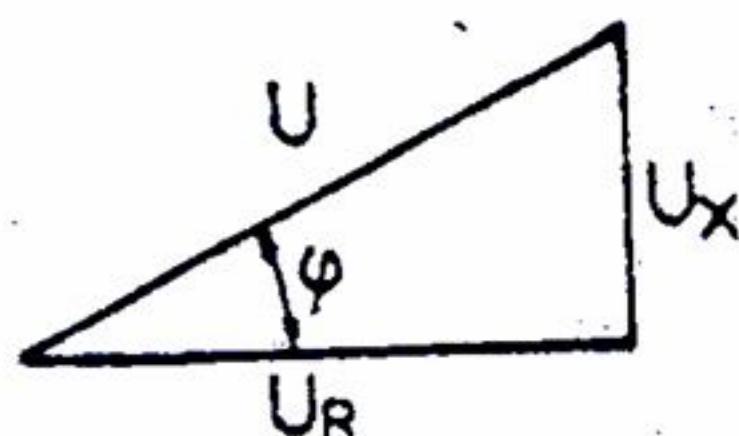


Fig. 5.26

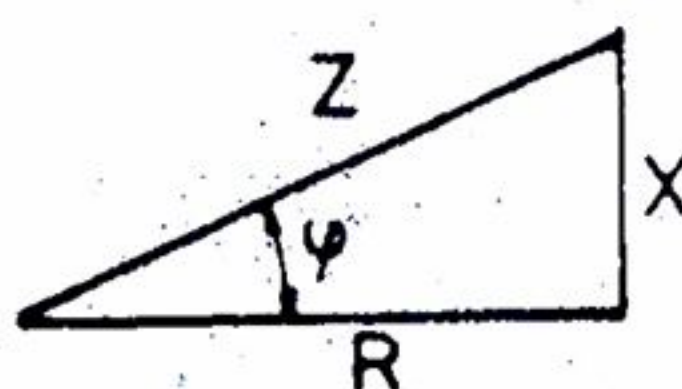


Fig. 5.27

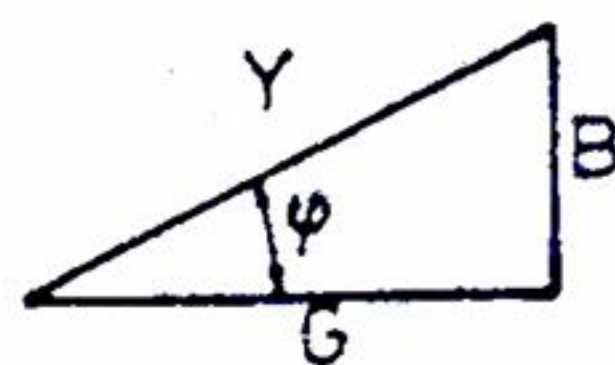


Fig. 5.28

Dacă laturile triunghiului tensiunilor se împart la curentul efecace I, se obține triunghiul impedanțelor (fig. 5.27), cu laturile:

$$Z = \frac{U}{I}; R = \frac{U_R}{I} = Z \cos \varphi; X = \frac{U_X}{I} = Z \sin \varphi \quad (5.86)$$

În sfârșit, dacă laturile triunghiului impedanței se împart la pătratul impedanței ( $Z^2$ ) se obține triunghiul admitanțelor (fig. 5.28) cu laturile :

$$Y = \frac{Z}{Z^2} = \frac{1}{Z}; G = \frac{R}{Z^2} = Y \cos \varphi; B = \frac{X}{Z^2} = Y \sin \varphi \quad (5.87)$$

În aceste expresii Y este admitanță, G-conductanță, iar B-susceptanță, toate trei măsurându-se în  $[\Omega^{-1}]$ . Celor patru triunghiuri li se pot atașa mai multe relații utile, dintre care menționăm:

$$S = UI = ZI^2 = \frac{U^2}{Z} = YU^2, P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2,$$

$$Q = S \sin \varphi = UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2, \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{X}{R} = \frac{B}{G} = \frac{I_r}{I_a},$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y} = \frac{I_a}{I}, Y = \sqrt{G^2 + B^2} \text{ etc.}$$



### 5.1.5 Metoda algebrică generală de rezolvare a circuitelor ramificate monofazate

Metoda algebrică de rezolvare a circuitelor electrice monofazate se recomandă în cazul calculelor asistate de calculator (minicalculator); în caz. contrar, această metodă devine greoaie, cu volum mare de calcul manual.

Se consideră circuitul ramificat din fig.5.29.a, în care se cunosc: tensiunea de alimentare  $U$ , elementele de circuit  $R, L, C$  și pulsația  $\omega$ .

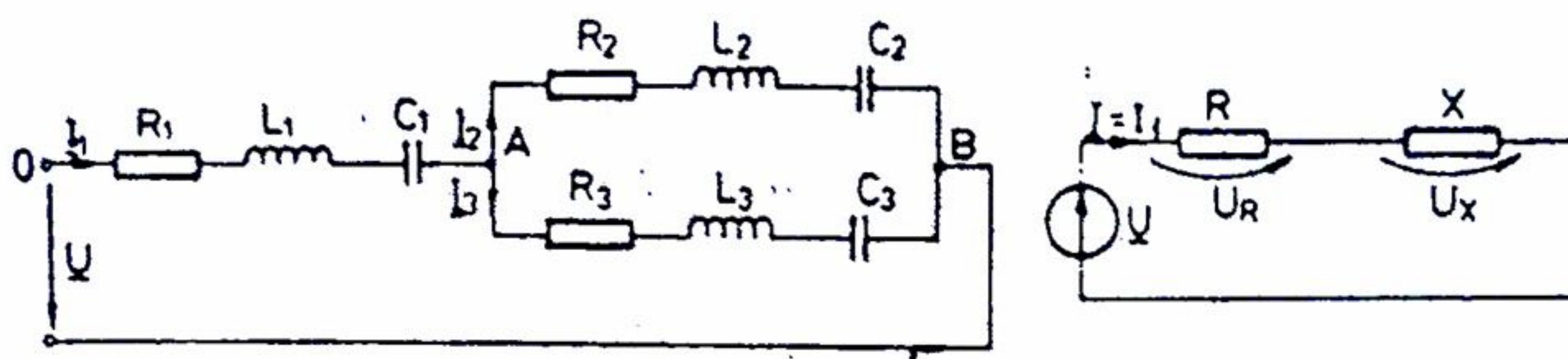


Fig.5.29.

Se parcurg următoarele etape de rezolvare:

- Se calculează reactanțele și impedanțele celor trei ramuri ale circuitului (cu  $i = 1, 2, 3$ ):

$$X_{Li} = \omega L_i, \quad X_{Ci} = \frac{1}{\omega C_i}, \quad X_i = X_{Li} - X_{Ci}, \quad Z_i = \sqrt{R_i^2 + X_i^2}.$$

- Se calculează conductanțele, susceptanțele, admitanța și impedanța grupului paralel  $G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}, G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2}, G_{23} = G_2 + G_3, B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2}, B_3 = \frac{X_3}{Z_3^2}, B_{23} = B_2 + B_3,$

$$Y_{23} = \sqrt{G_{23}^2 + B_{23}^2}, \quad Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}}.$$

- Se determină rezistența și reactanța grupului paralel, rezistența, reactanța și impedanța circuitului (fig.5.29.b).

$$R_{23} = G_{23} Z_{23}^2, \quad X_{23} = B_{23} Z_{23}^2, \quad R = R_1 + R_{23}, \quad X = X_1 + X_{23}, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

- Se calculează curentul absorbit de la sursă, tensiunile  $U_1$  (pe ramura 1) și  $U_{23}$  (pe grupul paralel), precum și curenții din ramurile paralele  $I_1 = \frac{U}{Z}; U_1 = Z_1 I_1; U_{23} = Z_{23} I_1;$

$$I_2 = \frac{U_{23}}{Z_2}, \quad I_3 = \frac{U_{23}}{Z_3}.$$

- Se calculează defazajele  $\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}, \quad \varphi_3 = \arctg \frac{X_3}{R_3},$

$$\varphi_{23} = \arctg \frac{X_{23}}{R_{23}}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$



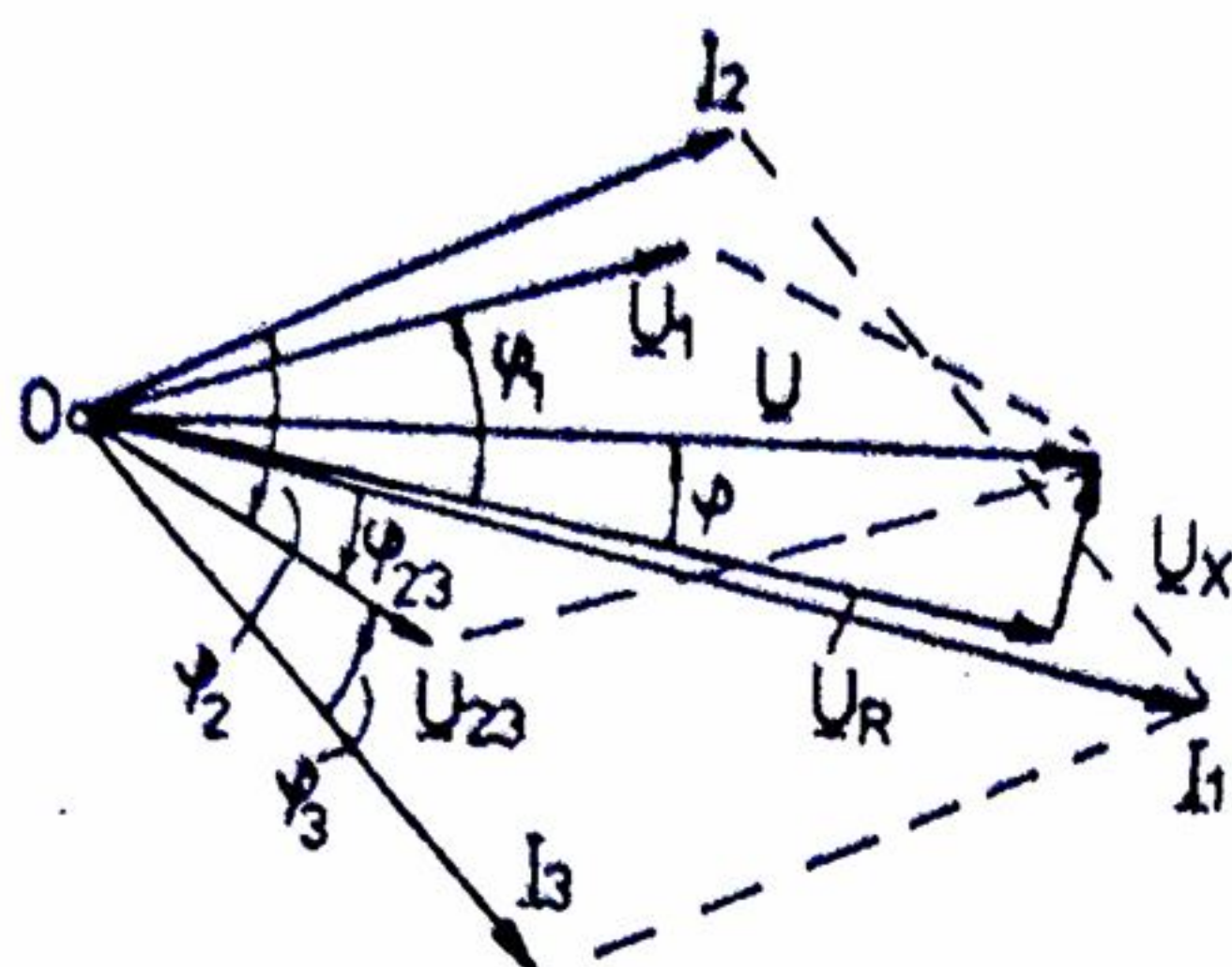


Fig. 5.30

de referință),  $\varphi(+)$ ,  $I_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $U_1$ ,  $\varphi_{23}$ ,  $U_{23}$ , (ca verificare  $U_1 + U_{23} = U$ ),  $\varphi_2$ ,  $I_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $I_3$  (ca verificare  $I_2 + I_3 = I_1$ ).

- Se calculează puterile

$$P_1 = R_1 I_1^2, P_2 = R_2 I_2^2, P_3 = R_3 I_3^2;$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = UI_1 \cos \varphi$$

$$Q_1 = X_1 I_1^2, Q_2 = X_2 I_2^2, Q_3 = X_3 I_3^2;$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = UI_1 \sin \varphi$$

$$S_1 = U_1 I_1, S_2 = U_{23} I_2, S_3 = U_{23} I_3,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI.$$

- Se trasează diagrama polară a tensiunilor și curenților (fig. 5.30), în ordinea:  $\underline{U}$  (fazor de referință),  $\varphi(+)$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\varphi_{23}$ ,  $\underline{U}_{23}$ , (ca verificare  $\underline{U}_1 + \underline{U}_{23} = \underline{U}$ ),  $\varphi_2$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\underline{I}_3$  (ca verificare  $\underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1$ ).

nilor și curenților (fig. 5.30), în ordinea:  $\underline{U}$  (fazor de referință),  $\varphi(+)$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\varphi_{23}$ ,  $\underline{U}_{23}$ , (ca verificare  $\underline{U}_1 + \underline{U}_{23} = \underline{U}$ ),  $\varphi_2$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\underline{I}_3$  (ca verificare  $\underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1$ ).

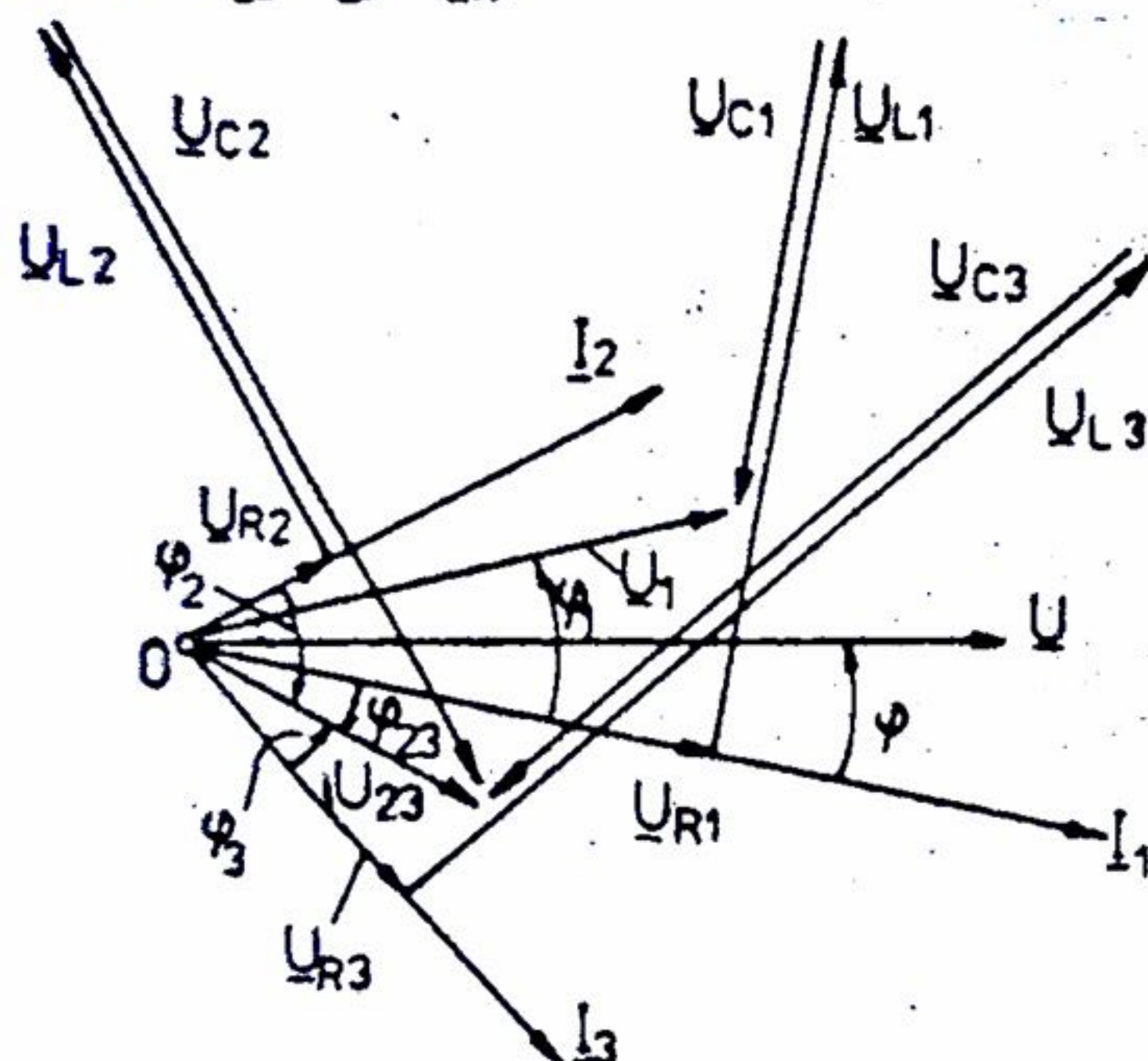


Fig. 5.31

Tot ca verificare se poate trasa și suma fazorilor  $\underline{U}_R = \underline{U}_X$ , care trebuie să fie egală cu  $\underline{U}$ , unde  $U_R = RI_1$  și  $U_X = XI_1$  (fig. 5.29.b).

- Se completează diagrama din fig. 5.30 cu căderile de tensiune pe elementele de circuit (cu  $i = 1, 2, 3$ ):

$$U_{Ri} = R_i I_i,$$

$$U_{Li} = X_{Li} I_i, U_{Ci} I_i \quad (5.96)$$

$\underline{I}_1$  și se obține diagrama din fig. 5.31.

## 5.2 CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV, PRIN METODA REPREZENTĂRII ÎN COMPLEX

Această metodă constă în utilizarea proprietăților numerelor complexe și oferă simplitate și volum redus de calcul.

În cazul circuitelor cu un număr relativ mare de laturi, pentru care se impune rezolvarea unor sisteme cu tot atâtea ecuații complexe, metoda permite utilizarea calculatoarelor electronice. Sistemele de  $N$  ecuații complexe se transformă în  $2N$  ecuații



algebrice, rezolvarea asistată de calculator fiind identică cu cea din cap.3.

### 5.2.1 Proprietățile numerelor complexe și reprezentarea în complex a mărimilor electrice

Un număr complex se poate scrie în funcție de operatorul imaginar  $j = \sqrt{-1}$  astfel (fig.5.32):  $\underline{C} = a + jb = C(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Ce^{j\varphi}$ , unde  $\underline{C}$  este numărul complex,  $C$  - modulul numărului complex,  $a$  - partea reală,  $b$  - partea imaginară,  $\varphi$  - defazajul numărului complex, iar  $e$  - baza logaritmului natural. Între aceste mărimi se pot scrie relațiile:

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}; \quad j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad \underline{C}^* = a - jb = Ce^{-j\varphi} \quad (5.97)$$

Numărul complex de modul unitar și argument  $\alpha$  se numește operator de rotație. Dacă  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , se obține (5.97) operatorul care atașat unui vector (fazor) îl rotește în sens

trigonometric cu unghiul  $\frac{\pi}{2}$ .

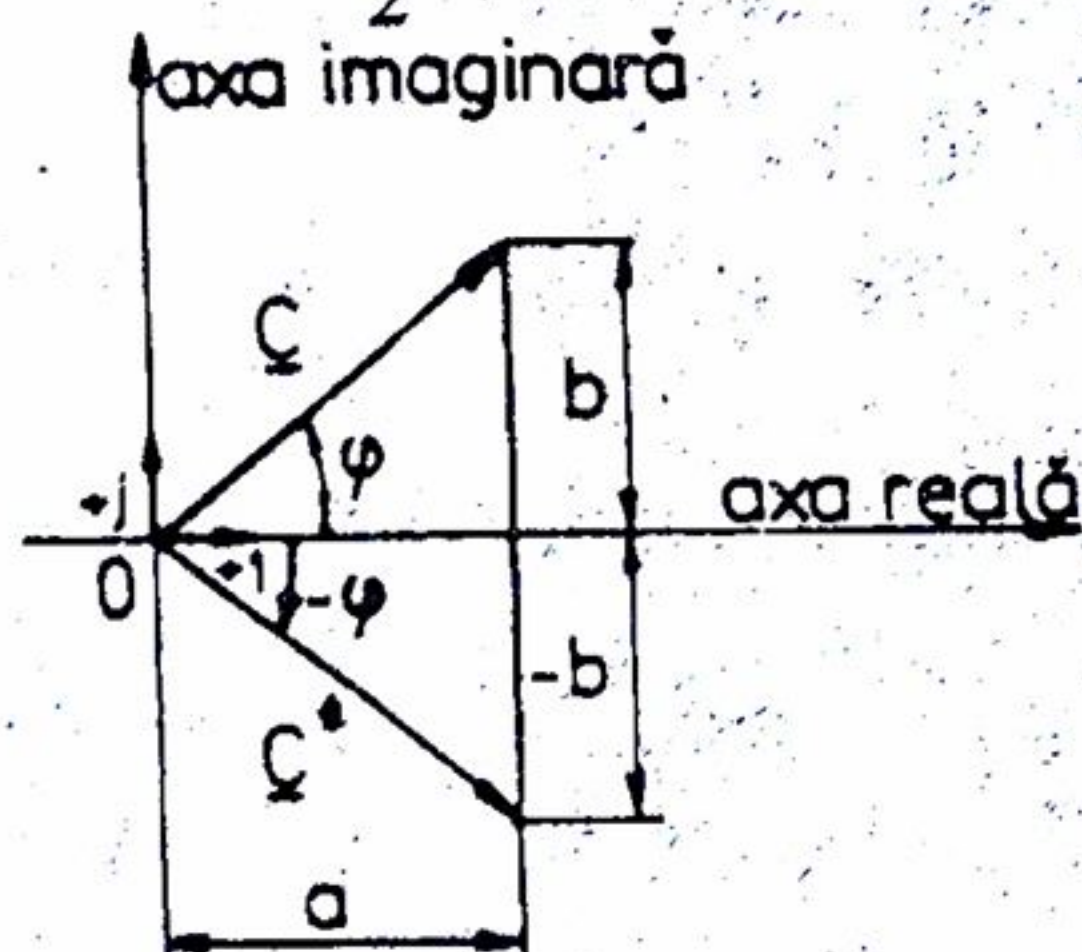


Fig.5.32

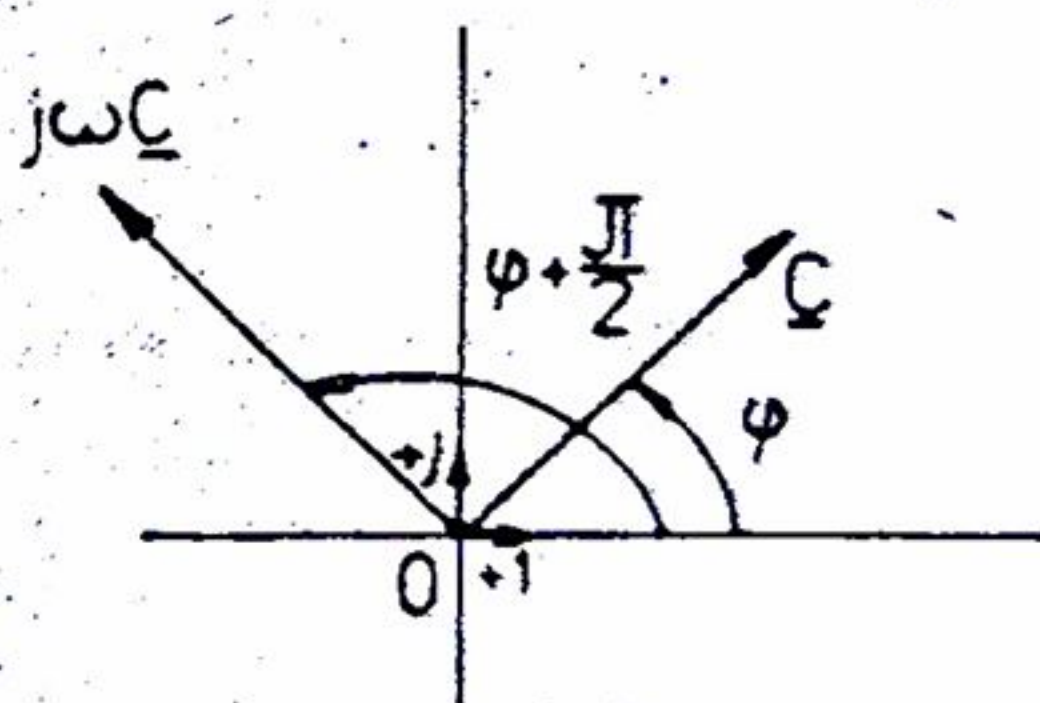


Fig.5.33

Conjugatul numărului complex  $\underline{C}$  se notează cu  $\underline{C}^*$  (5.97) și se utilizează în raționalizarea fracțiilor, precum și alte operații.

Derivata unui număr complex în raport cu timpul este tot un număr complex, rotit cu  $\frac{\pi}{2}$  în sens trigonometric și cu modulul de  $\omega$  ori mai mare (fig.5.33).

$$\underline{C}' = \frac{d}{dt}(Ce^{j\varphi}) = \frac{d}{dt}(Ce^{j\omega t}) = j\omega Ce^{j\omega t} = j\omega \underline{C} \quad (5.98)$$

unde:  $\varphi = \omega t$  reprezintă faza definită în general ca produs între pulsație și timp.

Integrala unui număr complex în raport cu timpul este tot un număr complex, rotit cu  $\frac{\pi}{2}$  în sens orar și cu modulul de  $\omega$  ori mai mic (fig.5.34). Rezultă succesiv:



$$\int \underline{C} dt = \int C e^{j\omega t} dt = \frac{C e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{C}}{j\omega} \quad (5.99)$$

Transpunerea în complex a mărimilor sinusoidale se face prin includerea valorilor efective fazoriale ale mărimilor electrice în planul complex. Astfel, mărimile conținute de triunghiurile puterii (fig.5.24), tensiunii (fig.5.26), impedanței (fig.5.27), admitanței (fig.5.28) și curentului (fig.5.23) se pot scrie în complex :

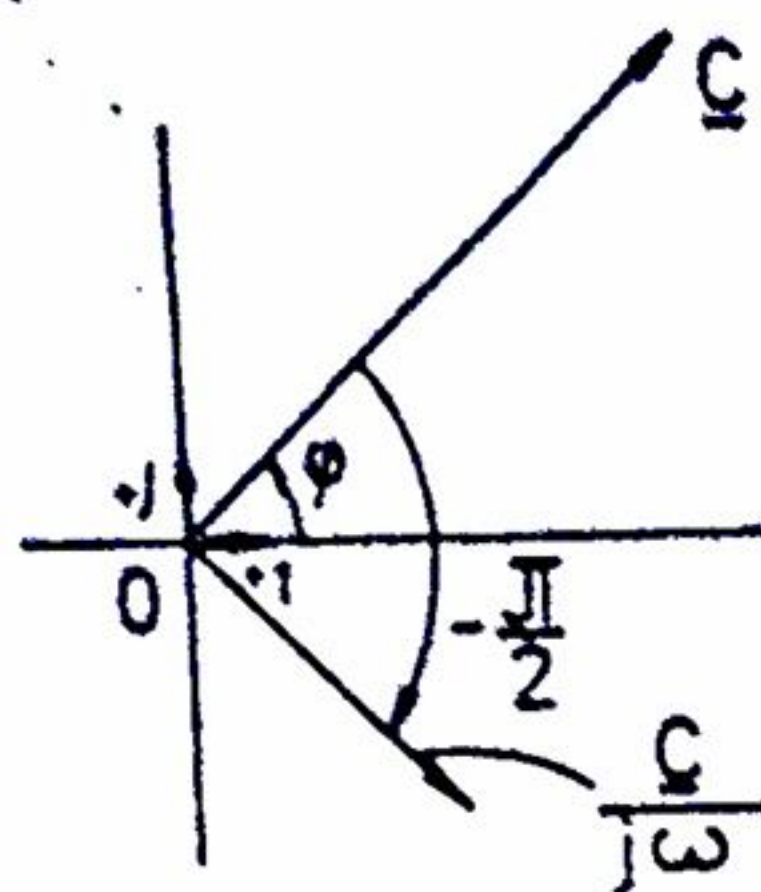


Fig.5.34

$$\underline{S} = P + jQ; \underline{U} = U_R + jU_X; \underline{Z} = R + jX; \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB; \underline{I} = I_a - jI_r \quad (5.100)$$

Comparând reprezentarea în complex a tensiunii  $\underline{U}$  și a curentului conjugat  $\underline{I}^*$  cu triunghiului puterilor transpuse în planul complex (fig.5.35) se constată egalitatea:  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ , deoarece:

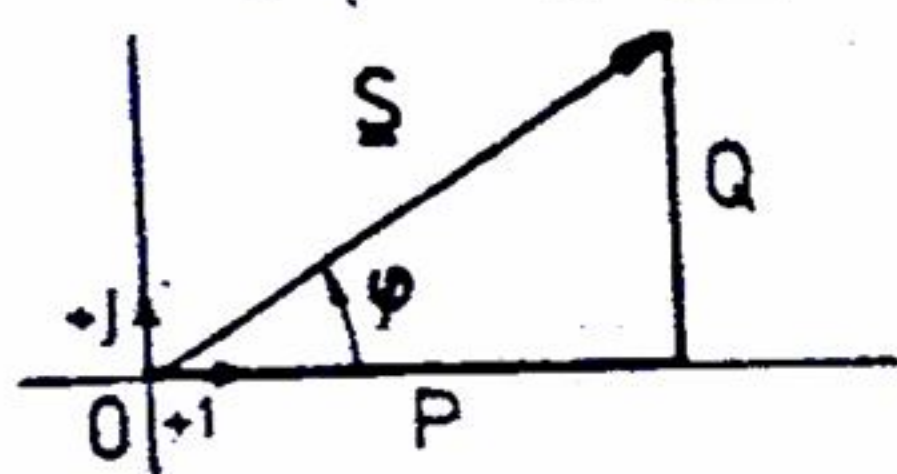


Fig.5.35

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U \underline{I}^* = U I e^{j\phi} = S e^{j\phi} \quad (5.101)$$

Rezultă

$$\underline{S} = U I e^{j\phi} = U I (\cos \phi + j \sin \phi) = U I \cos \phi + j U I \sin \phi.$$

$$\text{Deci, } \underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \quad (5.102)$$

### 5.2.2 Legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff în forma complexă

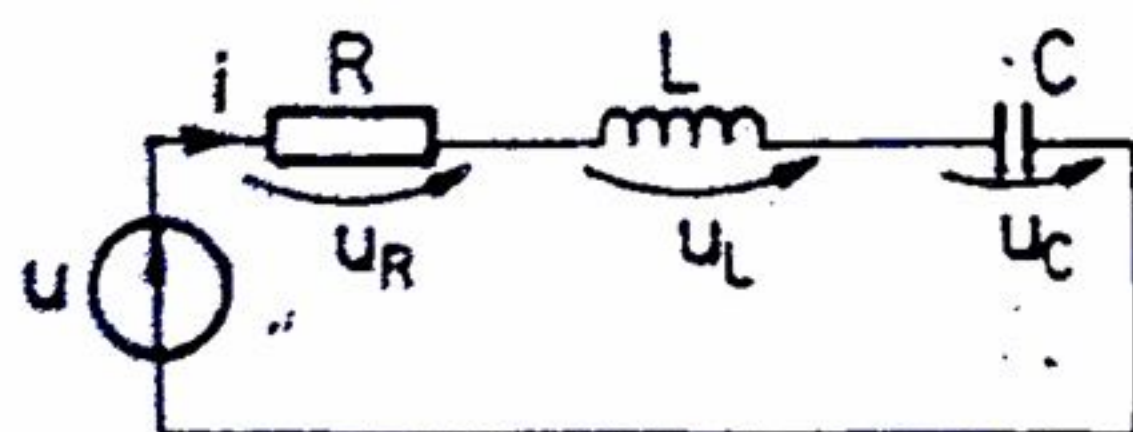


Fig.5.36

Fie circuitul R,L,C, serie din fig.5.36 în care tensiunea:  $u = \sqrt{2} U \sin \omega t$ , acoperă căderile de tensiune momentane pe elementele de circuit. Rezultă:  $u = u_R + u_L + u_C$ , sau,

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.103)$$

Cu (5.98) și (5.99) se trece de la valorile momentane la valorile efective (ca mărimi complexe) scriindu-se, în loc de  $u$ , corespondentul  $\underline{U}$  și în loc de  $i$  corespondentul  $\underline{I}$ : deci (5.103) devine:  $\underline{U} = \underline{I}R + L(j\omega \underline{I}) + \frac{1}{C} \left( \frac{\underline{I}}{j\omega} \right)$ , sau succesiv

$$\underline{U} = \underline{I} \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I} (R + jX) = \underline{I} \underline{Z}, \quad (5.104)$$

care se numește legea lui Ohm în formă complexă. Expresia:

$$\underline{Z} = R + jX \quad (5.105)$$



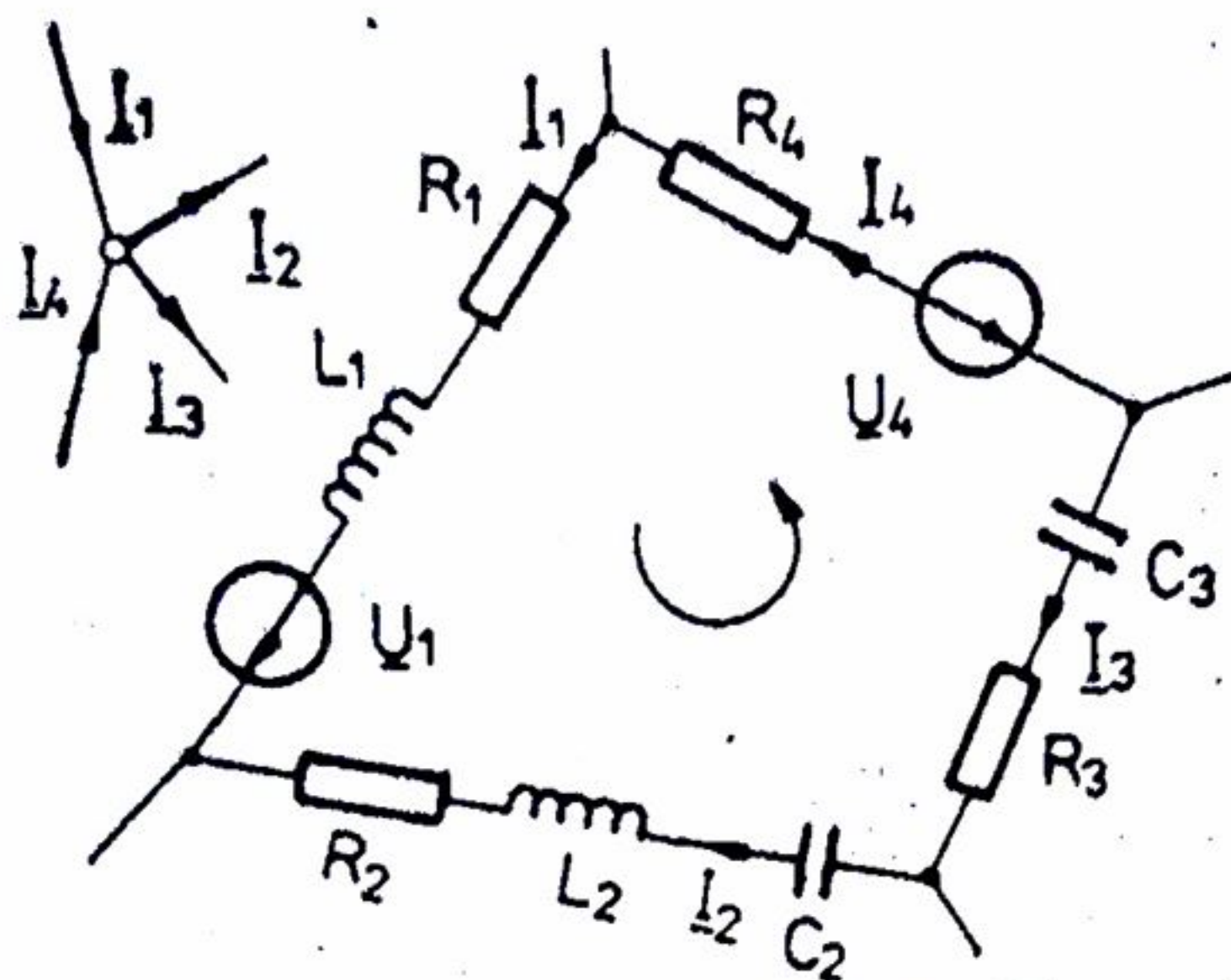


Fig. 5.37

se numește impedanța complexă a circuitului, în care se recunoaște expresia reactanței:

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Teoremele lui Kirchhoff prezentate în regimul electrocinetic se pot extinde și în regim cvasistacionar (c.a.):

$$\sum i = 0; \quad (5.106)$$

$$\sum u = \sum \left( Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \right) \quad (5.107)$$

Transpuse în planul complex acestea au

forma:  $\sum \underline{I} = 0 \quad (5.108)$

$$\sum \underline{U} = \sum \left[ \underline{I} \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \right] = \sum \underline{I} \underline{Z} \quad (5.109)$$

care reprezintă teoremele lui Kirchhoff în formă complexă. Ca exemplu de aplicare la nodul și bucla din fig. 5.37, aceste teoreme se scriu:  $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0$ ;

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_4 = \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) - \underline{I}_2 \left( R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} \right) - \underline{I}_3 \left( R_3 - j\frac{1}{\omega C_3} \right) + \underline{I}_4 R_4.$$

### 5.2.3 Metode de rezolvare în complex a circuitului electric de curent alternativ

Se poate face o analogie între metodele de rezolvare în c.c. și metodele de rezolvare în c.a. cu mărimi complexe.

1) Metoda legii lui Ohm. Se aplică în cazul circuitelor serie alimentate la o sursă de tensiune. De regulă se cunosc elementele de circuit  $R, L, C$  și t.e.m. a sursei de tensiune sinusoidală, adică se cunosc valoarea efectivă a tensiunii  $U$  și pulsația  $\omega$ , tensiunea  $U$  fiind luată fazor de referință.

Curentul absorbit de la sursă este calculat cu legea lui Ohm

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{R + jX} = \frac{U}{R + j(X_L - X_C)}, \quad (5.110)$$

unde  $R$  este suma rezistențelor legate în serie,  $X_L = \sum \omega L$  - suma reactanțelor inductive legate în serie, iar  $X_C = \sum \frac{1}{\omega C}$  - suma reactanțelor capacitive legate în serie. Cu ajutorul curentului  $\underline{I}$  se pot calcula căderile de tensiune pe elementele de circuit, defazajul



circuitului, expresia momentană a curentului și puterile:

$$\underline{U}_R = \underline{I}R, \underline{U}_L = j\underline{I}X_L, \underline{U}_C = -j\underline{I}X_C; \varphi = \arctg \frac{X}{R}, i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = P + jQ \quad (5.111)$$

apoi se trasează diagrama fazorilor, tensiune curent, în plan complex.

2) Metoda impedanțelor echivalente. Se utilizează, în general, în cazul circuitelor ramificate alimentate la o singură sursă de tensiune (circuitul monofazat). Grupurile de impedanțe legate în paralel se transfigurează în impedanțe echivalente serie și se aplică în continuare metoda legii lui Ohm. La calculul în complex al impedanței echivalente a circuitului se folosesc relații asemănătoare cu cele din c.c., adică, pentru mai multe impedanțe legate în serie se obține o impedanță echivalentă

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots \quad (5.112)$$

iar pentru mai multe impedanțe legate în paralel, impedanța echivalentă se obține din

$$\text{relația: } \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots$$

Aplicație. Să se rezolve circuitul din fig. 5.38, în care  $\underline{U} = U = 174V$ ;  $\underline{Z}_1 = (1+j5)\Omega$ ;  $\underline{Z}_2 = (10 - 24j)\Omega$ ;  $\underline{Z}_3 = (6+j8)\Omega$ .

Impedanțele grupului paralel și echivalentă sunt  $\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{79 + 147j}{8} \Omega$ ;

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{AB} = -\frac{87(1+j)}{8} \Omega.$$

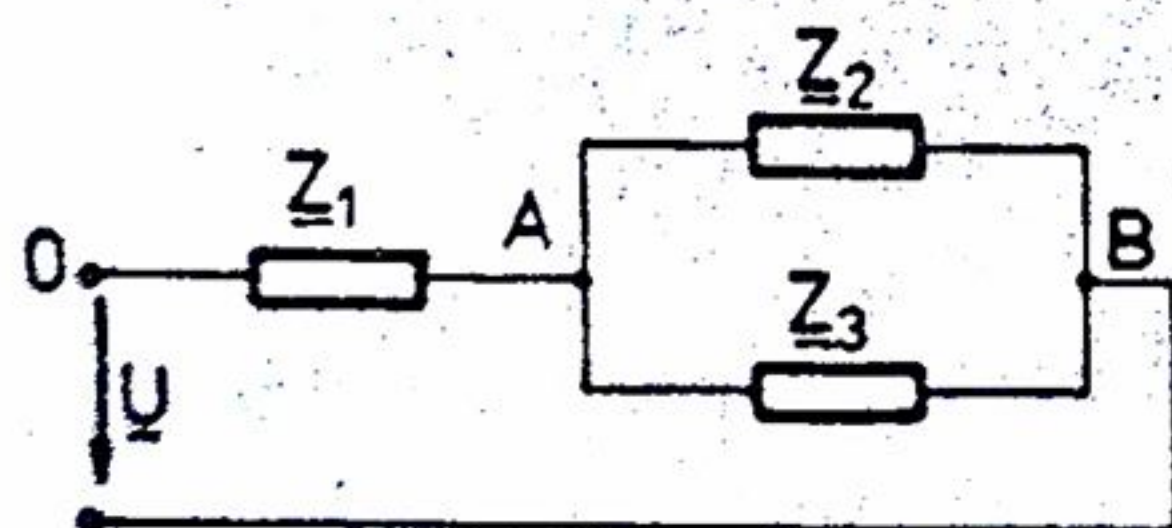


Fig. 5.38

Se determină curentul absorbit de la sursa  $\underline{I}_1$  și defazajul acestuia față de tensiunea  $\underline{U}$  (luată ca fază de referință)  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = 8(1-j)$ ;

$$I_1 = 8\sqrt{2}A, \varphi = \arctg \frac{X}{R} = 45^\circ.$$

Celelalte defazaje sunt :

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1} = 78^\circ 40'; \varphi_2 = \arctg \frac{-24}{10} = -67^\circ 20';$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{8}{6} = -53^\circ 7'.$$

Se calculează căderile de tensiune pe impedanțe:  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 48 + j32$ ;

$$U_1 = 57,7 V; \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB} \underline{I}_1 = 126 - j32; U_{AB} = 130V.$$

Rezultă curenții din ramuri:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = 3 + j4; I_2 = 5A; \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = 5 - j12; I_3 = 13A.$$

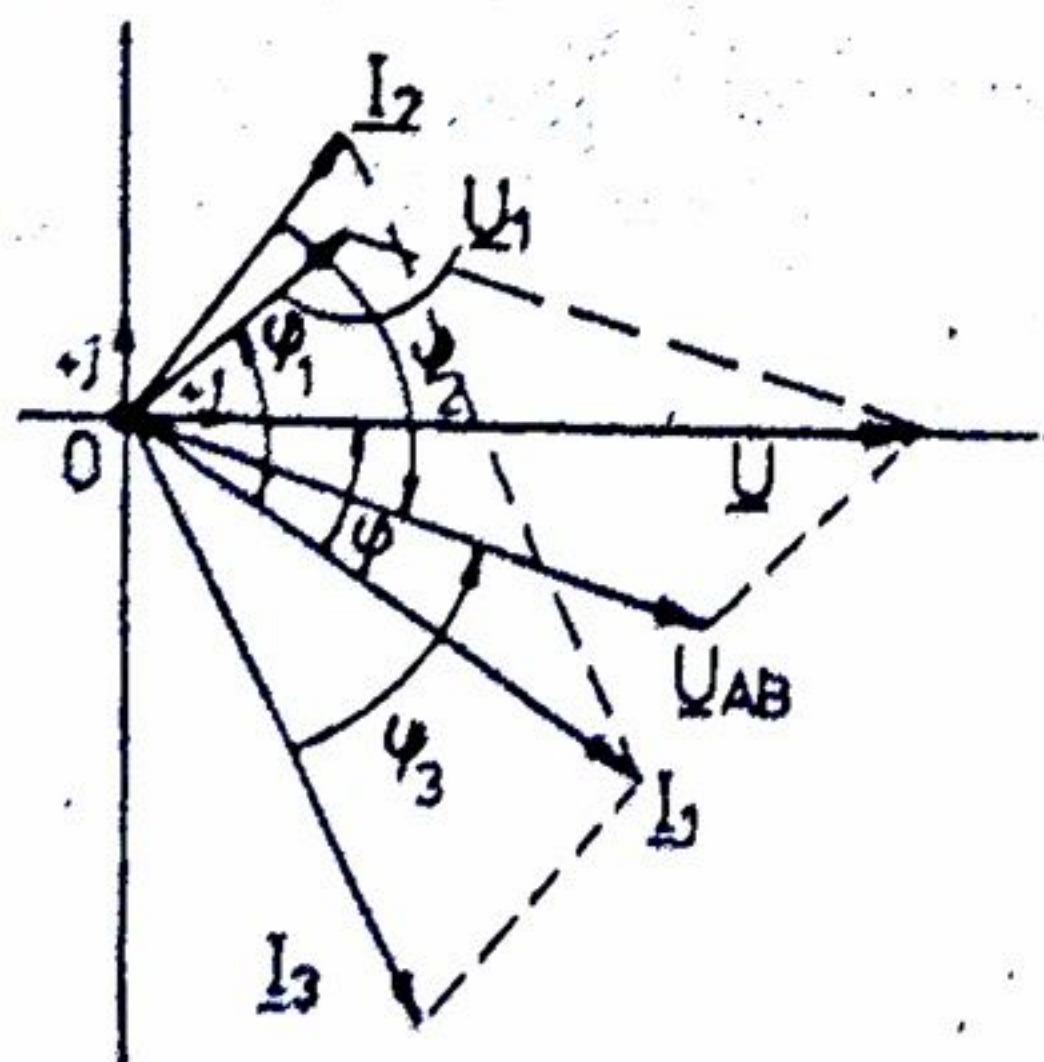


Fig. 5.39



Ca verificare:  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ . Puterea aparentă este:  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}_1^* = U \underline{I}_1^* = 174(8 + j18)$ ,  $P = 1392 \text{ W}$ ;  $Q = 1392 \text{ VAR}$ ;  $S = 1392\sqrt{2} \text{ VA}$ . Circuitul este inductiv ( $Q > 0$ ). În fig. 5.39 este prezentată diagrama în planul complex al tensiunilor unde, ca verificare se constată  $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_{AB}$  și  $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ .

3) Metoda teoremelor lui Kirchhoff. Se utilizează în cazul circuitelor ramificate, cu una sau mai multe surse de tensiune. Etapele de calcul sunt următoarele: se determină numărul de noduri electrice  $N$ , numărul de bucle  $B$  care nu se suprapun, se aleg sensuri arbitrare pentru curenții din laturi, se scrie teorema întâi a lui Kirchhoff

$$\sum \underline{I} = 0 \quad (5.114)$$

de  $(N-1)$  ori, și teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$\sum \underline{Z} \underline{I} = \sum \underline{U} \quad (5.115)$$

de  $B$  ori, cu sens de parcurgere arbitrar (dacă sensul curențului are sensul de parcurgere, produsul respectiv  $\underline{Z} \underline{I}$  are semn pozitiv, în caz contrar-negativ), apoi se rezolvă sistemul celor  $L$  ecuații ( $L = N - 1 + B$ ). Suma din membrul drept (5.115) este fazorială.

De regulă, în cele  $L$  ecuații, necunoscute sunt curenții, fiind cunoscute tensiunile de alimentare și impedanțele din circuit. După ce se determină curenții din laturi și defazajele se pot calcula puterile și se poate trasa diagrama fazorilor ( $\underline{U}$ ;  $\underline{I}$ ) în planul complex.

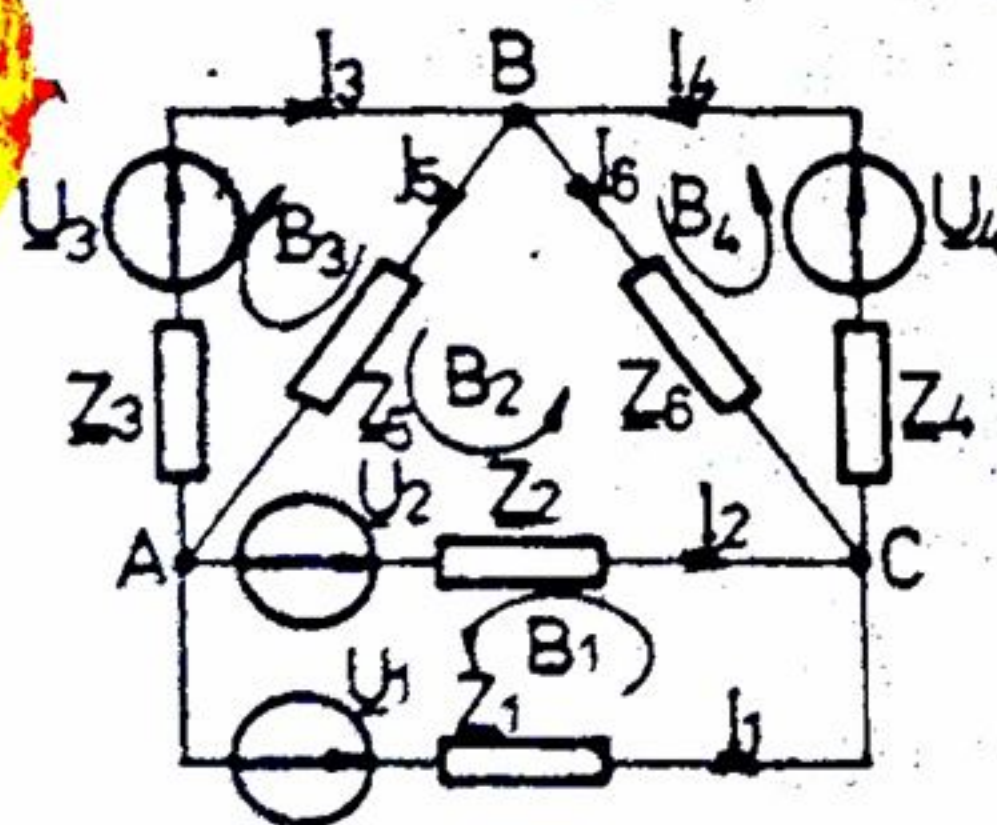


Fig. 5.40

Aplicație. Să se afle curenții din laturile circuitului reprezentat în fig. 5.40, în care:  $\underline{U}_1 = 90 \text{ V}$  (faza de referință pentru toți ceilalți fazori  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ),  $\underline{U}_2 = (180 - j135) \text{ V}$ ,  $\underline{U}_3 = (160 + j175) \text{ V}$ ,  $\underline{U}_4 = (170 + j120) \text{ V}$ ,  $\underline{Z}_1 = (25 - j25) \Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = 10 \Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (10 + j10) \Omega$ ,  $\underline{Z}_4 = (30 + j20) \Omega$ ,  $\underline{Z}_5 = (20 + j5) \Omega$ ,  $\underline{Z}_6 = (10 + j20) \Omega$ .

Circuitul are  $N = 3$  noduri și  $B = 4$  bucle, deci:  $L = N - 1 + B = 6$  laturi.

Se scriu teoremele lui Kirchhoff:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_5 = 0; & \underline{I}_3 + \underline{I}_4 - \underline{I}_5 - \underline{I}_6 = 0 \\ -\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2; & \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_6 \underline{I}_6 + \underline{Z}_5 \underline{I}_5 = \underline{U}_2 \\ \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{Z}_5 \underline{I}_5 = \underline{U}_3; & \underline{Z}_4 \underline{I}_4 + \underline{Z}_6 \underline{I}_6 = \underline{U}_4 \end{cases} \quad (5.116)$$

Se introduc valorile tensiunilor și impedanțelor, se rezolvă sistemul și se obțin curenții:  $\underline{I}_1 = 4 + j5$ ;  $\underline{I}_2 = 3 - j4$ ;  $\underline{I}_3 = 8 + j6$ ;  $\underline{I}_4 = 4 - j3$ ;  $\underline{I}_5 = 7$ ;  $\underline{I}_6 = 5 + j3$ , cu modulele:  $I_1 = 2\sqrt{5} \text{ A}$ ,  $I_2 = 5 \text{ A}$ ,  $I_3 = 10 \text{ A}$ ,  $I_4 = 5 \text{ A}$ ,  $I_5 = 7 \text{ A}$ ,  $I_6 = 5,83 \text{ A}$ .

Rezolvarea sistemului (5.116) se poate face, fie asistată de calculator ( $2N = 12$  ecuații algebrice liniare), fie prin metoda substituției.

4) Metoda superpoziției. Această metodă se bazează pe principiul superpoziției.



potrivit căruia curentul electric dintr-o latură a unui circuit de c.a. reprezintă suma algebrică a curenților produși de fiecare t.e.m. al circuitului, în parte, dacă ar acționa singură în rețea. Ca și în c.c, se menține, pe rând, în circuit numai câte o sursă, celelalte surse fiind considerate cu t.e.m. nule, dar cu impedanțele lor proprii neschimbate. Metoda superpoziției se aplică la circuite cu două, maxim trei surse; în cazul mai multor surse, volumul calculelor crește considerabil, față de alte metode.

Aplicație. Să se determine curenții din laturile circuitului reprezentat în fig.5.41.a, în care  $\underline{U}_1 = U_1 = 300V$ ,  $\underline{U}_2 = (38+j156)V$ ,  $\underline{Z}_1 = -j70\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (2+j5)\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (10 + j20)\Omega$ . Impedanțele interioare ale surselor  $\underline{U}_1$  și  $\underline{U}_2$  se neglijează, sau se consideră incluse în impedanțele laturilor,  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$ .

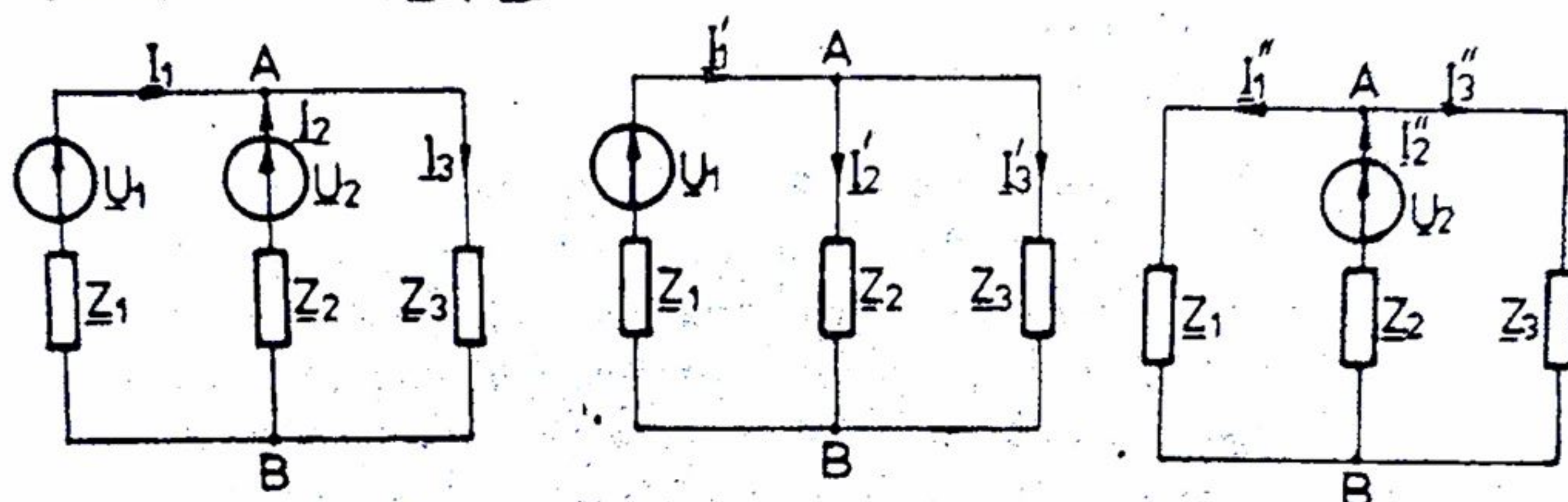


Fig.5.41

- Se lasă în circuit efectul sursei  $\underline{U}_1$  (fig.5.41.b) și se determină curenții  $\underline{I}'$

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}; \underline{U}_{AB} = \underline{I}'_1 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_2}; \underline{I}'_3 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} \quad (5.117)$$

- Se lasă în circuit efectul sursei  $\underline{U}_2$  (fig.5.41.c) și se determină curenții  $\underline{I}''$ .

Ținând seama de sensurile curenților din circuitul inițial și circuitele de lucru rezultă curenții  $\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 - \underline{I}''_1 = 2 + j4$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 - \underline{I}''_2 = 4 - j2$ ;  $\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 + \underline{I}''_3 = 6 + j2$ .

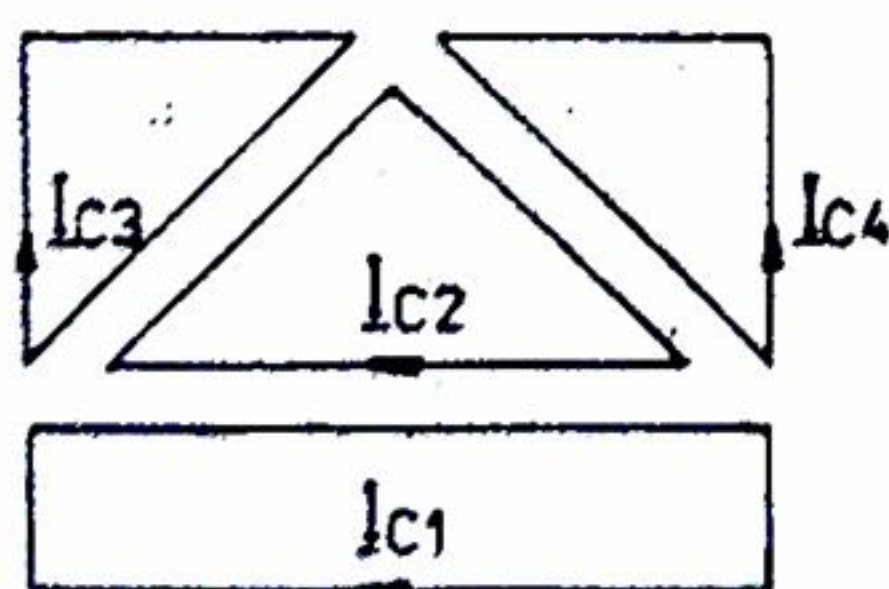


Fig.5.42

5) Metoda curenților de contur. Se folosesc teoremele lui Kirchhoff scrise în complex, prin substituirea curenților din laturi cu curenți de contur. De exemplu, curenții din sistemul de ecuații (5.116) al circuitului din fig.5.40, se înlocuiesc cu curenții de contur din fig.5.42:  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{c1}$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{c1} - \underline{I}_{c2}$ ;  $\underline{I}_3 = \underline{I}_{c3}$ ;  $\underline{I}_5 = \underline{I}_{c3} - \underline{I}_{c2}$ ;  $\underline{I}_4 = \underline{I}_{c4}$ ;  $\underline{I}_6 = \underline{I}_{c2} + \underline{I}_{c4}$ . (5.118)

Numărul curenților de contur este egal cu numărul de bucle independente B. Noile necunoscute (5.118) introduse în sistemul de ecuații (5.116), reduc numărul de ecuații de la șase la patru, adică tot atâtea, câte necunoscute există în noul sistem, acesta din urmă fiind, deci, compatibil:



$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)I_{C1} - Z_2 I_{C2} = U_2 - U_1 \\ -Z_2 I_{C1} + (Z_2 + Z_5 + Z_6)I_{C2} - Z_5 I_{C3} + Z_6 I_{C4} = -U_2 \\ -Z_5 I_{C2} + (Z_3 + Z_5)I_{C3} = U_3 \\ Z_6 I_{C2} + (Z_4 + Z_6)I_{C4} = U_4 \end{cases} \quad (5.119)$$

Soluțiile acestui sistem se introduc în expresiile (5.118) și se obțin curenții circuitului (fig.5.40), care satisfac teoremele lui Kirchhoff.

Sistemul (5.119), ca și alte sisteme obținute similar pentru alte circuite cu oricâte bucle, se poate scrie direct din sistemul general de ecuații pentru determinarea curenților de contur :

$$\begin{cases} Z_{11}I_{C1} + Z_{12}I_{C2} + \dots + Z_{1n}I_{Cn} = U_1 \\ Z_{21}I_{C1} + Z_{22}I_{C2} + \dots + Z_{2n}I_{Cn} = U_2 \\ \vdots \\ Z_{n1}I_{C1} + Z_{n2}I_{C2} + \dots + Z_{nn}I_{Cn} = U_n \end{cases} \quad (5.120)$$

În general  $Z_{jp}$  este suma algebrică a impedanțelor complexe din circuitul  $j$  afectate de curenții de contur  $I_{cp}$  din circuitul  $p$ , iar  $U_p$  este suma algebrică a t.e.m. complexe din circuitul  $p$ . Dacă circuitul are  $B$  bucle independente, atunci  $n = B$  și  $Z_{jp} = Z_{pj}$ , iar semnul produsului  $Z_{jp}I_{cp}$  este pozitiv dacă prin  $Z_{jp}$  curenții  $I_{cj}$  și  $I_{cp}$  au același sens și este negativ - în caz contrar, sensul de parcurgere a buclei fiind dat de sensul, ales arbitrar, al curenților de contur. Curenții din laturile circuitului se obțin făcând suma algebrică a curenților de contur din latura respectivă.

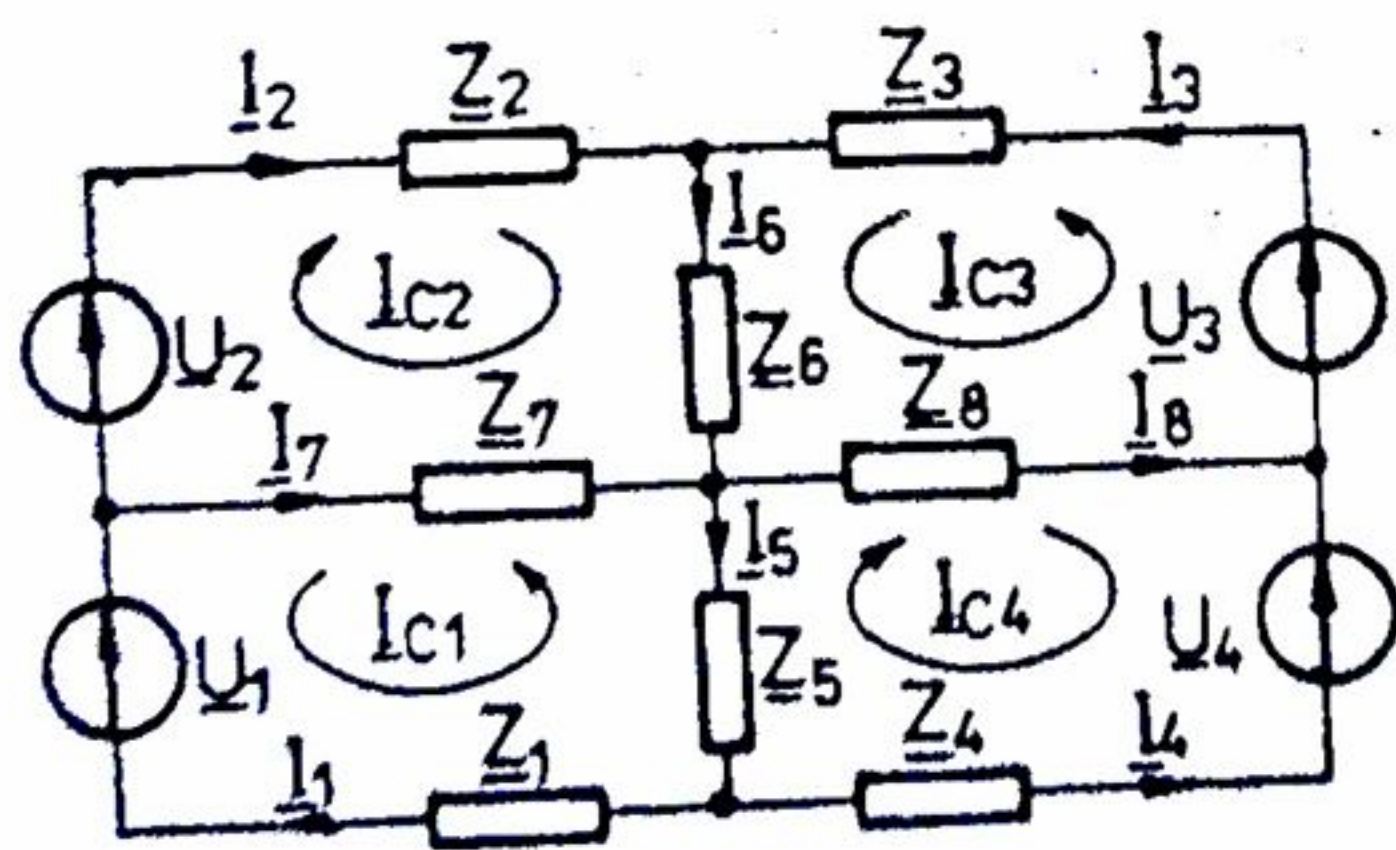


Fig.5.43

Ecuațiile sistemului sunt :

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_5 + Z_7)I_{C1} + Z_7 I_{C2} + Z_5 I_{C4} = -U_1 \\ Z_7 I_{C1} + (Z_2 + Z_6 + Z_7)I_{C2} + Z_6 I_{C3} = U_2 \\ Z_6 I_{C2} + (Z_3 + Z_6 + Z_8)I_{C3} + Z_8 I_{C4} = U_3 \\ Z_5 I_{C1} + Z_8 I_{C3} + (Z_4 + Z_5 + Z_8)I_{C4} = -U_4 \end{cases}$$

Aplicație. Să se afle curenții din laturile circuitului reprezentat în fig.5.43, în care :  $U_1 = U_1 = 200V$  (fazorul de referință pentru celelalte t.e.m.),  $U_2 = (30 - j30)V$ ,  $U_3 = (180 + j110)V$ ,  $U_4 = (50 + j20)V$ ,  $Z_1 = (10 - j30)\Omega$ ,  $Z_2 = (10 + j10)\Omega$ ,  $Z_3 = (5 - j5)\Omega$ ,  $Z_4 = (50 - j10)\Omega$ ,  $Z_5 = (5 + j5)\Omega$ ,  $Z_6 = (10 - j10)\Omega$ ,  $Z_7 = (20 - j30)\Omega$ ,  $Z_8 = (20 + j10)\Omega$ .



Se introduc valorile cunoscute ale tensiunilor și impedanțelor se rezolvă sistemul și se obțin soluțiile :  $\underline{I}_1 = -\underline{I}_{C1} = 3+j2$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{C2} = 2-j$ ;  $\underline{I}_3 = \underline{I}_{C3} = 4+j6$ ;  $\underline{I}_4 = -\underline{I}_{C4} = 1+j2$ ;  $\underline{I}_5 = -\underline{I}_{C1} - \underline{I}_{C4} = 4+j4$ ;  $\underline{I}_6 = \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C3} = 6+j5$ ;  $\underline{I}_7 = -\underline{I}_{C1} - \underline{I}_{C2} = 1+j3$ ;  $\underline{I}_8 = \underline{I}_{C3} + \underline{I}_{C4} = 3+j4$ .

6) Metoda transfigurării. Un grup de impedanțe legate în triunghi (fig.5.44) poate fi transfigurat într-un alt grup de impedanțe complexe legate în stea și invers, dacă după transfigurare potențialele bornelor de legătură (A,B,C) rămân neschimbate și dacă curenții absorbiți prin aceste borne nu se modifică.

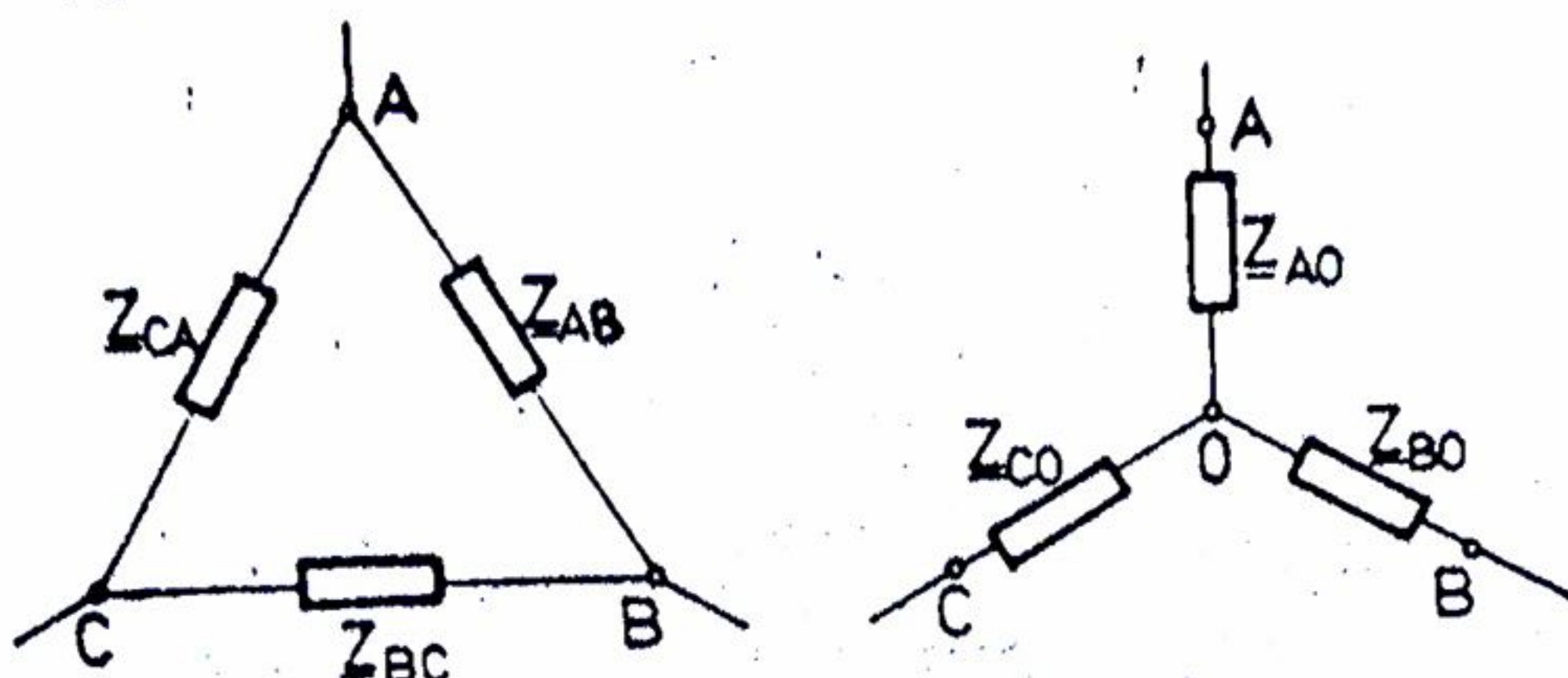


Fig.5.44

Pe baza condiției de transfigurare menționată, se pot scrie relațiile de echivalență a impedanțelor din grupul triunghi cu cele din grupul stea, măsurate între două borne (A-B, B-C și C-A) :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{AB}(\underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA})}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} &= \underline{Z}_{AO} + \underline{Z}_{BO}; \quad \frac{\underline{Z}_{BC}(\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{CA})}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} = \underline{Z}_{BO} + \underline{Z}_{CO}; \\ \frac{\underline{Z}_{CA}(\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC})}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} &= \underline{Z}_{AO} + \underline{Z}_{CO} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Se rezolvă sistemul (5.121) în raport cu  $\underline{Z}_{AO}$ ,  $\underline{Z}_{BO}$ ,  $\underline{Z}_{CO}$ , și se obțin relațiile de calcul ale impedanțelor echivalente la transfigurarea din triunghi în stea :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AO} &= \frac{\underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}}; \quad \underline{Z}_{BO} = \frac{\underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}}; \\ \underline{Z}_{CO} &= \frac{\underline{Z}_{BC}\underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} \end{aligned} \quad (5.122)$$

Rezolvând sistemul (5.121) în raport cu  $\underline{Z}_{AB}$ ,  $\underline{Z}_{BC}$ ,  $\underline{Z}_{CA}$ , se obțin relațiile de calcul ale impedanțelor echivalente la transfigurarea din stea în triunghi

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} &= \underline{Z}_{AO} + \underline{Z}_{BO} + \frac{\underline{Z}_{AO}\underline{Z}_{BO}}{\underline{Z}_{CO}}; \quad \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{BO} + \underline{Z}_{CO} + \frac{\underline{Z}_{BO}\underline{Z}_{CO}}{\underline{Z}_{AO}}; \\ \underline{Z}_{CA} &= \underline{Z}_{AO} + \underline{Z}_{CO} + \frac{\underline{Z}_{AO}\underline{Z}_{CO}}{\underline{Z}_{AB}} \end{aligned} \quad (5.123)$$

sau, folosind admitanțele :  $\underline{Y}_{AB} = \frac{\underline{Y}_{AO}\underline{Y}_{BO}}{\underline{Y}_{AO} + \underline{Y}_{BO} + \underline{Y}_{CO}}; \quad \underline{Y}_{BC} = \frac{\underline{Y}_{BO}\underline{Y}_{CO}}{\underline{Y}_{AO} + \underline{Y}_{BO} + \underline{Y}_{CO}};$

$$\underline{Y}_{CA} = \frac{\underline{Y}_{AO}\underline{Y}_{CO}}{\underline{Y}_{AO} + \underline{Y}_{BO} + \underline{Y}_{CO}} \quad (5.124)$$



Metoda transfigurării se folosește în rezolvarea circuitelor de c.a., dacă prin transfigurarea triunghi-stea, sau stea-triunghi se obține o reducere a numărului de bucle și noduri electrice, în scopul reducerii volumului de calcule.

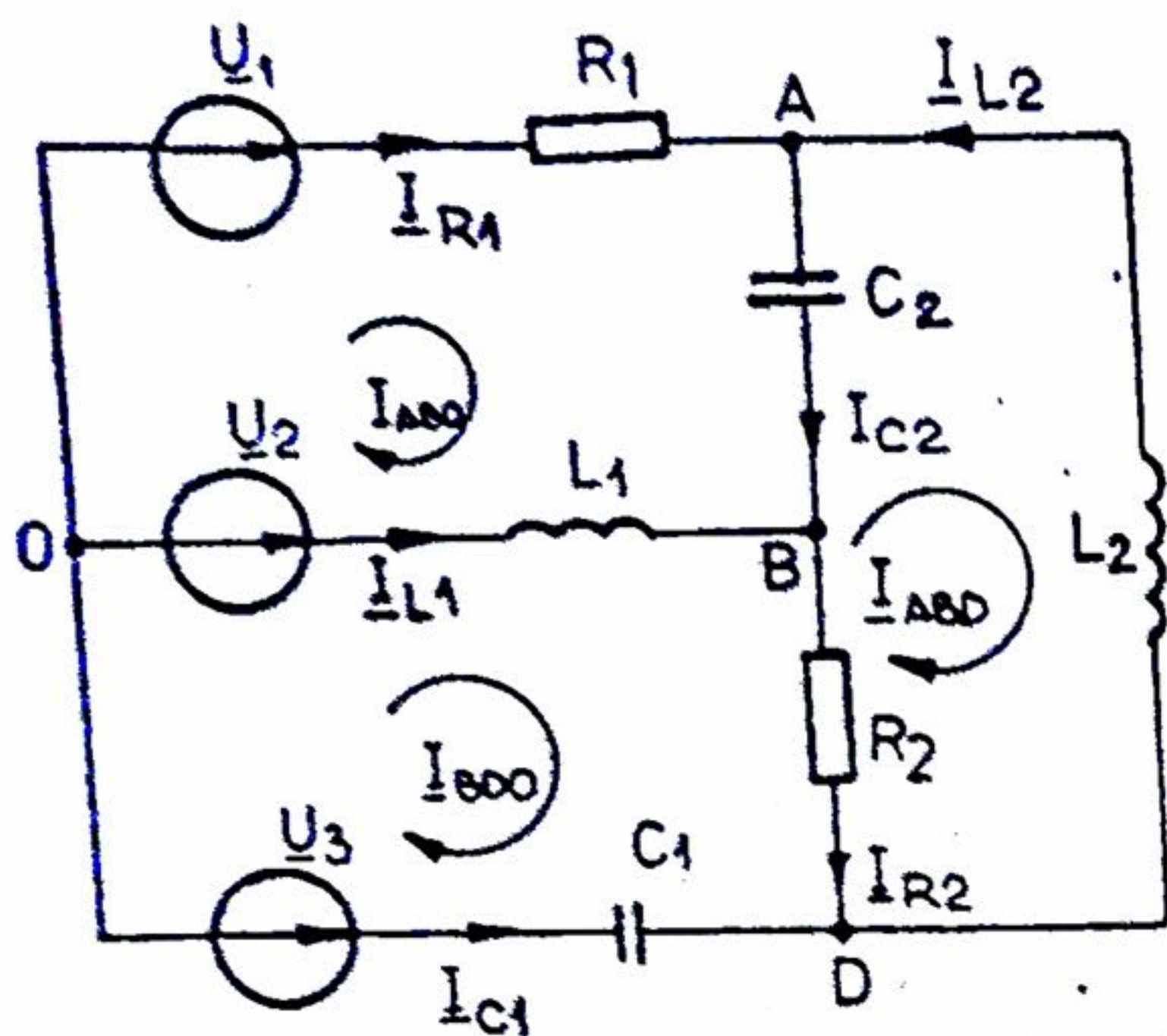


Fig. 5.45

- Se transfigurează triunghiul ABD în stea (fig. 5.46.b) și se obține :  $R'_2 = 10\Omega$ ,  $X'_2 = 10\Omega$ ,  $X'_C = 10\Omega$

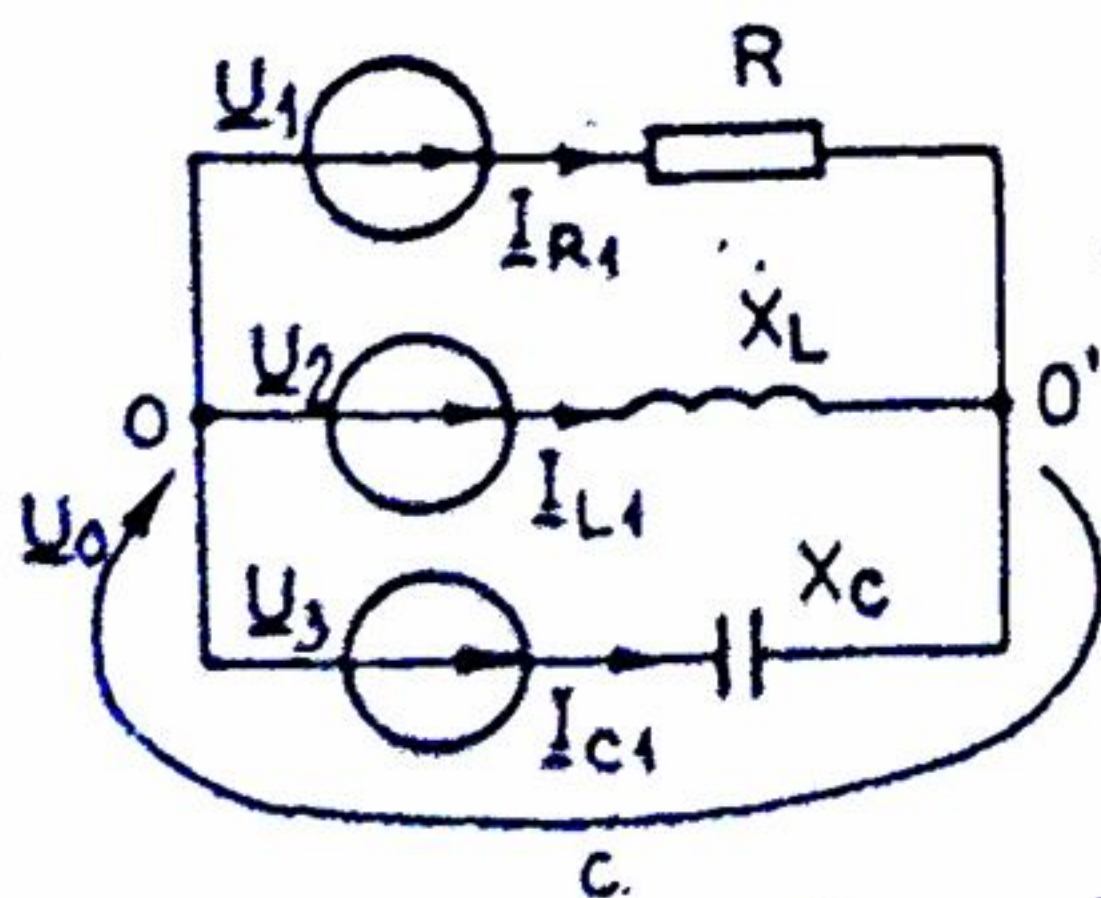
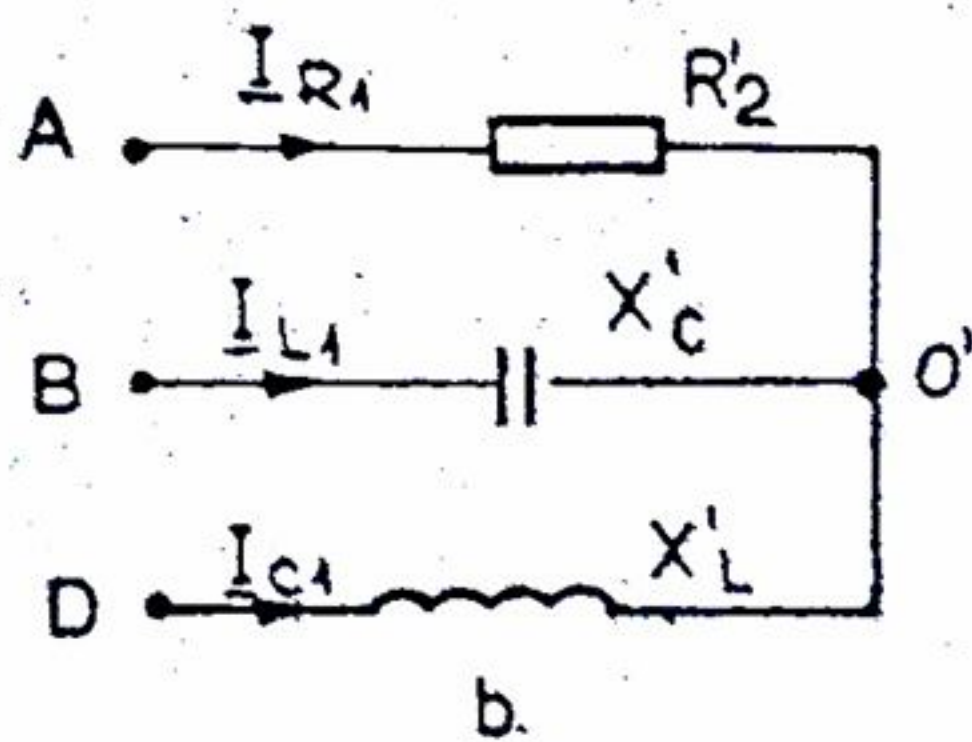
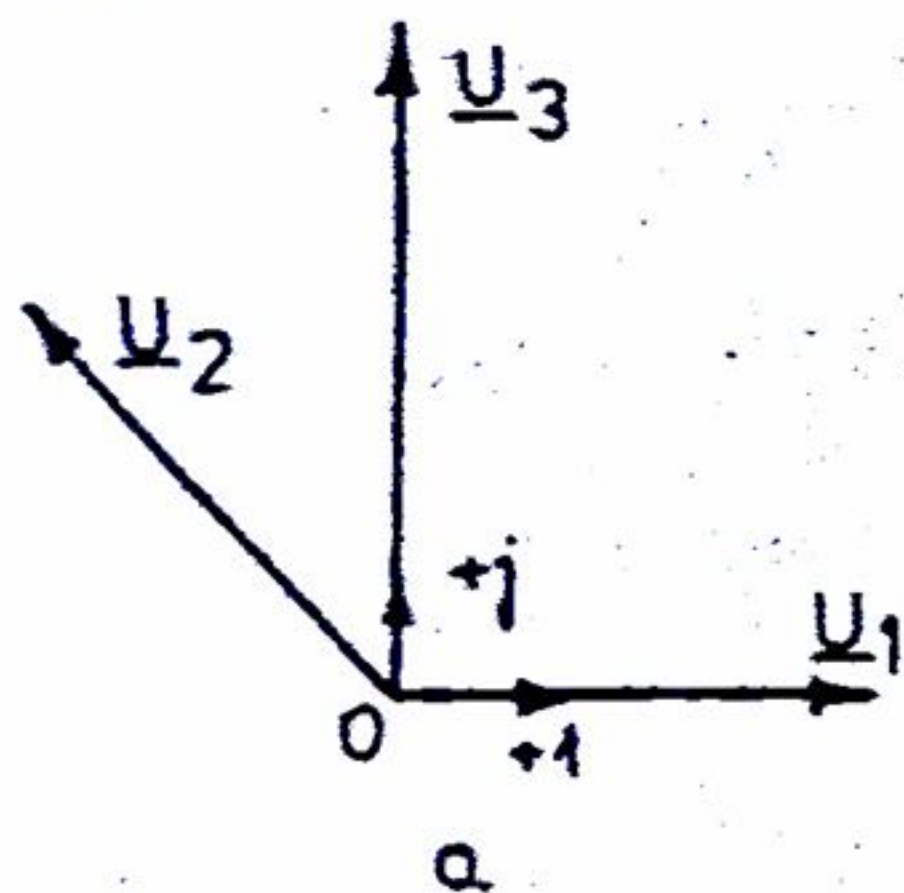


Fig. 5.46

**Aplicație.** Să se rezolve circuitul din fig. 5.45, în care:  $U_1 = 75V$ ;  $U_2 = 75\sqrt{2}V$  și defazată în sens trigonometric față de  $\underline{U}_1$  cu  $135^\circ$ ;  $U_3 = 150V$  și defazată în sens trigonometric față de  $\underline{U}_1$  cu  $90^\circ$ . Pulsatia tensiunilor este  $\omega = 10^3 s^{-1}$ , iar elementele de circuit au valorile :  $R_1 = 5\Omega$ ,  $L_1 = 25mH$ ,  $L_2 = 10mH$ ,  $C_1 = 40\mu F$ ,  $C_2 = 100\mu F$ .

**Soluția 1 :**

- Rezultă valorile tensiunilor

(fig. 5.46.a) :  $\underline{U}_1 = U_1 = 75V$ ;  
 $\underline{U}_2 = 75(j-1)V$ ;  $\underline{U}_3 = j150V$ ;

- Impedanțele circuitului echivalent (fig. 5.46.c) sunt :  $\underline{Z}_1 = R_1 + R'_2 = R = 15\Omega$ ,  
 $\underline{Z}_2 = \omega L_1 - jX'_C = j15\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_1} + jX'_L = -j15\Omega$

- Se calculează tensiunea dintre noduri, similar cu (3.35):  $\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$ ,

în care  $\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$  ( $i=1,2,3$ ). Se obține:  $\underline{U}_0 = j75V$ .



- Rezultă curenții absorbiți de la sursele de t.e.m. :  $\underline{I}_{R1} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = 5 - j5$ ;

$$\underline{I}_{R1} = 5\sqrt{2}A; \underline{I}_{L1} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = j5; \underline{I}_{L1} = 5A; \underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_3} = -5; \underline{I}_{C1} = 5A.$$

Verificare :  $\underline{I}_{R1} + \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{C1} = 0$

- Se determină curenții din laturile triunghiului ABD:

$$\underline{I}_{R1}R_1 - \underline{I}_{L2}j\omega L_2 - \underline{I}_{C1}\left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right) = \underline{U}_1 - \underline{U}_3. \text{ Rezultă: } \underline{I}_{L2} = j5; \underline{I}_{L2} = 5A,$$

$$\underline{I}_{L1}j\omega L_1 + \underline{I}_{R2}R_2 - \underline{I}_{C1}\left(-j\frac{1}{\omega C_1}\right) = \underline{U}_2 - \underline{U}_3. \text{ Rezultă: } \underline{I}_{R2} = 5 + j5; \underline{I}_{R2} = 5\sqrt{2}A.$$

$$\underline{I}_{R1}R_1 + \underline{I}_{C2}\left(-j\frac{1}{\omega C_2}\right) - \underline{I}_{L1}j\omega L_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2. \text{ Rezultă: } \underline{I}_{C2} = \underline{I}_{C2} = 5A.$$

Soluția 2 :

- Cu  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  și curenții de contur  $\underline{I}_{ABO}, \underline{I}_{BDO}, \underline{I}_{ABD}$  se formează sistemul :

$$\left(R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_2}\right)\underline{I}_{ABO} + j\omega L_1(-\underline{I}_{BDO}) - j\frac{1}{\omega C_2}(-\underline{I}_{ABD}) = \underline{U}_1 - \underline{U}_2;$$

$$\left(R_2 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}\right)\underline{I}_{BDO} + j\omega L_1(-\underline{I}_{ABO}) + R_2(-\underline{I}_{ABD}) = \underline{U}_2 - \underline{U}_3;$$

$$\left(R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2}\right)\underline{I}_{ABD} + R_2(-\underline{I}_{BDO}) - j\frac{1}{\omega C_2}(-\underline{I}_{ABO}) = 0, \text{ care are solu-}$$

țiile :  $\underline{I}_{ABO} = 5 - j5; \underline{I}_{BDO} = 5; \underline{I}_{ABD} = -j5$ . Rezultă curenții din laturile circuitului:  $\underline{I}_{R1} = \underline{I}_{ABO} = 5 - j5; \underline{I}_{L1} = \underline{I}_{BDO} - \underline{I}_{ABO} = j5; \underline{I}_{C1} = -\underline{I}_{BDO} = -5; \underline{I}_{R2} = \underline{I}_{BDO} - \underline{I}_{ABD} = 5 + j5; \underline{I}_{L2} = -\underline{I}_{ABO} = j5; \underline{I}_{C2} = -\underline{I}_{ABO} - \underline{I}_{ABD} = 5A$ , adică aceleași valori.

- Altă soluție (Metoda teoremelor lui Kirchhoff) nu se recomandă necesitând un volum relativ mare de calcul manual.

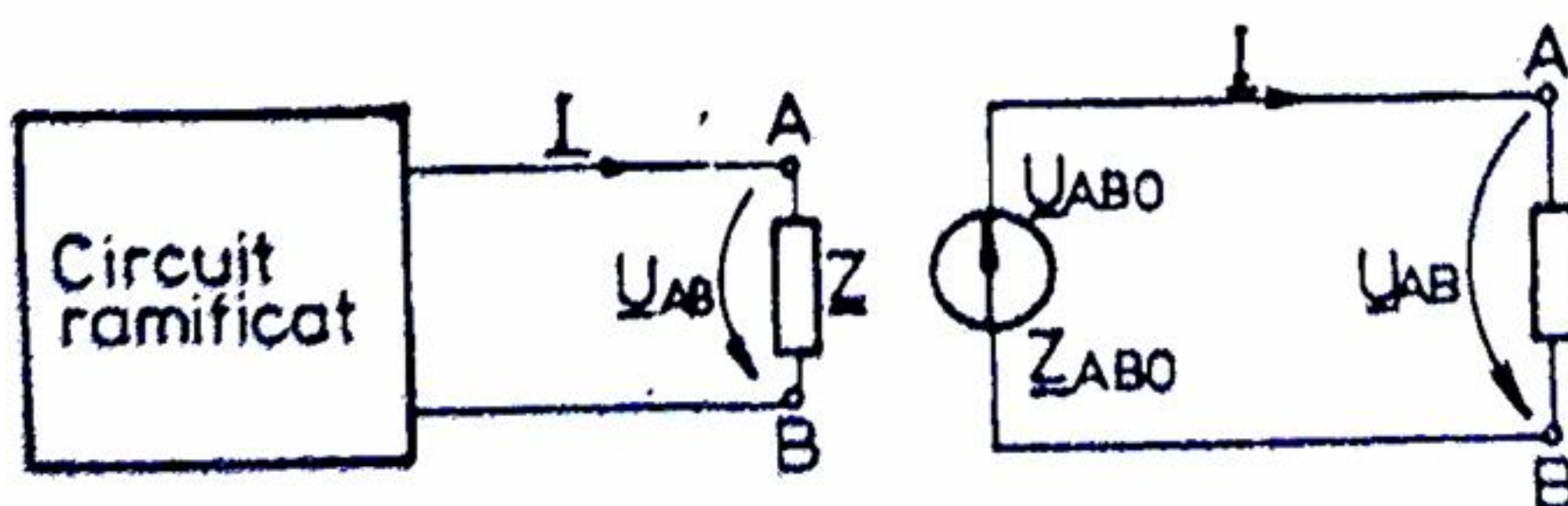


Fig. 5.47

7) Metoda generatorului de tensiune echivalent. Un circuit ramificat complex este echivalent cu un generator de t.e.m., care debitează curent electric de conducție  $I$  în una din ramurile circuitului

cu impedanța  $\underline{Z}$ , considerată

receptor unic. Circuitul ramificat complex se înlocuiește cu generatorul de tensiune echivalent, din care se extrage latura prin care se determină curentul (fig. 5.47)



În circuitul echivalent,  $\underline{U}_{ABO}$  este t.e.m. a generatorului echivalent, egală cu tensiunea la bornele A-B când acesta funcționează în gol, iar  $\underline{Z}_{ABO}$  este impedanța interioară a sursei de tensiune echivalentă, calculată în aceeași condiție: ramura A- $\underline{Z}_{ABO}$ -B deschisă. Rezultă (teorema lui Thévenin):

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ABO}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{ABO}} \quad (5.125)$$

Metoda generatorului de tensiune echivalent se utilizează în cazul când se cere să se calculeze curentul dintr-o singură latură a unui circuit ramificat.

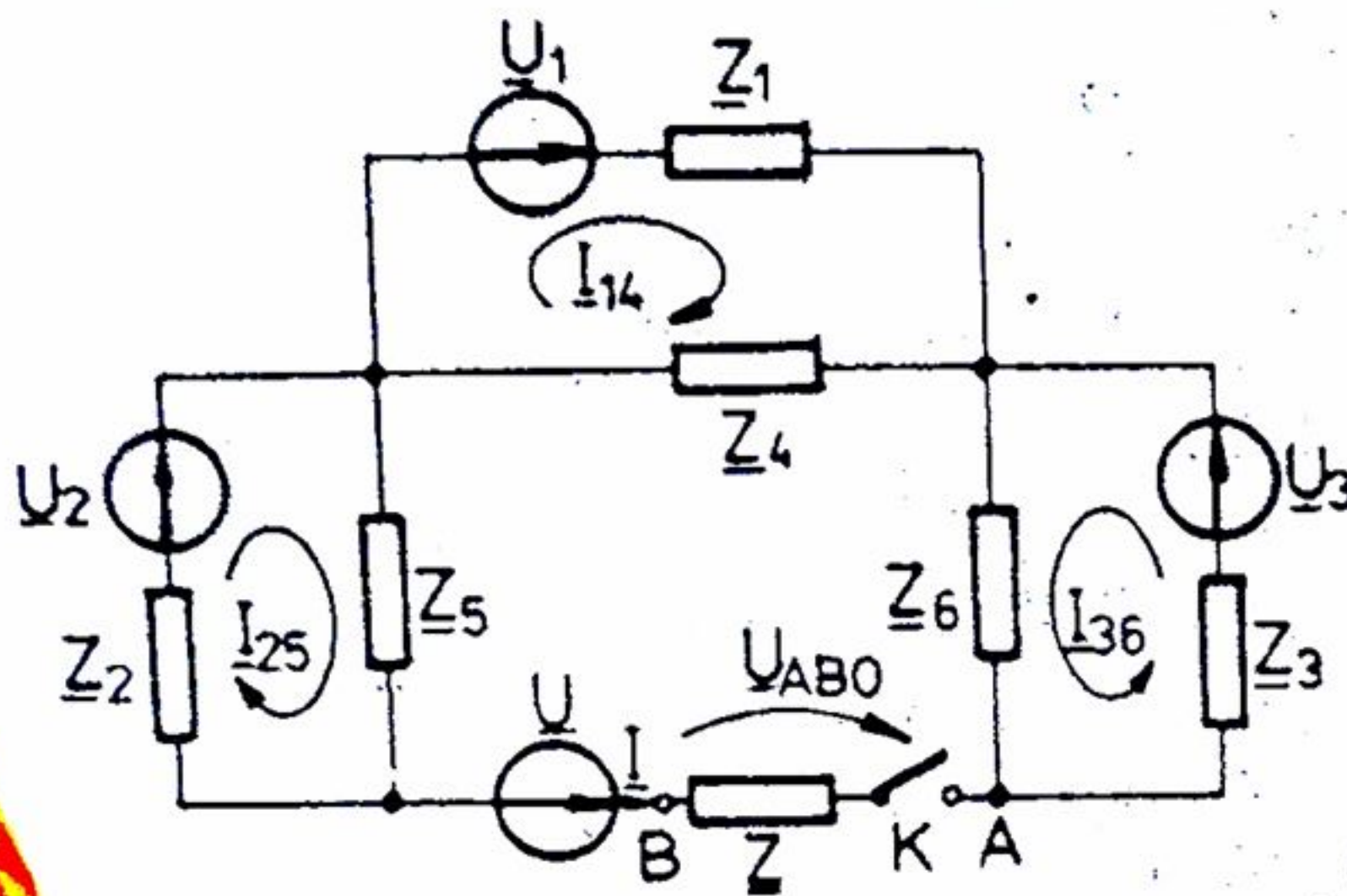


Fig. 5.48

Aplicație. Să se afle curentul  $\underline{I}$  din circuitul reprezentat în fig. 5.48, în care  $\underline{U}_1 = U_1 = 50V$ ,  $\underline{U}_2 = (60 + j45)V$ ,  $\underline{U}_3 = (30 + j40)V$ ,  $\underline{U} = (220 + j45)V$ ,  $\underline{Z}_1 = (1 + j2)\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (8 + j12)\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (4 + j4)\Omega$ ,  $\underline{Z}_4 = (2 - j6)\Omega$ ,  $\underline{Z}_5 = (4 - j3)\Omega$ ,  $\underline{Z}_6 = (2 + j4)\Omega$ ,  $\underline{Z} = (1,9 + j8,2)\Omega$ .

Se deschide ramura A-B și se calculează curenți (K deschis):

$$\underline{I}_{14} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = (6 + j8)A;$$

$$\underline{I}_{25} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5} = 5A; \quad \underline{I}_{36} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6} = 5A.$$

Rezultă t.e.m. echivalentă și impedanța echivalentă la bornele A-B:

$$\underline{U}_{ABO} = \underline{U} - \sum \underline{Z}\underline{I} = \underline{U} - \underline{I}_{25}\underline{Z}_5 - \underline{I}_{14}\underline{Z}_4 + \underline{I}_{36}\underline{Z}_6 = 150V$$

$$\underline{Z}_{ABO} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_6}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6} = (7,1 + j3,8).$$

Se închide ramura A-B și se calculează curentul  $\underline{I}$  (K închis):

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ABO}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{ABO}} = 2(3 - j4); \quad I = 10A.$$

8) Metoda generatorului de curent echivalent. Un circuit ramificat este echivalent cu un generator de curent, care debitează curentul electric de conducție în una din laturile circuitului, considerată receptor. Folosind această metodă, circuitul ramificat complex se înlocuiește cu generatorul de curent echivalent din care se extrage latura la care se determină tensiunea. În circuitul echivalent din fig. 5.47 se poate scrie  $\underline{U}_{AB} = \underline{Z} \underline{I}$ , iar cu

$$(5.125) \text{ rezultă succesiv: } \underline{U}_{AB} = \underline{Z}\underline{I} = \underline{Z} \frac{\underline{U}_{ABO}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{ABO}} = \frac{\underline{U}_{ABO}}{1 + \frac{\underline{Z}_{ABO}}{\underline{Z}}} \quad (5.126)$$



Cu admitanțele  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  și  $\underline{Y}_{ABO} = \frac{1}{\underline{Z}_{ABO}}$  se obține tensiunea (teorema lui Norton) :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{U}_{ABO}}{1 + \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_{ABO}}} = \frac{\underline{Y}_{ABO} \underline{U}_{ABO}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{ABO}} = \frac{\underline{I}_{sc}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{ABO}}, \quad (5.127)$$

unde  $\underline{I}_{sc} = \underline{Y}_{ABO} \underline{U}_{ABO}$  este curentul de scurtcircuit care trece prin bornele A-B (fig.5.47) când  $\underline{Z}$  se scurtcircuitază ( $\underline{Z} = 0$ ).

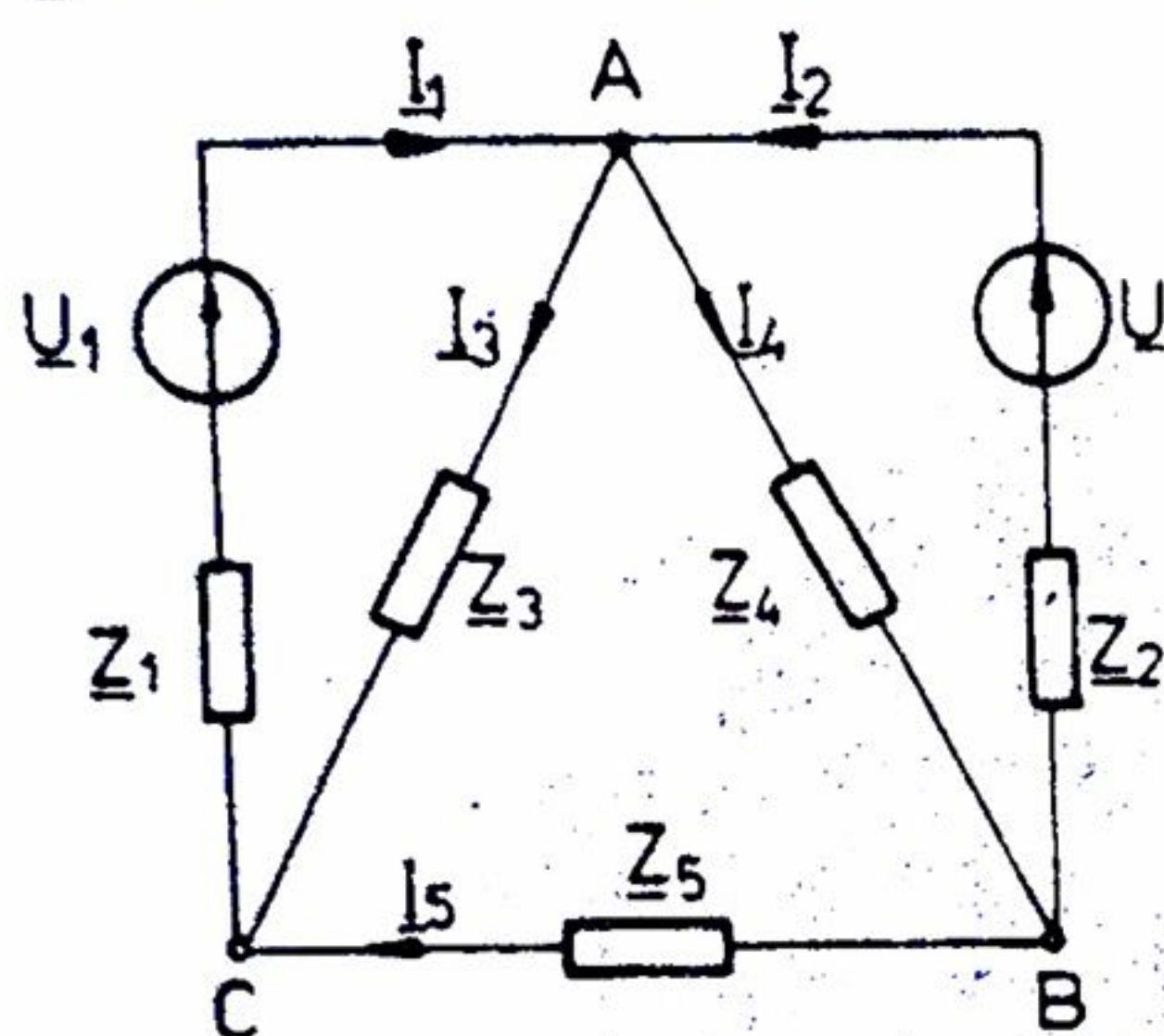


Fig.5.49

Aplicație. Să se afle valoarea curentului  $\underline{I}_4$  din circuitul reprezentat în fig.5.49 cu relația (5.127), în care :  $\underline{U}_1 = U_1 = 32V$ ,  $\underline{U}_2 = (45 - j35)V$ ,  $\underline{Z}_1 = -j4\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = 5\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (5 + j4)\Omega$ ,  $\underline{Z}_4 = (4 - j4)\Omega$ ,  $\underline{Z}_5 = 12\Omega$ .

Se deschide latura A-B a circuitului și se obține impedanța generatorului echivalent :

$$\underline{Z}_{ABO} = \frac{(\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_5) \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2}; \quad \underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

Rezultă admitanțele  $\underline{Y}_{ABO} = \frac{1}{\underline{Z}_{ABO}}$  și  $\underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4}$ .

Se scurtcircuitază impedanța  $\underline{Z}_4$  ( $\underline{Z}_4 = 0$ ) și se obține curentul de scurtcircuit :

$$\underline{I}_{sc} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_5}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5}} \left( 1 - \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_5} \right)$$

Rezultă tensiunea  $\underline{U}_{AB}$  și curentul  $\underline{I}_4$  :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{sc}}{\underline{Y}_4 + \underline{Y}_{ABO}} = 20(1 - j); \quad \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_4} = 5A$$

9) Metoda tensiunii între două noduri. În cazul unui circuit cu două noduri și L laturi, rezultă, similar cu (3.35) și (3.36) :

$$\begin{cases} \underline{I}_n = \underline{Y}_n (\underline{U}_n - \underline{U}_0); & n = 1, 2, \dots, L \\ \underline{U}_0 = \frac{\sum \underline{U}_n \underline{Y}_n}{\sum \underline{Y}_n}; & n = 1, 2, \dots, L \end{cases} \quad (5.128)$$

Aplicație 1. Să se verifice valoarea curenților din circuitul reprezentat în fig.5.41.a prin metoda tensiunii între noduri.

Tensiunea între noduri (5.128) este :



$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_1 \frac{1}{\underline{Z}_1} + \underline{U}_2 \frac{1}{\underline{Z}_2}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = (20 + j140)V.$$

Curenții se calculează cu relațiile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = (2 + j4)A, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = (4 - j2)A, \quad \underline{I}_3 = -\frac{0 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_3} = (6 + j2)A.$$

Ultima fracție se scrie cu minus în față deoarece în fig. 5.41.a,  $\underline{I}_3$  are sens schimbat față de sensurile  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$ .

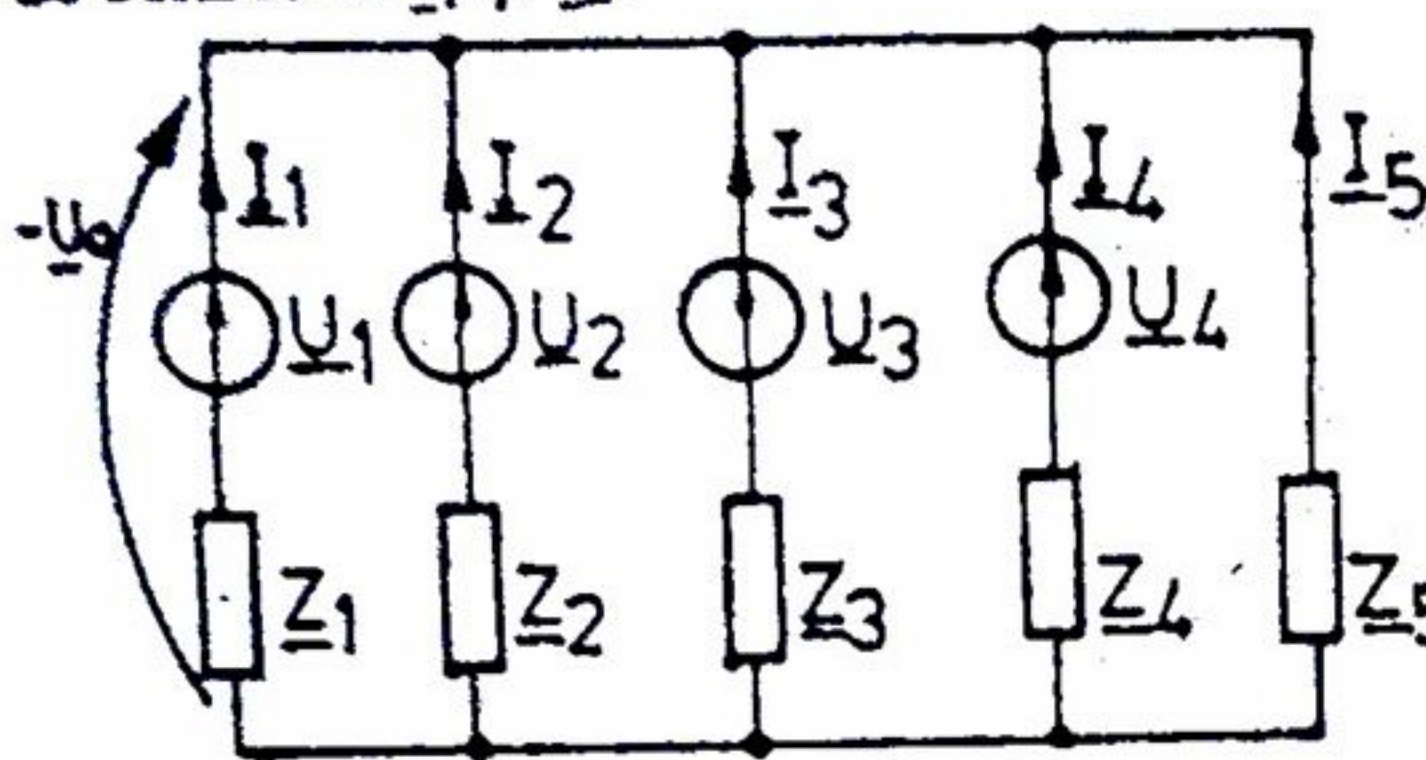


Fig. 5.50

Aplicația 2. Să se afle curenții din laturile

circuitului reprezentat în fig. 5.51 în care  $\underline{U}_1 = 100V$ ,  $\underline{U}_2 = (46 - j28)V$ ,  $\underline{U}_3 = (47 + j21)V$ ,  $\underline{U}_4 = (50 - j25)V$ ,  $\underline{Z}_1 = (10 - j20)\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (6 - j8)\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (3 + j4)\Omega$ ,  $\underline{Z}_4 = (3 - j4)\Omega$ ,  $\underline{Z}_5 = 5\Omega$ .

Tensiunea între noduri (5.128) este

$$\underline{U}_0 = \frac{\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{U}_4}{\underline{Z}_4}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5}} = U_0 = 50V.$$

Curenții se calculează cu relațiile

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = 1 + j2; \quad \underline{I}_1 = \sqrt{5}A; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_2} = 2 - j2; \quad \underline{I}_2 = \sqrt{2}A; \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_3} = 3 + j3$$

$$\underline{I}_3 = 3\sqrt{2}A; \quad \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_4 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_4} = 4 - j3; \quad \underline{I}_4 = 5A; \quad \underline{I}_5 = \frac{0 - \underline{U}_0}{\underline{Z}_5} = -10; \quad \underline{I}_5 = 10A.$$

#### 5.2.4 Circuite cuplate magnetic

Se consideră două bobine cuplate magnetic (fig. 5. 52), coeficientul de cuplaj fiind  $K$ :

$0 < K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$ . Tensiunile  $u_1$  și  $u_2$  care alimentează circuitele sunt

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\phi_1}{dt}; \quad u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\phi_2}{dt} \quad (5.129)$$



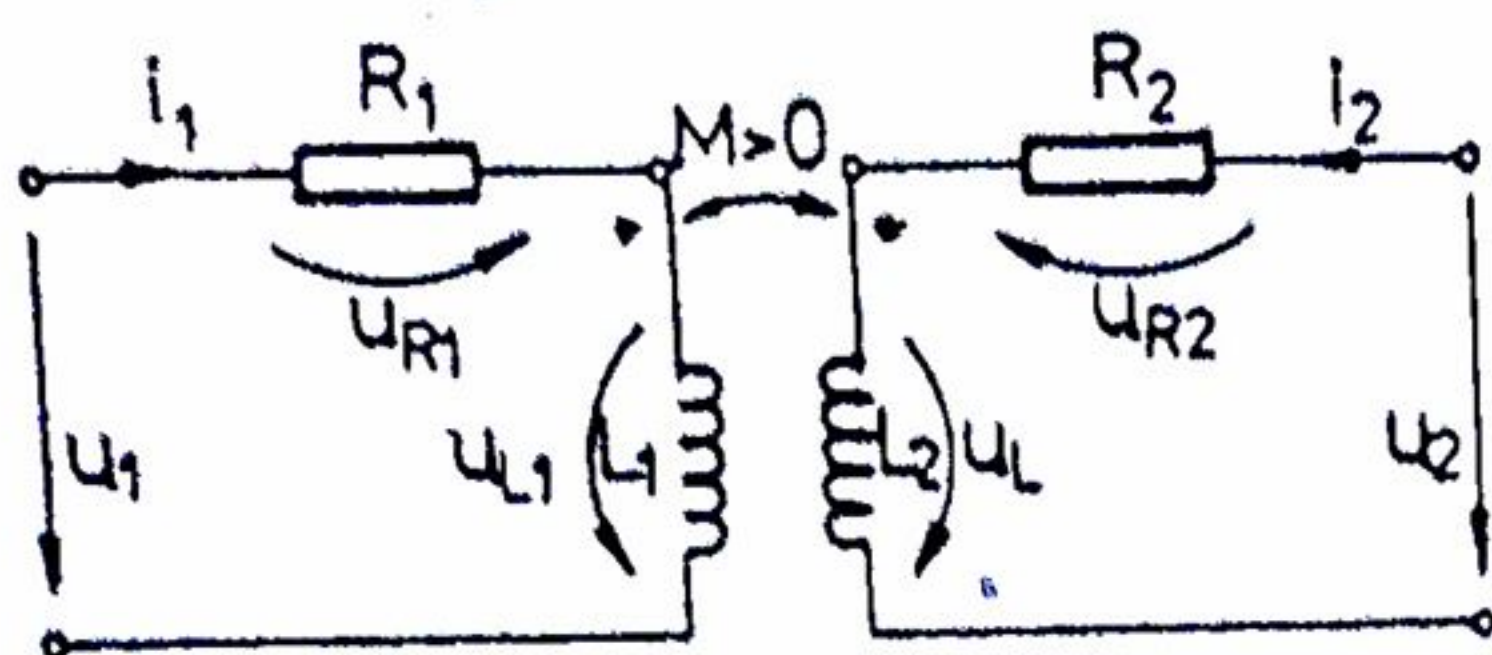


Fig. 5.51

unde, fluxurile totale din bobine au expresiile cunoscute:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2; \\ \phi_2 &= L_2 i_2 + M i_1\end{aligned}\quad (5.130)$$

Introducând (5.130) în (5.129)

$$\text{se obține } u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (5.131)$$

sau în complex

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2; \underline{U}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \quad (5.132)$$

unde  $j\omega M = \underline{Z}_M$  se numește impedanța complexă de cuplaj magnetic. Fazorii tensiune  $\underline{U}$  și curent  $\underline{I}$  au diagrama (fig. 5.52) în concordanță cu relațiile (5.132).

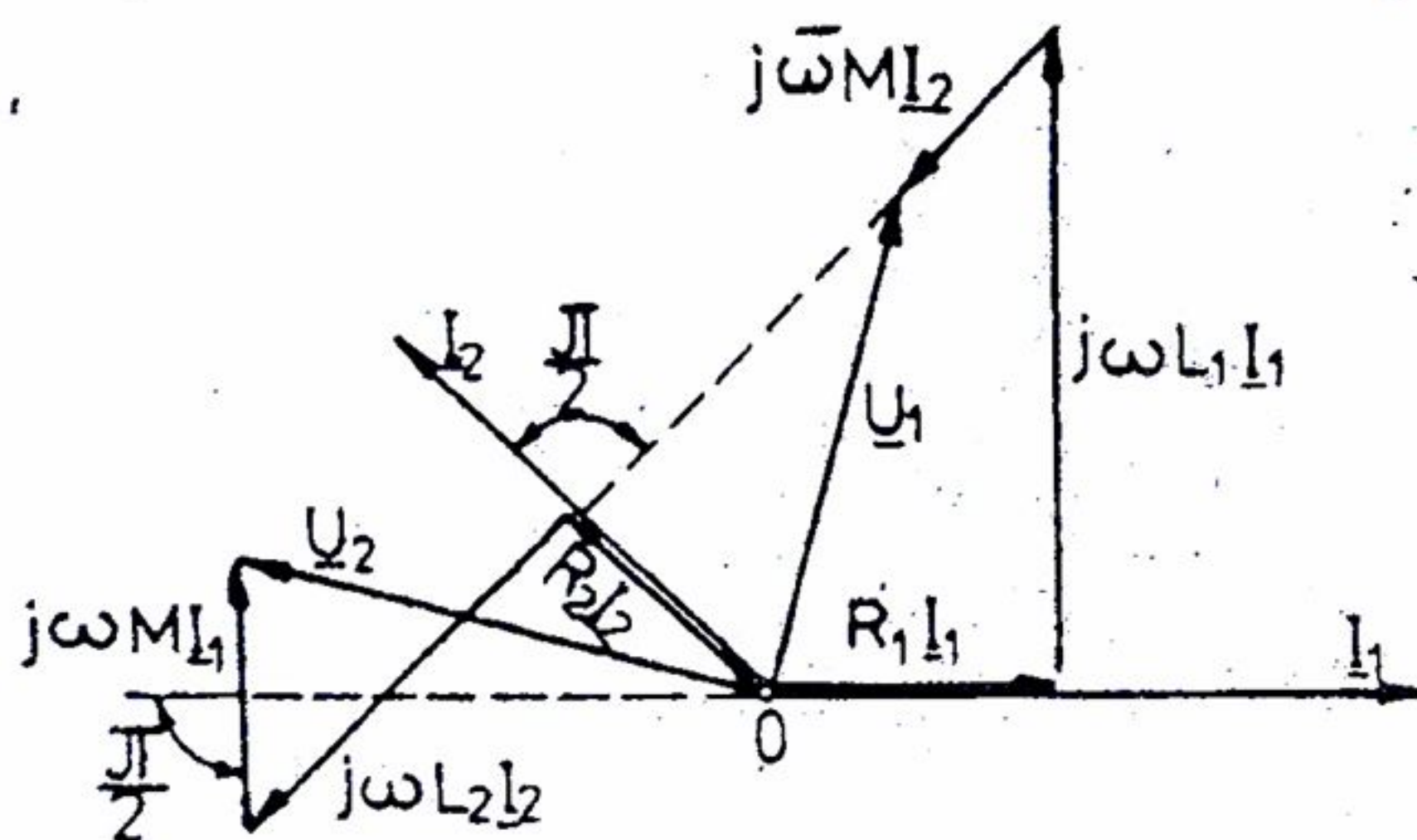


Fig. 5.52

Inductivitatea mutuală  $M$  poate fi pozitivă sau negativă.

În circuit, bornele de intrare ale bobinelor sunt notate prin stelută sau alte semne, ceea ce permite să se constate cu ușurință semnul inductivității mutuale, în funcție de sensurile curentilor (deci ale fluxurilor),

pentru circuite serie (fig. 5.53.a)

sau paralel (fig. 5.53.b). Pentru rezolvarea circuitelor cu cuplaj magnetic se poate folosi metoda teoremelor lui Kirchhoff sau metoda curentilor de contur.

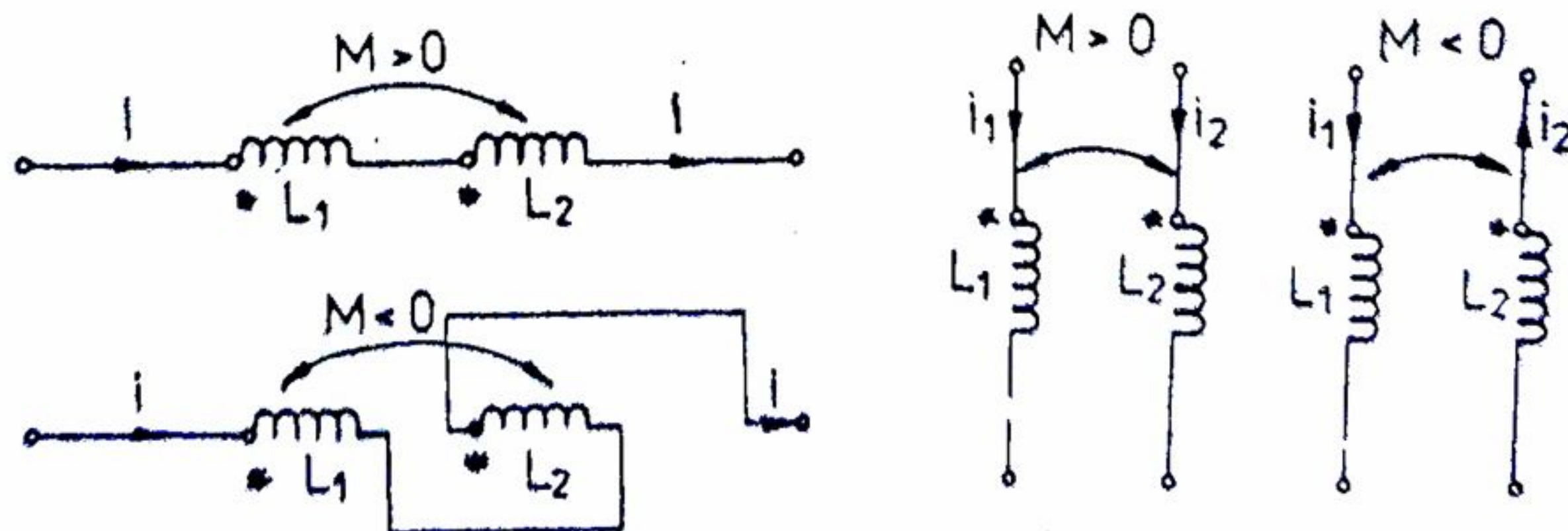


Fig. 5.53



Puterea complexă primită de elementele de circuit R,L,M,C, pasive ale circuitului cu cuplaj magnetic este  $\underline{S} = \sum \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$ , (5.133)  
unde P este puterea activă disipată de rezistoarele R, iar Q-puterea reactivă primită de elementele reactive L,M,C.

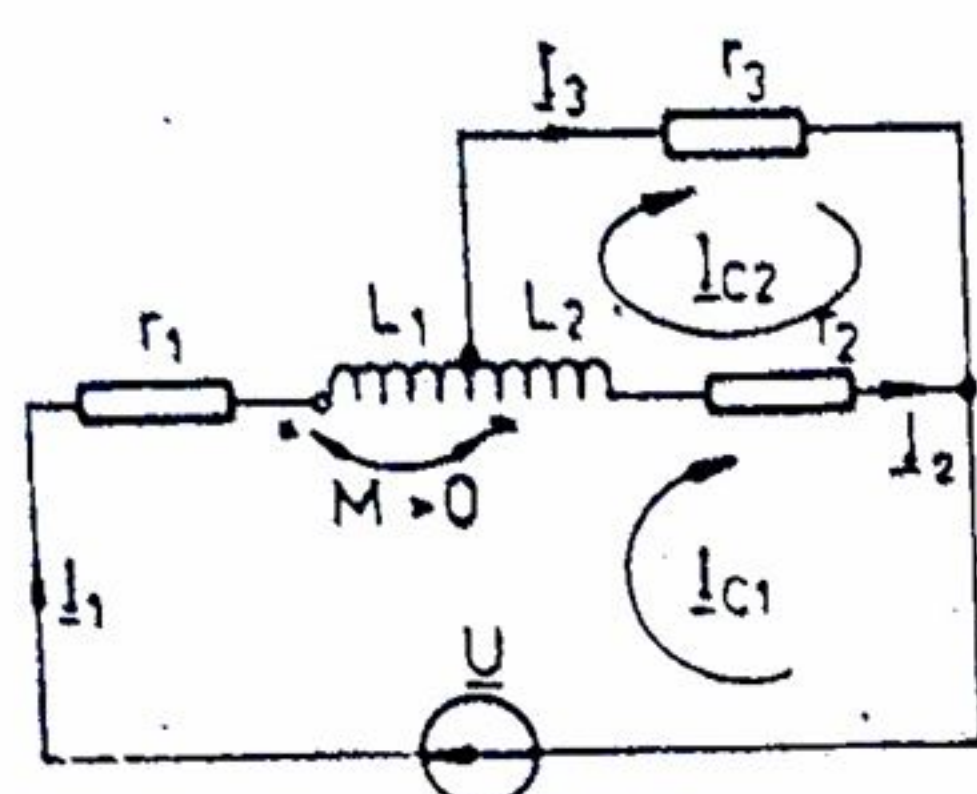


Fig.5.54

Aplicație. Să se calculeze curenții  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  și tensiunile  $\underline{U}_1, \underline{U}_2$  pe bobinele unui autotransformator (fig.5.55) în care :

$\underline{U}_1 = \underline{U} = 100V$  (tensiunea de alimentare),  $\omega L_1 = 20\Omega$ ,  $\omega L_2 = 30\Omega$ ,  $\omega M = 15\Omega$ ,  $r_1 = 3\Omega$  (rezistența bobinei 1),  $r_2 = 4\Omega$  (rezistența bobinei 2),  $r_3 = 50\Omega$  (rezistența de sarcină).

Se folosește fie metoda teoremelor lui

Kirchhoff:  $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$ ;  $\underline{I}_1(r_1 + j\omega L_1) + j\omega M \underline{I}_2 + \underline{I}_2(r_2 + j\omega L_2) + j\omega M \underline{I}_1 = \underline{U}$ ;  
 $\underline{I}_2(r_2 + j\omega L_2) + j\omega M \underline{I}_1 - r_3 \underline{I}_3 = 0$ , fie metoda curenților de contur :

$$\begin{cases} \underline{I}_{C1}(r_1 + j\omega L_1 + r_2 + j\omega L_2 + 2j\omega M) - \underline{I}_{C2}(r_2 + j\omega M) = \underline{U}; \\ -\underline{I}_{C1}(r_2 + j\omega L_2 + j\omega M) + \underline{I}_{C2}(r_2 + r_3 + j\omega L_2) = 0. \end{cases}$$

Rezultă :  $\underline{I}_1 = \underline{I}_{C1} = 0,72 - j1,3$ ;  $\underline{I}_1 = 1,48A$ ;  $\underline{I}_3 = \underline{I}_{C2} = 1,08 - j0,1$ ;  $\underline{I}_3 = 1,09A$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{C1} - \underline{I}_{C2} = -0,36 - j1,2$ ;  $\underline{I}_2 = 1,25A$ . Tensiunile sunt:  $\underline{U}_1 = r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 = 46 + j5$ ;

$\underline{U}_1 = 46,5V$ ;  $\underline{U}_2 = r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 = 54 - j5$ ;  $\underline{U}_2 = 54,5V$ .

Bilanțul puterilor :  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 100(0,72 + j1,3) = 72 + j130$ ;  $P = 72W$ ;  $Q = 13VAR$ ;

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 148VA.$$

### 5.2.5 Transferul maxim de putere în circuite monofazate

Se consideră un generator de tensiune cu t.e.m.  $\underline{U}_g$  și impedanță  $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$  care debitează curentul  $\underline{I}$  în impedanța de sarcină  $\underline{Z} = R + jX$ . Impedanța conductoarelor de alimentare se neglijează, sau se consideră incluse în impedanța interioară a sursei  $\underline{Z}_g$ . Se va calcula valoarea impedanței de sarcină  $\underline{Z}$  pentru care puterea activă transferată receptorului este maximă. Puterea activă a receptorului este

$$P = RI^2 = R \frac{U_g^2}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \quad (5.134)$$



al cărui maxim se obține prin anularca derivatelor parțiale

$$\frac{dP}{dR} = 0 \text{ și } \frac{dP}{dX} = 0. \quad (5.135)$$

$$\text{Se obțin condițiile } R = R_g \text{ și } X = -X_g \quad (5.136)$$

$$\text{echivalente cu expresia: } \underline{Z} = \underline{Z}_g^* \quad (5.137)$$

numită și condiția de adaptarea sarcinii la generator pentru a obține transferul maxim de putere activă.

Cu condiția (5.137) rezultă :

- curentul din receptor :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z} + \underline{Z}_g} = \frac{\underline{U}_g}{2R}; \quad (5.138)$$

- tensiunea la bornele receptorului:

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} = \underline{Z} \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z} + \underline{Z}_g} = \underline{U}_g \frac{R + jX}{2R} \quad (5.139)$$

- puterea maximă transmisă la receptor :

$$P = R \frac{U_g^2}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} = \frac{U_g^2}{4R} \quad (5.140)$$

- randamentul electric al rețelei:

$$\eta = \frac{P}{P_g} = \frac{RI^2}{2RI^2} = 0,5 \quad (5.145)$$

Condiția (5.137) se folosește în telecomunicații, unde se urmărește un transfer maxim de putere de la generator la receptor. În electroenergetică însă se urmărește un randament electric maxim, adică  $\underline{U}$  să tindă spre  $\underline{U}_g$  și  $P$  să tindă spre infinit ( $R_g \rightarrow 0$ ). Generatorul de putere infinită este în acest caz capabil să mențină tensiunea  $\underline{U}$  constantă

#### 5.2.6 Rezonanța în circuitele electrice

Rezonanța electrică apare în circuitele cu emelente reactive (inductive și capacitive), când defazajul  $\varphi$  dintre tensiunea aplicată și curentul absorbit este nul

$$\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_g} = 0 \quad (5.142)$$



unde  $X_e = 0$  este reactanța echivalentă a circuitului serie sau ramificat, iar  $R_e$  - rezistența sa echivalentă. Rezonanța electrică se poate obține fie prin variația parametrilor  $R, L, M, C$ , fie prin variația pulsației  $\omega$ . Pulsația la care se produce rezonanța se numește pulsație de rezonanță.

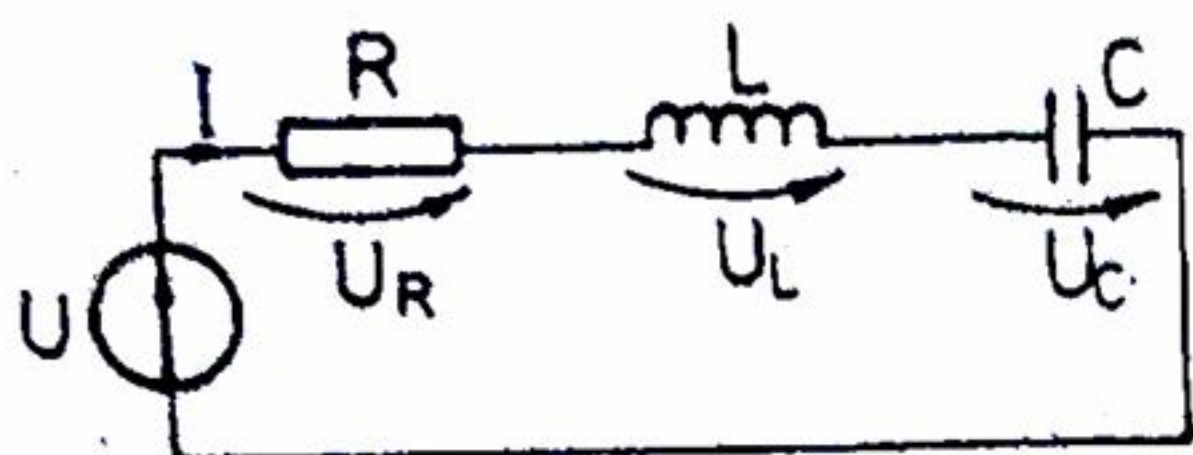


Fig. 5.55

1) Rezonanța în circuite serie. Într-un circuit serie cu rezistența  $R$ , inductivitatea  $L$  și capacitatea  $C$  (fig. 5.55), condiția de rezonanță este

$$X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (5.143)$$

Rezultă :

- pulsația de rezonanță:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5.144)$$

- curentul din circuit (maxim)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_e^2}} = \frac{U}{R} \quad (5.145)$$

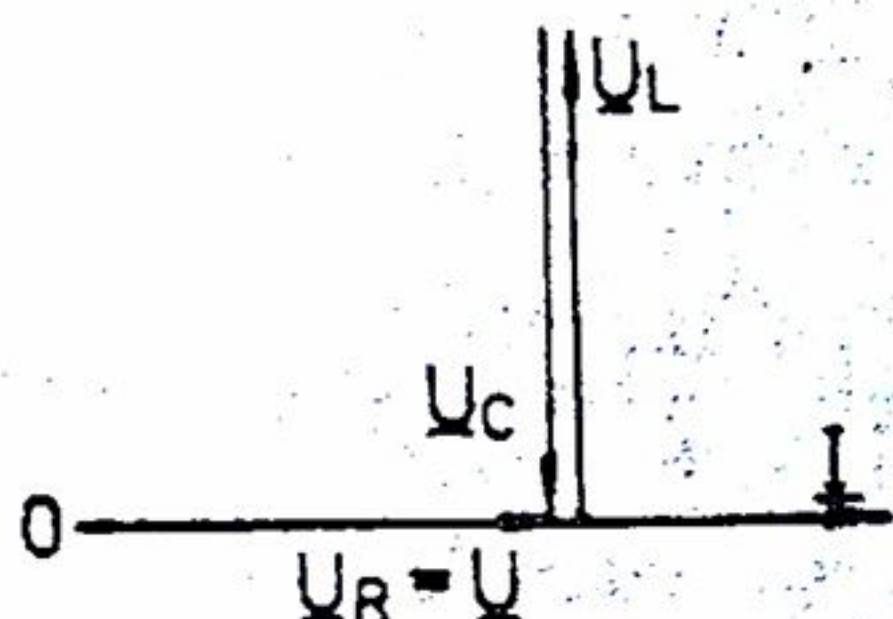


Fig. 5.56

- căderile de tensiune pe elementele de circuit fig. 5.56.

$$U_R = RI = U; \quad U_L = \omega L I = U \frac{\omega_0 L}{R}; \quad U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega_0 C} = \frac{U}{\omega_0 RC} \quad (5.146)$$

- tensiunea pe elementele de circuit  $L, C$ :

$$U_X = U_L - U_C = \frac{U}{R} \left( \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right) = 0 \quad (5.147)$$

- impedanța caracteristică

$$Z_0 = \frac{U_L}{I} - \frac{U_C}{I} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.148)$$

- factorul de supratensiune (numit și factor de amortizare):

$$K = \frac{U}{U_L} = \frac{U}{U_C} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\frac{1}{\omega_0 C}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{Z_0} \quad (5.149)$$

Deci, cu cât rezistența  $R$  a circuitului este mai mică, cu atât tensiunile  $U_L$  și  $U_C$  sunt mai mari. Din acest motiv, rezonanța în circuitele serie se mai numește și rezonanța tensiunilor.

Dacă într-un circuit serie, cu parametrii  $R, L, C$  constanți se variază pulsația  $\omega$ , de la zero la  $\omega_0$  (pulsația de rezonanță) și de la  $\omega_0$  la infinit, atunci, mărimile



$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

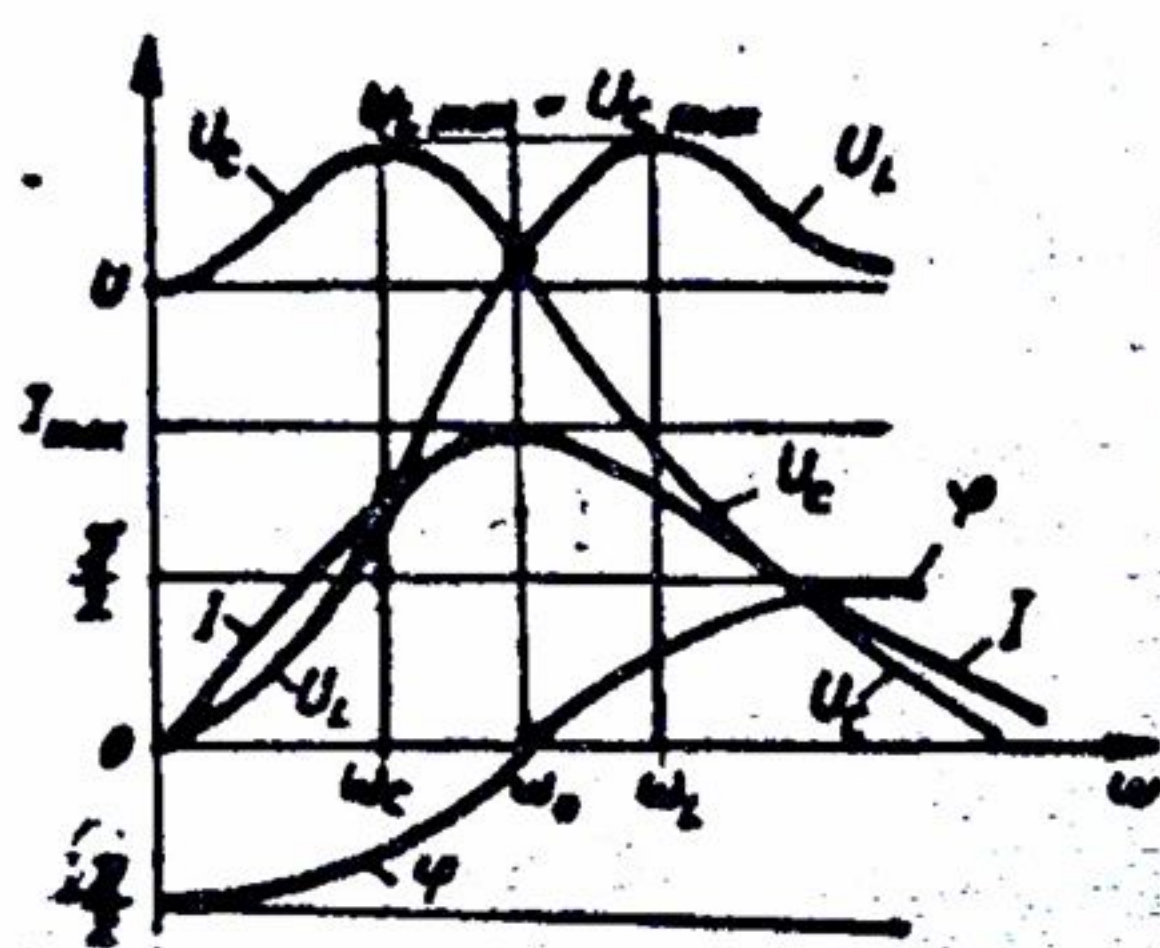


Fig. 5.57

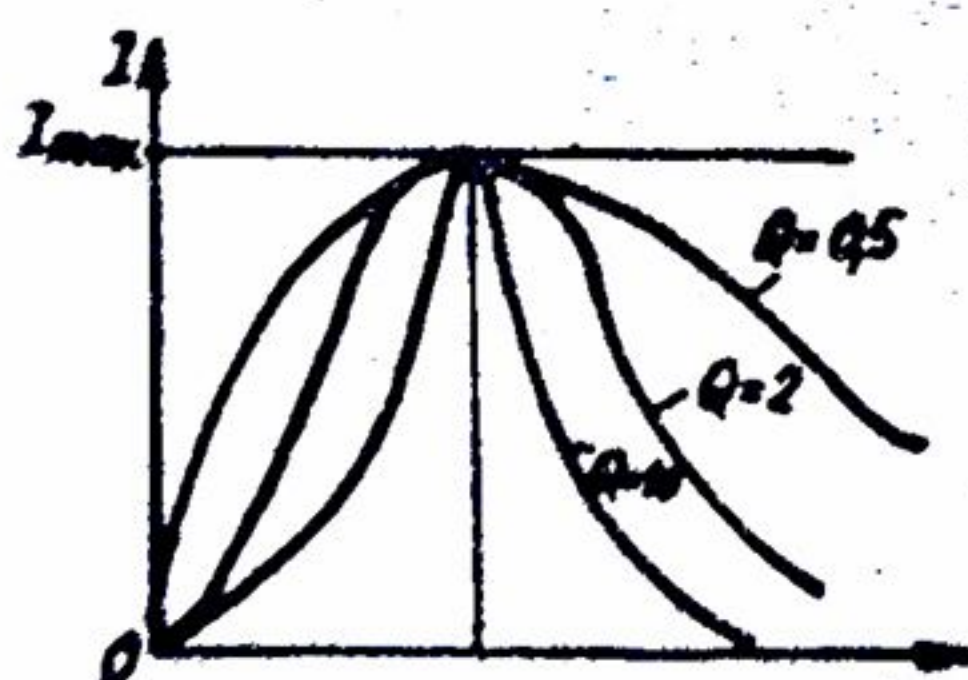


Fig. 5.58

circuit paralel cu rezistența  $R$ , inductivitatea  $L$  și capacitatea  $C$  (fig. 5.60.a), condiția de rezonanță este (5.142) :

$$\varphi = \arctg \frac{X_c}{R_c} = \arctg \frac{B_c}{G_c} = 0 \quad (5.152)$$

$$Q = \frac{1}{K} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.151)$$

Pentru diferite valori ale factorului de calitate, curbele de rezonanță ale curentului din circuit, în funcție de pulsație au alura din fig. 5.58. În circuitele oscilante obișnuite, de exemplu în radiotehnică, factorul de calitate poate avea valori de ordinul sutelor. În instalațiile industriale creșterile neprevăzute de tensiune pentru  $K > \sqrt{2}$ , pot determina unele accidente și deteriorări ale aparatelor de măsură și control conectate pe porțiunile de circuit cu tensiuni mărite.

2) Rezonanțe în circuite ramificate. Într-un



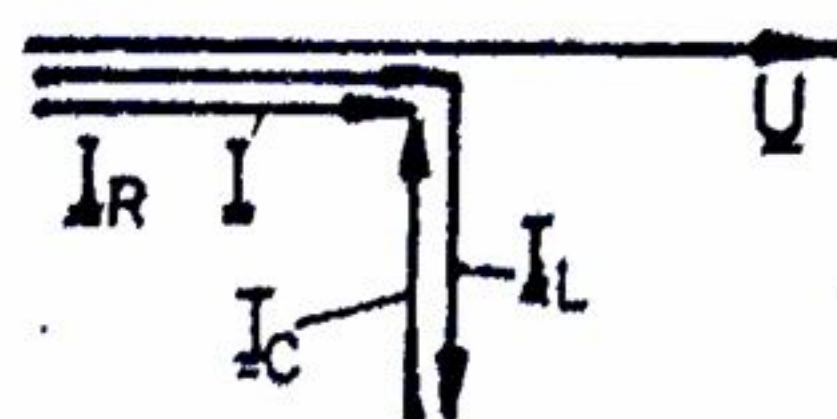
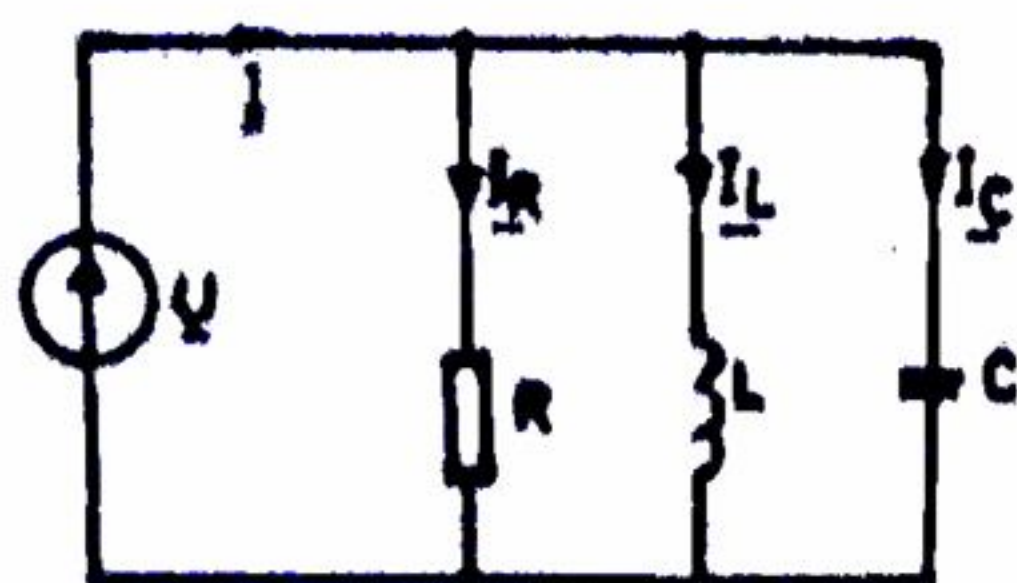


Fig.5.59

în care :  $G_e = \frac{1}{R}$  și  $B_e = \frac{1}{\omega L} - \omega C$  sunt conductanța, susceptanța echivalente, ale circuitului din fig.5.59.a, de unde rezultă pulsația de rezonanță (condiția de rezonanță):

$$\omega^2 LC = 1; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.153)$$

adică aceeași condiție ca și în cazul circuitelor serie.

Cu condiția (5.153) rezultă curenții din elementele de circuit și curentul minim absorbit de la sursă (fig.5.59.b):

$$I_R = \frac{U}{R}; I_L = \frac{U}{\omega L}; I_C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U\omega C; I = I_R = \frac{U}{R}; I_L = I_C = U\sqrt{\frac{C}{L}} = I_C Y_0, \text{ unde}$$

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5.154)$$

se numește admitanță caracteristică.

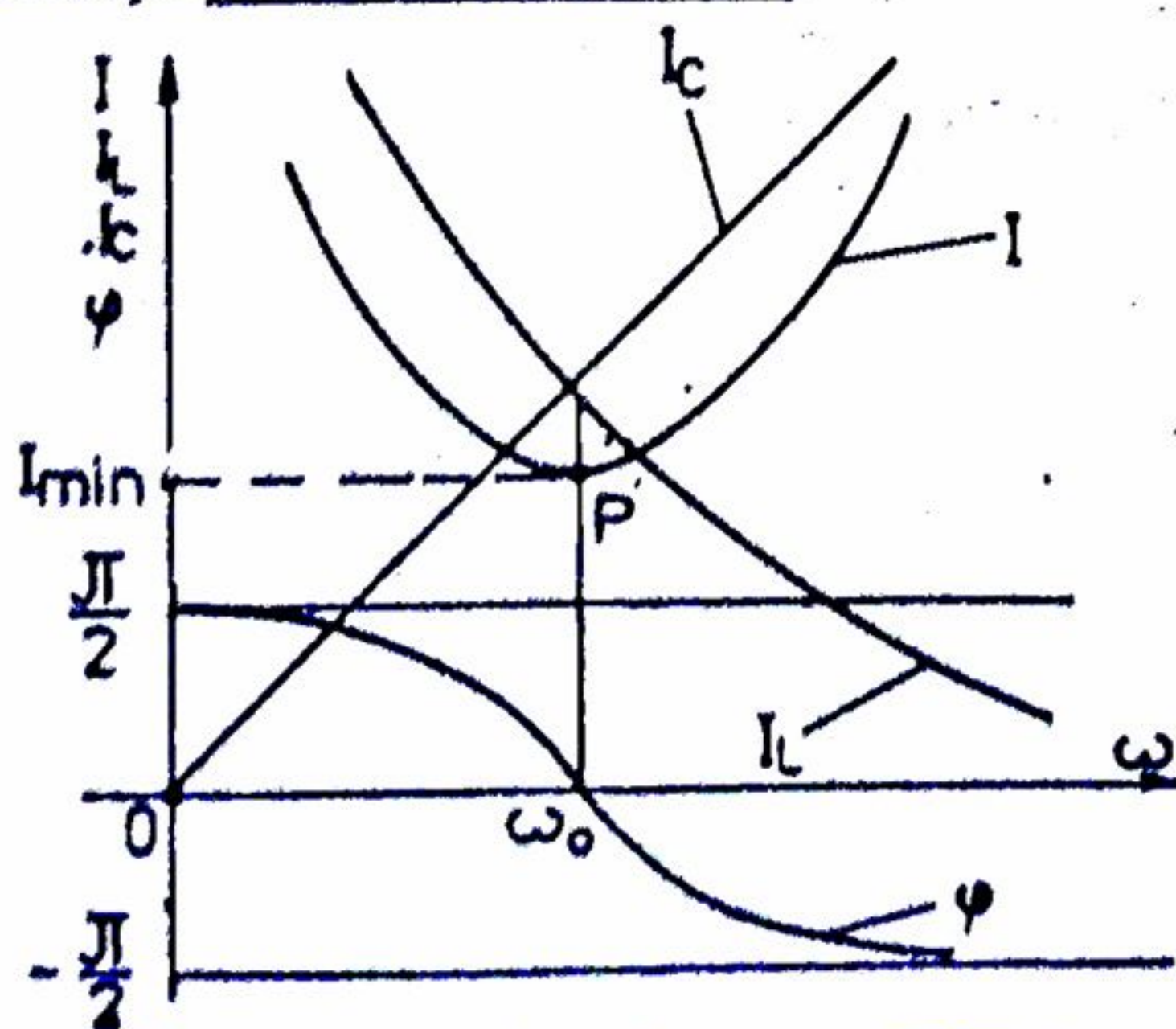


Fig.5.60

Dacă elementele de circuit  $R, L, C$  sunt constante și se variază pulsația  $\omega$ , atunci mărimile:

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2};$$

$$\varphi = \arctg R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right);$$

$$I_C = U\omega C; I_L = \frac{U}{\omega L}, \quad (5.155)$$

reprezentate grafic în (fig.5.60) se numesc curbe de rezonanță. În punctul P, curentul absorbit de la sursă



$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$U_L = \omega L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

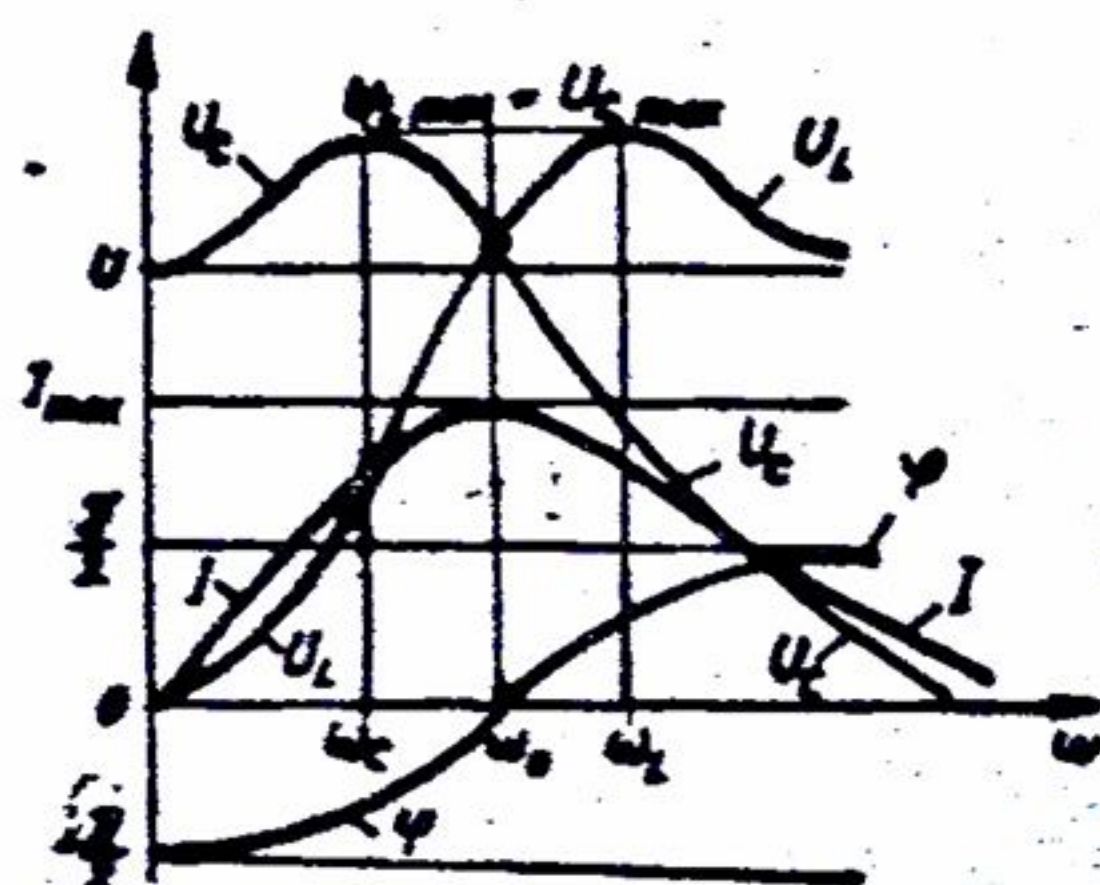


Fig. 5.57

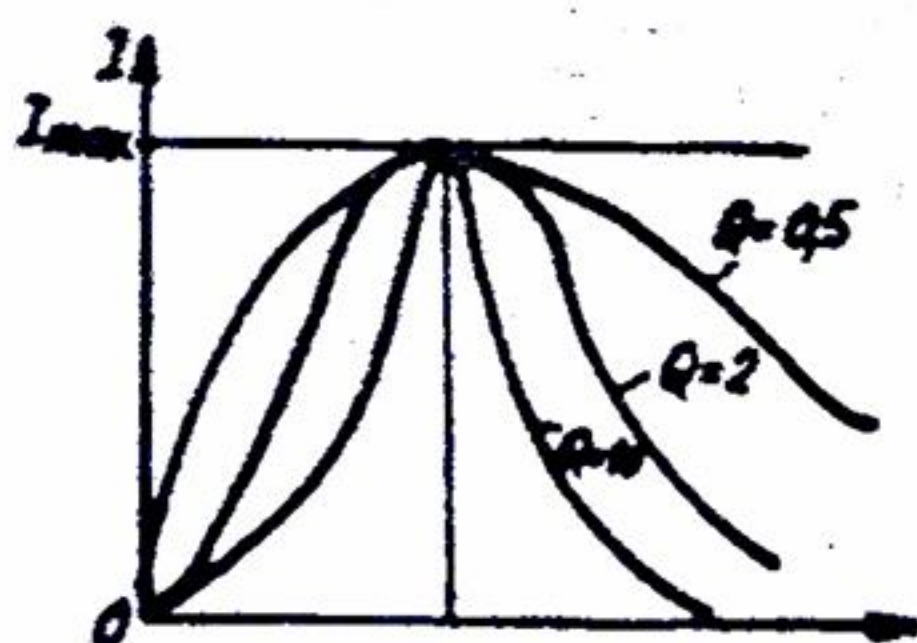


Fig. 5.58

circuit paralel cu rezistența  $R$ , inductivitatea  $L$  și capacitatea  $C$  (fig. 5.60.a), condiția de rezonanță este (5.142):

$$\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_e} = \arctg \frac{B_e}{G_e} = 0 \quad (5.152)$$

(5.150)

$$Q = \frac{1}{K} = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.151)$$

Pentru diferite valori ale factorului de calitate, curbele de rezonanță ale curentului din circuit, în funcție de pulsație au alura din fig. 5.58. În circuitele oscilante obișnuite, de exemplu în radiotehnică, factorul de calitate poate avea valori de ordinul sutelor. În instalațiile industriale creșterile neprevăzute de tensiune pentru  $K > \sqrt{2}$ , pot determina unele accidente și deteriorări ale aparatelor de măsură și control conectate pe porțiunile de circuit cu tensiuni mărite.

2) Rezonanțe în circuite ramificate. Într-un



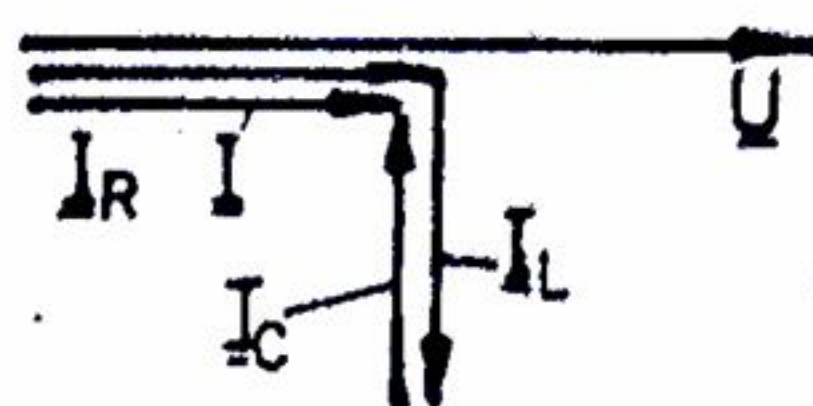
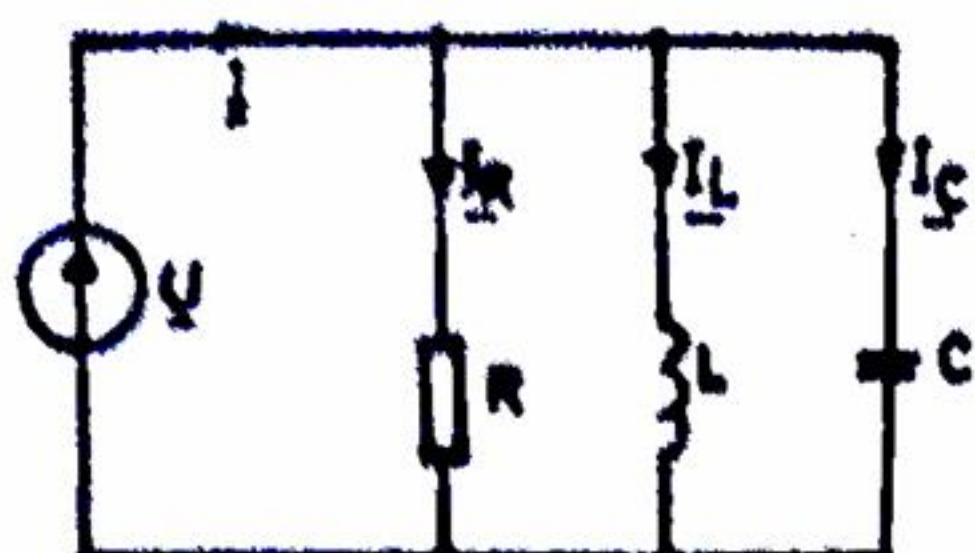


Fig.5.59

în care :  $G_e = \frac{1}{R}$  și  $B_e = \frac{1}{\omega L} - \omega C$  sunt conductanța, susceptanța echivalente, ale circuitului din fig.5.59.a, de unde rezultă pulsația de rezonanță (condiția de rezonanță):

$$\omega^2 LC = 1; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.153)$$

adică aceeași condiție ca și în cazul circuitelor serie.

Cu condiția (5.153) rezultă curenții din elementele de circuit și curentul minim absorbit de la sursă (fig.5.59.b):

$$I_R = \frac{U}{R}; I_L = \frac{U}{\omega L}; I_C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = U\omega C, I = I_R = \frac{U}{R}; I_L = I_C = U\sqrt{\frac{C}{L}} = I_C Y_0, \text{ unde}$$

$$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5.154)$$

se numește admitanță caracteristică.

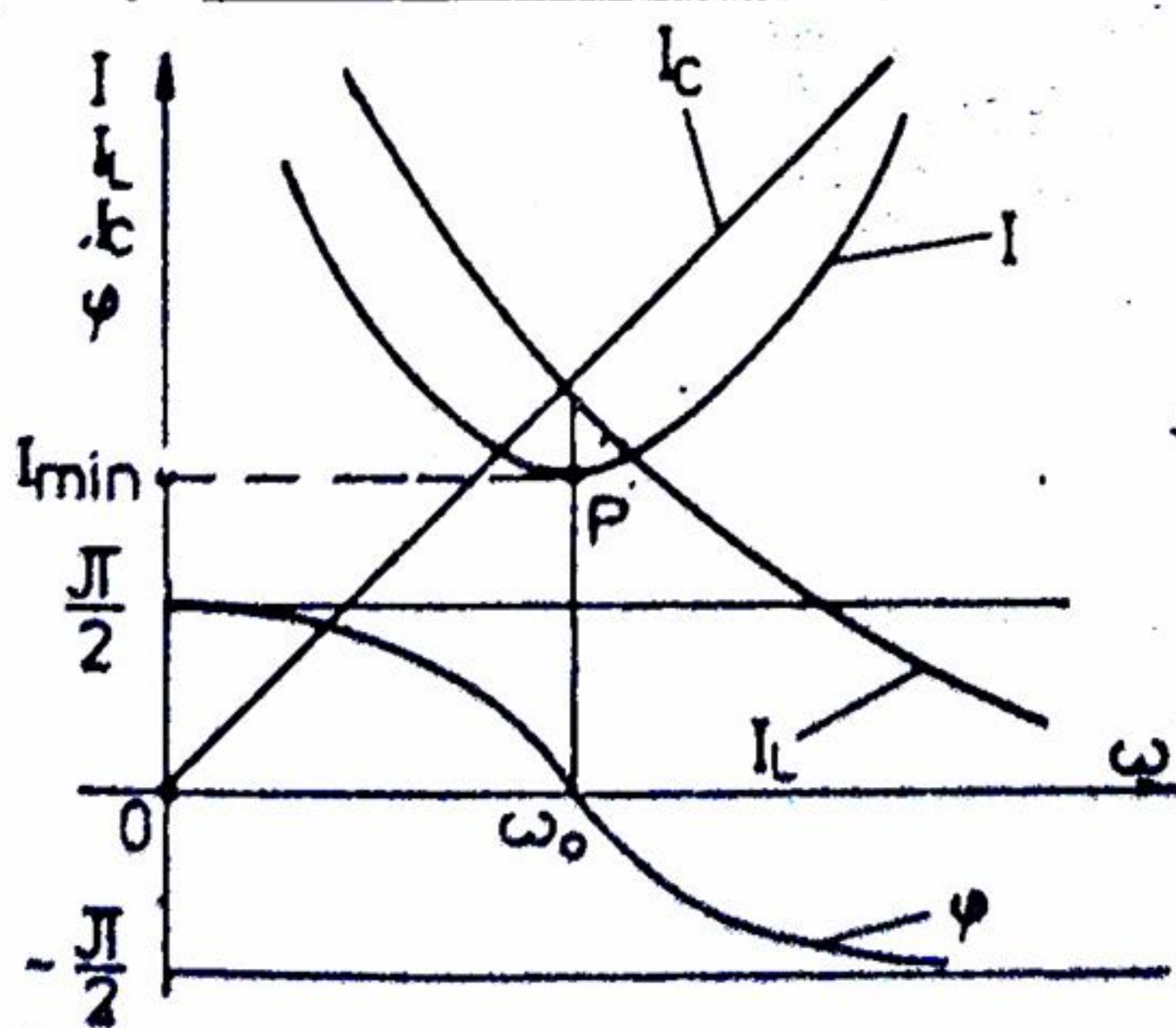


Fig.5.60

Dacă elementele de circuit  $R, L, C$  sunt constante și se variază pulsația  $\omega$ , atunci mărimile:

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2};$$

$$\varphi = \arctg R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right);$$

$$I_C = U\omega C; I_L = \frac{U}{\omega L}, \quad (5.155)$$

reprezentate grafic în (fig.5.60) se numesc curbe de rezonanță. În punctul P, curentul absorbit de la sursă



este minim, corespunzător pulsației de rezonanță  $\omega_0$ :  $I_{\min} = \frac{U}{R}$ .

Factorul de calitate are expresia (cu  $\omega = \omega_0$ ):

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{U\sqrt{C}}{U} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (5.156)$$

și arată de câte ori este mai mare curentul din bobină (sau condensator) față de curentul total absorbit de la sură. Curenții  $I_L$  și  $I_C$  pot atinge valori mult mai mari decât decât curentul  $I$  absorbit. Din acest motiv, rezonanța în circuitele ramificate se mai numește și rezonanța curenților.

În cazul circuitului ramificat din fig.5.61 condiția de rezonanță este:  $B = B_1 + B_2 = 0$ ,

$$\text{unde: } B_1 = \frac{X_1}{Z_1^2} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = -\frac{1}{\omega C \left( R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)} \quad (5.157)$$

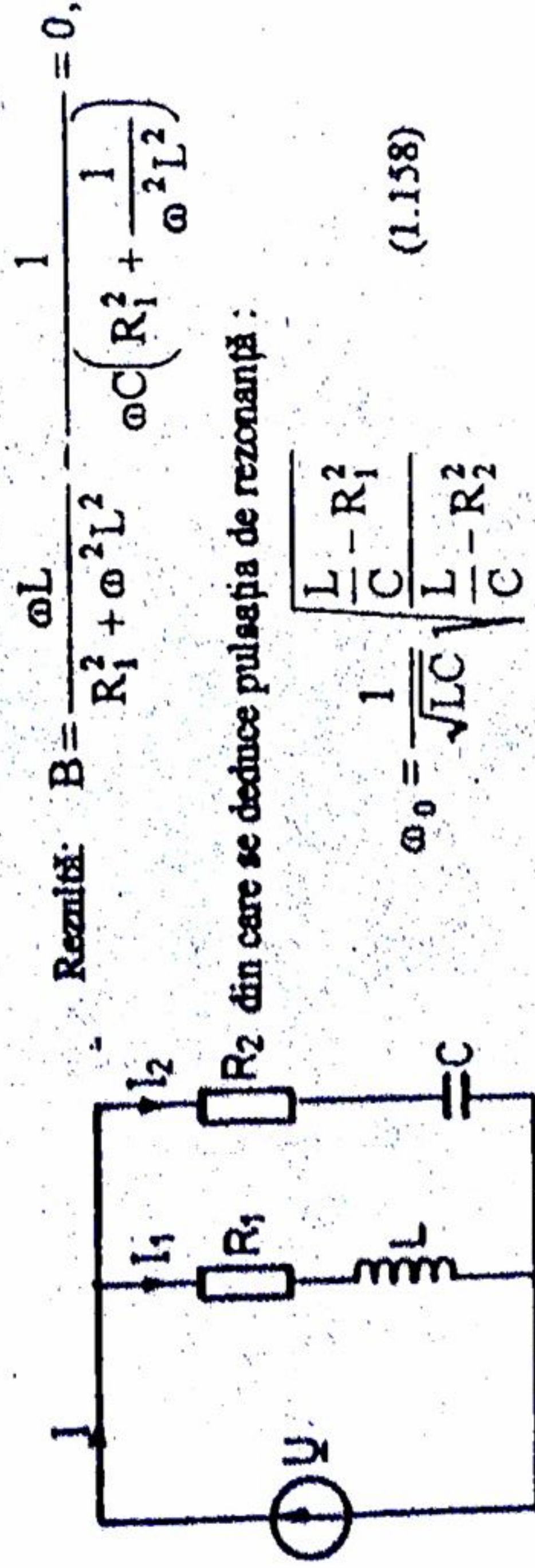


Fig.5.61

condiția de rezonanță este

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5.159)$$

adică aceeași ca și în cazul circuitelor serie și paralel.

Pentru  $R_1 = R_2 = Z_0$ , pulsația de rezonanță este o neterminare, adică circuitul este rezonant, indiferent de pulsația  $\omega$ , iar pentru  $R_1 > Z_0$  și  $R_2 < Z_0$  sau  $R_1 < Z_0$  și  $R_2 > Z_0$ , rezultată pentru  $\omega_0$  o valoare imaginară, adică rezonanța nu este posibilă.

În sfârșit, pentru  $R_2 = 0$  și  $R_1 < Z_0$  se obține (cu  $\omega_0 = \omega$ , în general):

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \quad (5.160)$$



o relație cu care se determină capacitatea ce trebuie montată în paralel cu circuitul inductiv, pentru ca ansamblul să aibă un defazaj  $\varphi$ , dintre tensiunea de alimentare și curentul debitat, egal cu zero ( $\cos\varphi = 1$ ).

### 5.2.7 Energia circuitelor rezonante

La rezonanță nu există schimb de energie reactivă între sursă și câmpurile magnetice și electrice ale circuitului, dar există schimb de energii reactive între câmpurile magnetice și electrice, suma acestor energii rămânând permanent constantă

$$W = W_m + W_e = \text{constant} \quad (5.161)$$

Observând că 
$$\begin{cases} i = \sqrt{2}I \sin \omega t \\ u_e = \sqrt{2}U_e \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (5.162)$$

se deduce:

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = LI^2 \sin^2 \omega t \quad (5.163)$$

$$W_e = \frac{1}{2} Cu_e^2 = CU_e^2 \cos^2 \omega t, \quad (5.164)$$

$$\text{în care: } LI^2 = CU_e^2, \text{ deoarece } \left(\frac{U_e}{I}\right)^2 = Z_0^2 = \frac{L}{C}$$

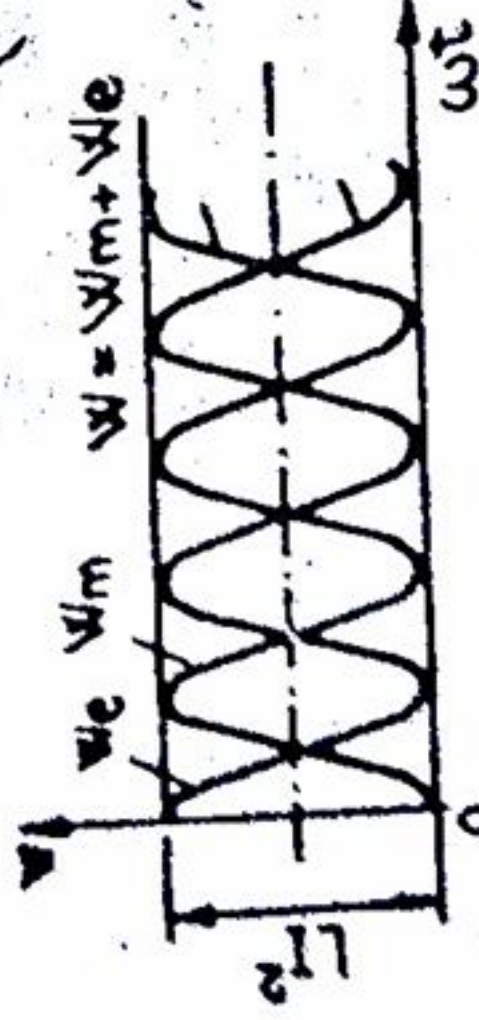


Fig. 5.62

Rezultă (fig. 5.63):

$$W = W_m + W_e = LI^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) LI^2 \quad (5.165)$$

Se constată că în timp ce energia câmpului magnetic  $W_m$  crește, energia câmpului electric  $W_e$

scade și invers, suma lor rămânând constantă permanent.

De la sursă este absorbită numai energie activă, constantă de rezistențele circuitului rezonant și transformată în energie termică prin curentul de conducție:  $W_a = RI^2 t$

### 5.3 CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE

În circuitele electrice trifazate acționează trei t.e.m. de aceeași frecvență, în ramuri diferite. Cele trei tensiuni electromotoare formează sistemul trifazat de tensiuni simetrice și direct (fig. 5.63).

$$u_1 = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha); u_2 = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right); u_3 = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5.166)$$



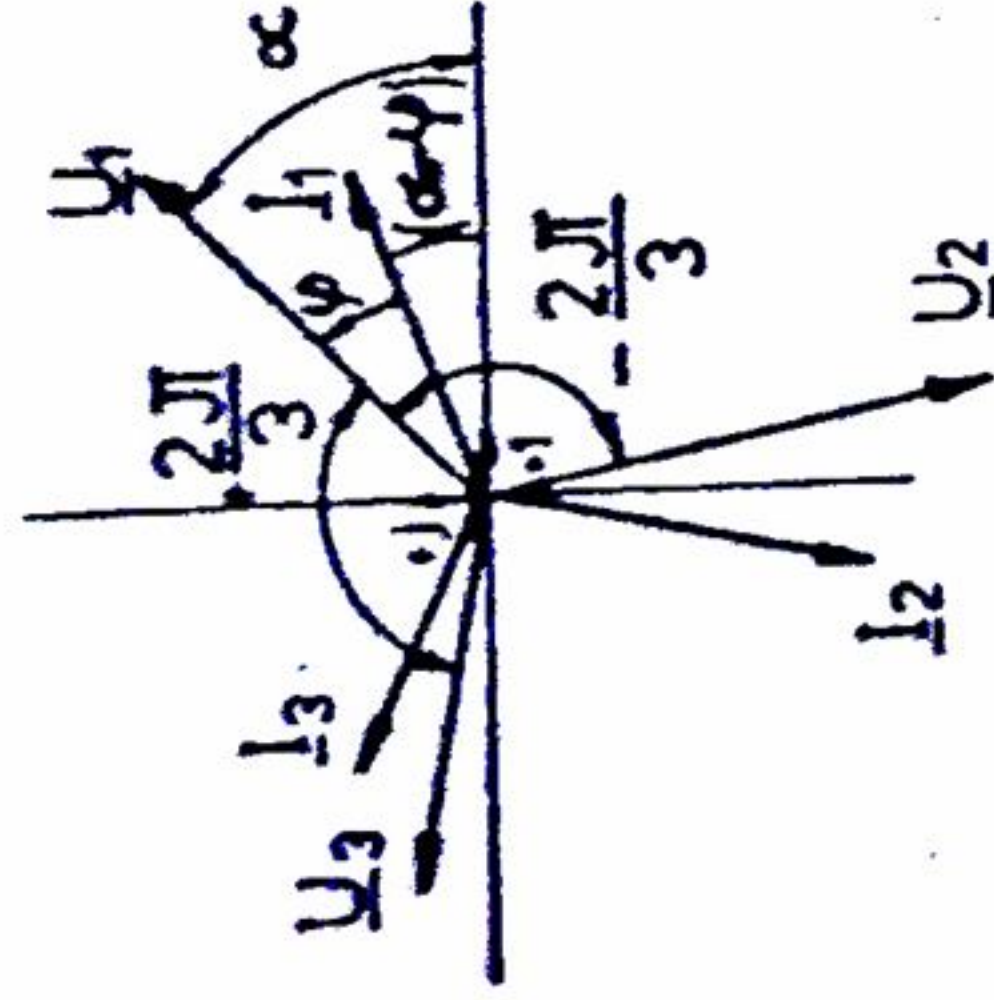


Fig. 5.63

$$i_1 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi); i_2 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right);$$

$$i_3 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \quad (5.167)$$

unde  $\varphi$  este defazajul din cele trei faze ale receptorului.

### 5.3.1 Producerea sistemului trifazat simetric de t.e.m.

În principiu, generatorul trifazat de t.e.m. simetrice conține trei bobine identice,

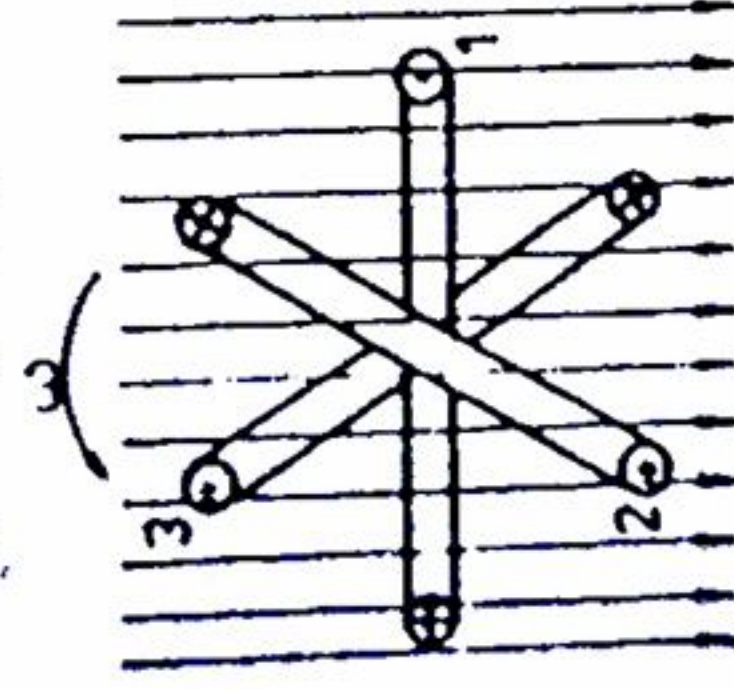


Fig. 5.64

spira 1 și direcția inducției magnetice B, atunci fluxurile sunt :

$$\phi_1 = BS \cos \omega t; \phi_2 = BS \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \phi_3 = BS \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \text{ unde } S \text{ este suprafața}$$

spirei. T.e.m. induse în cele trei bobine sunt :

$$\begin{cases} u_1 = -N \frac{d\phi_1}{dt} = NBS\omega \sin \omega t = \sqrt{2}U \sin \omega t \\ u_2 = -N \frac{d\phi_2}{dt} = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3 = -N \frac{d\phi_3}{dt} = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \end{cases} \quad (5.168)$$

unde s-a presupus că la timpul  $t = 0$  planului bobinei 1 este perpendicular pe liniile de câmp magnetic (deci unghiul  $\alpha$  din relațiile precedente și din fig. 5.63 este nul).



### 5.3.2 Operatorul complex de rotație "a" și utilizarea lui în reprezentarea sistemelor simetrice

Operatorul "a" are, prin definiție, valoare:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.169)$$

Dacă un număr complex  $\underline{C}$  se înmulțește cu operatorul  $a$ , se obține tot un număr complex, cu același modul, însă rotit cu unghiul  $\frac{2\pi}{3}$  în sens trigonometric, iar dacă numărul complex  $\underline{C}$  se înmulțește cu pătratul operatorului  $a$ :

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.170)$$

se obține tot cu un număr complex cu același modul, însă rotit în sens trigonometric cu unghiul  $\frac{4\pi}{3}$ , sau în sens orar cu unghiul  $\frac{2\pi}{3}$ .

Operatorul  $a$  se utilizează în mai multe forme, dintre care se menționează următoarele:

$$1 + a + a^2 = 0; a^3 = a^6 = a^9 = \dots = a^0 = 1; a^4 = a = a^{2^2}; a^5 = a^3 a^2 = a^2 = a^* \quad (5.171)$$

unde  $a^*$  este conjugatul lui  $a$ , iar  $a^{2^2}$  - conjugatul lui  $a^2$ .

Sistemele simetrice de tensiuni și curenți sunt prezentate în fig. 5.65.a pentru succesiunea directă a fazorilor și în fig. 5.65.b pentru succesiunea inversă a fazorilor.

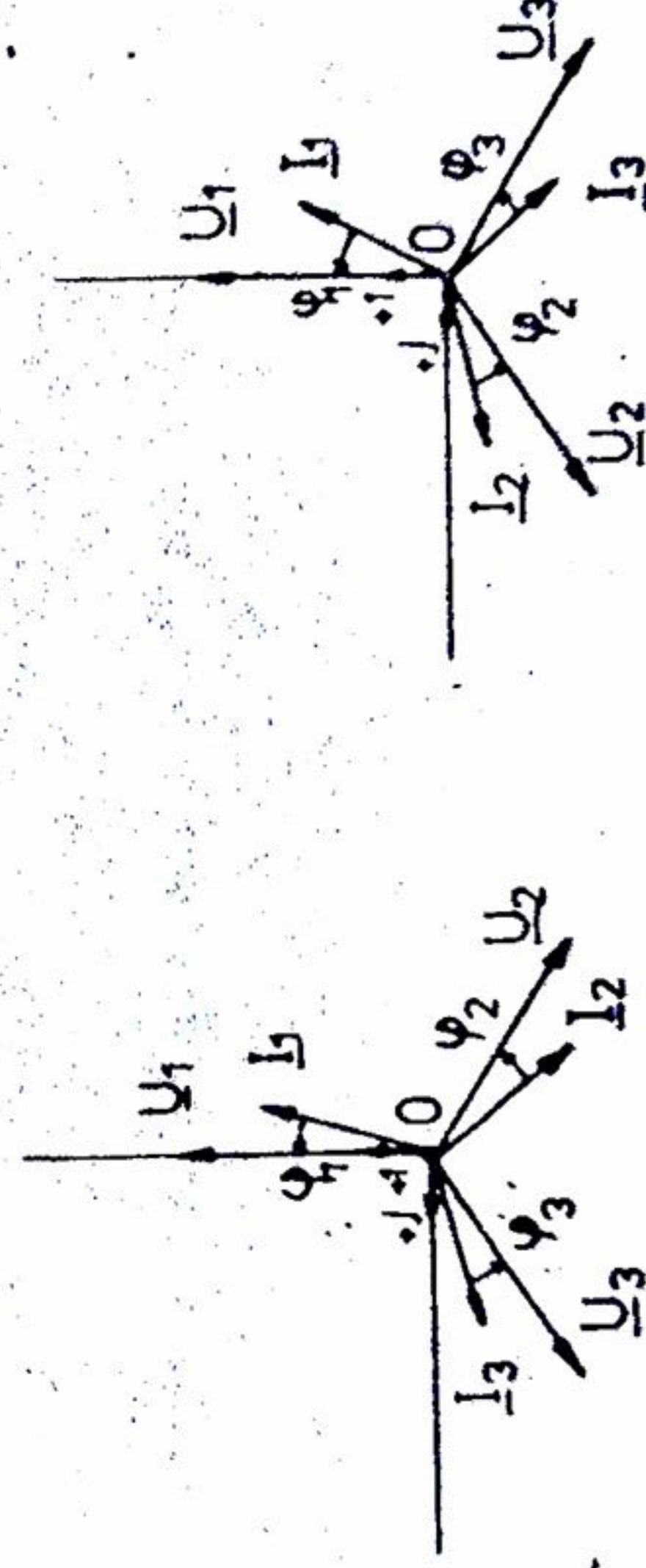


Fig. 5.65

În reprezentările uzuale nu se mai trec axele de coordonate ale planului complex, iar mărimile  $\underline{U}$  și  $\underline{I}$  sunt înlocuite cu valorile lor (fig. 5.66.a), pentru sistemul direct și (fig. 5.66.b), pentru sistemul invers.



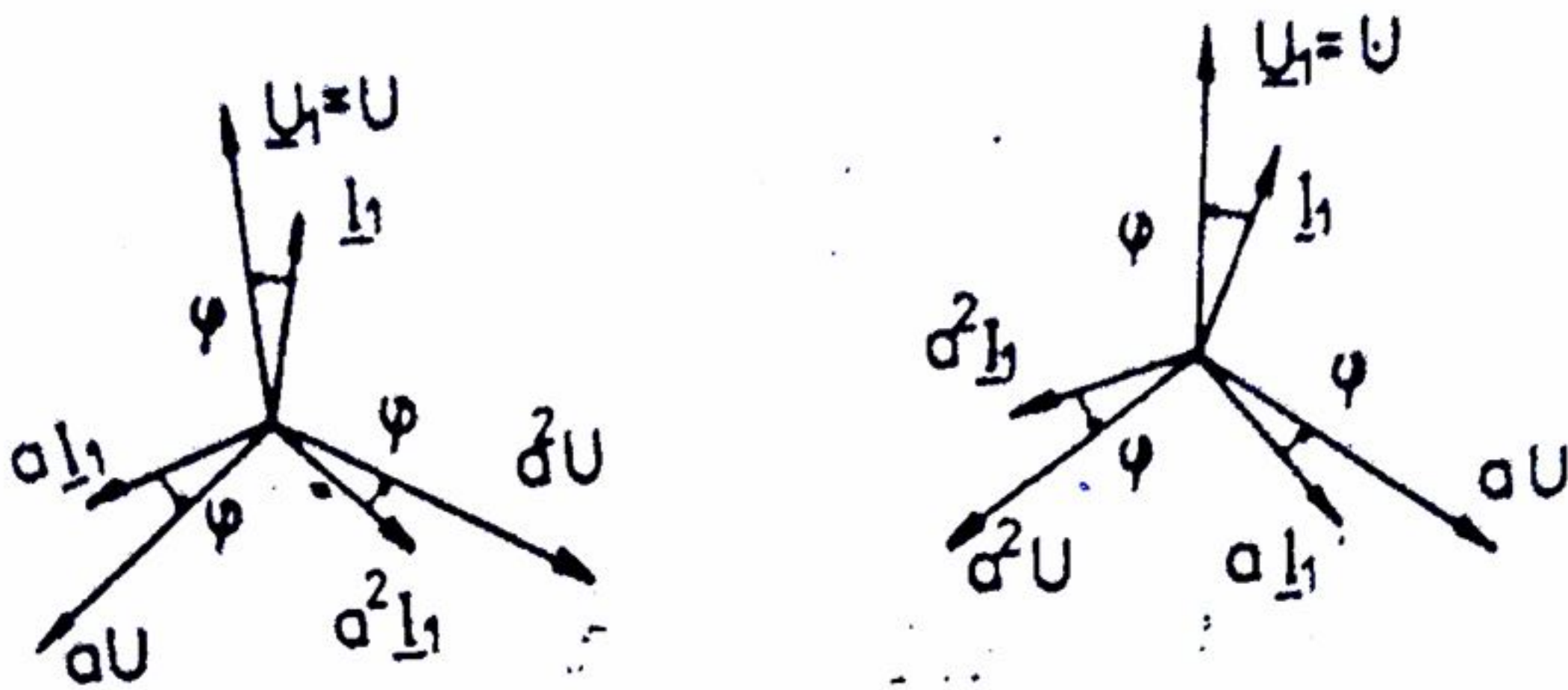


Fig.5.66

### 5.3.3 Circuitele trifazate cu receptoare echilibrate, alimentate la tensiuni simetrice

Receptoarele trifazate pot fi legate în stea (fig.5.67) sau în triunghi (fig.5.68).

La receptorul echilibrat legat în stea, dacă se cunosc impedanțele (fig.5.67), defazajele și tensiunile de fază :

$$\begin{cases} \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}; \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi \\ \underline{U}_1 = \underline{U}_{10} = U_f; \underline{U}_2 = \underline{U}_{20} = a^2 U_f; \underline{U}_3 = \underline{U}_{30} = a U_f \end{cases} \quad (5.172)$$

rezultă curenții de fază, egali cu curenții de linie :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}} = I_f e^{-j\varphi}; \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{Z}} = a^2 I_f e^{-j\varphi}; \\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{Z}} = a I_1 = a I_f e^{-j\varphi}; \end{cases} \quad (5.173)$$

Din fig.5.67 se constată că tensiunile de linie, numite și tensiuni compuse au valorile efective :

$$U_l = \sqrt{3} U_f \quad (5.174)$$

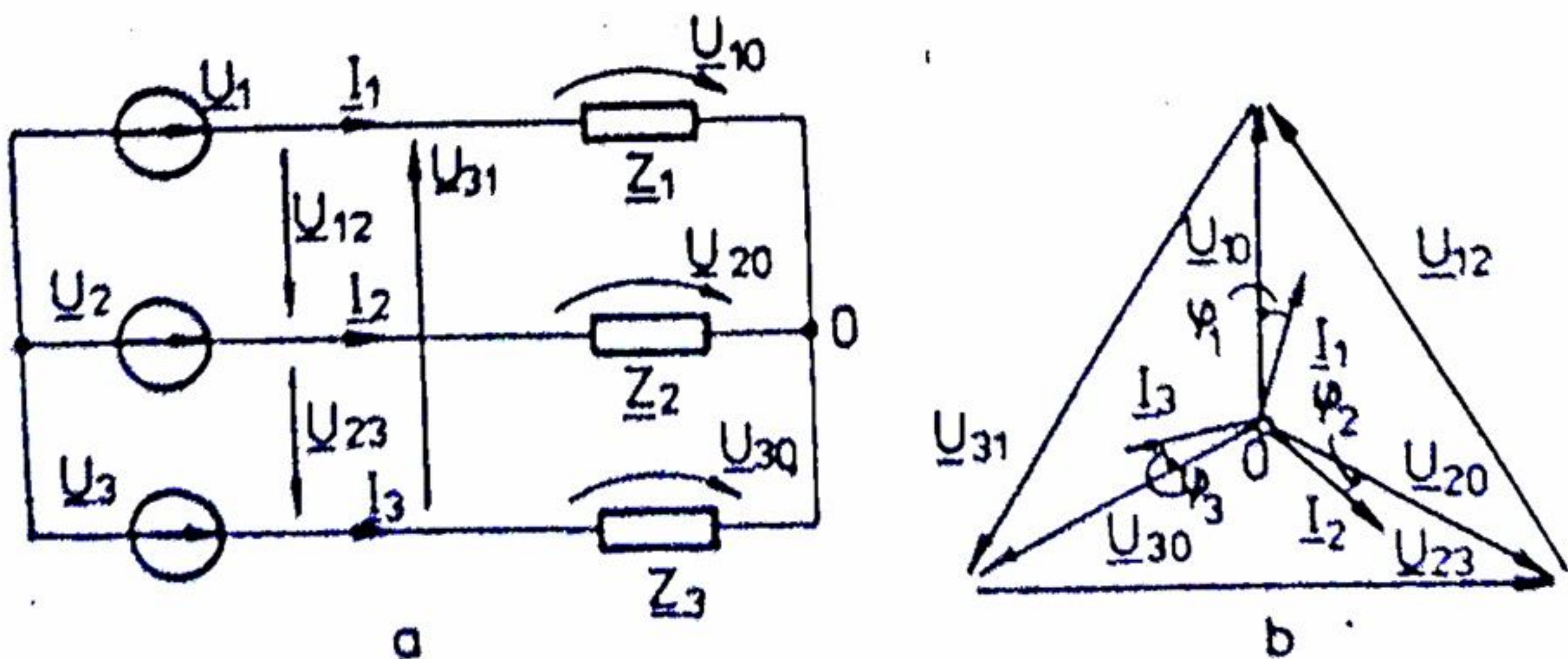


Fig.5.67



Rețelele trifazate industriale au tensiunile de fază de 127V sau 220V și tensiunile de linie de 220V sau 380V, deci: rezultă, aproximativ:  $\frac{380}{220} = \frac{220}{127} = \sqrt{3}$ .

La receptorul echilibrat legat în triunghi, dacă se cunosc impedanțele, defazajele și tensiunile de fază:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}; \varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = \varphi \\ \underline{U}_1 = \underline{U}_{12} = \underline{U}_2 = \underline{U}_f; \underline{U}_2 = \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_1; \underline{U}_3 = \underline{U}_{31} = a \underline{U}_1 \end{cases} \quad (5.175)$$

rezultă curenții de fază:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = I_f e^{-j\varphi}; \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{12} = a^2 I_f e^{-j\varphi}; \\ \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{12} = a I_f e^{-j\varphi}; \end{cases} \quad (5.176)$$

și curenții de linie (fig.5.68):  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$ . Curenții de linie au valorile efective cu  $\sqrt{3}$  ori mai mari decât cele de fază

$$I_1 = \sqrt{3} I_f. \quad (5.177)$$

În circuitele trifazate simetrice cu receptoare echilibrate legate în stea, puterea complexă este, succesiv:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*; \underline{S} = \underline{U}_{1f} \underline{I}_{1f}^* (1 + a^2 a^{2*} + a a^*) = \sqrt{3} \underline{U}_1 \underline{I}_1^*;$$

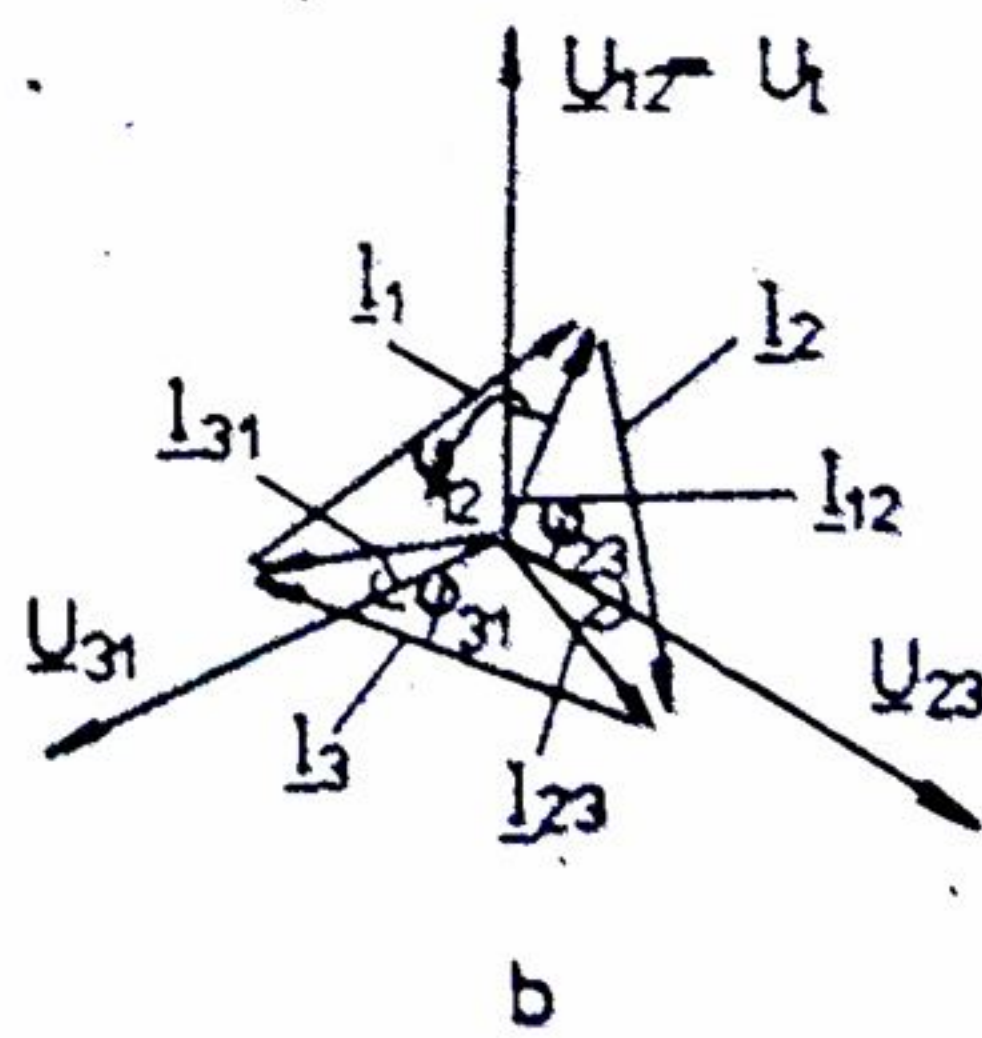
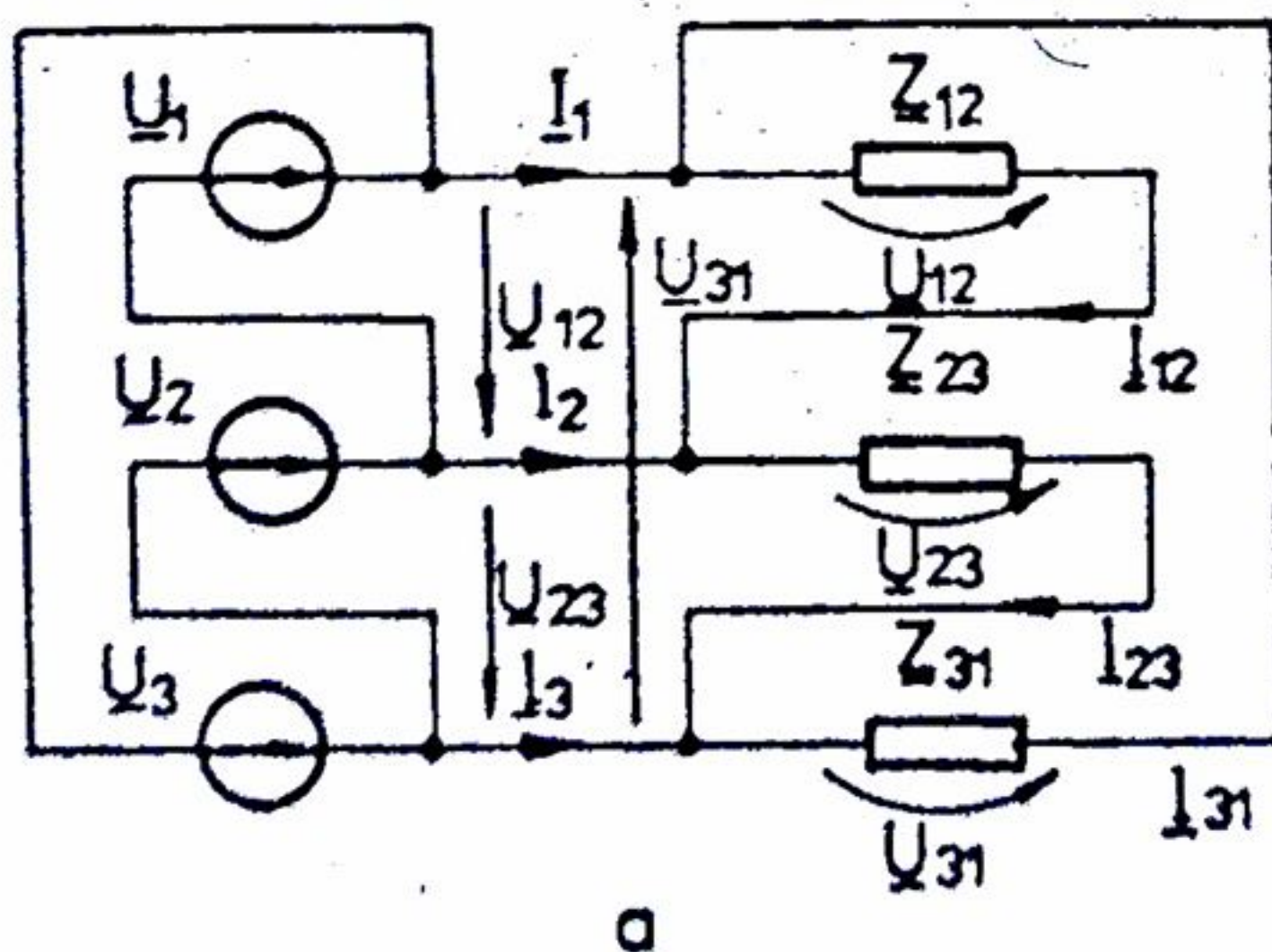


Fig.5.68

$$\underline{S} = 3 U_f I_f e^{j\varphi} = \sqrt{3} U_1 I_1 e^{j\varphi} = P + jQ \quad (5.178)$$

$$\text{unde: } P = \sqrt{3} U_1 I_1 \cos \varphi; Q = \sqrt{3} U_1 I_1 \sin \varphi; S = \sqrt{3} U_1 I_1 = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (5.179)$$



Aceleași rezultate se obțin și în cazul receptorului legat în triunghi:

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_{31}^* = 3 \underline{U}_f \underline{I}_f e^{j\varphi} = P + jQ. \quad (5.180)$$

### 5.3.4 Circuitele trifazate cu receptoare dezechilibrate alimentate la tensiuni simetrice.

#### Aplicații.

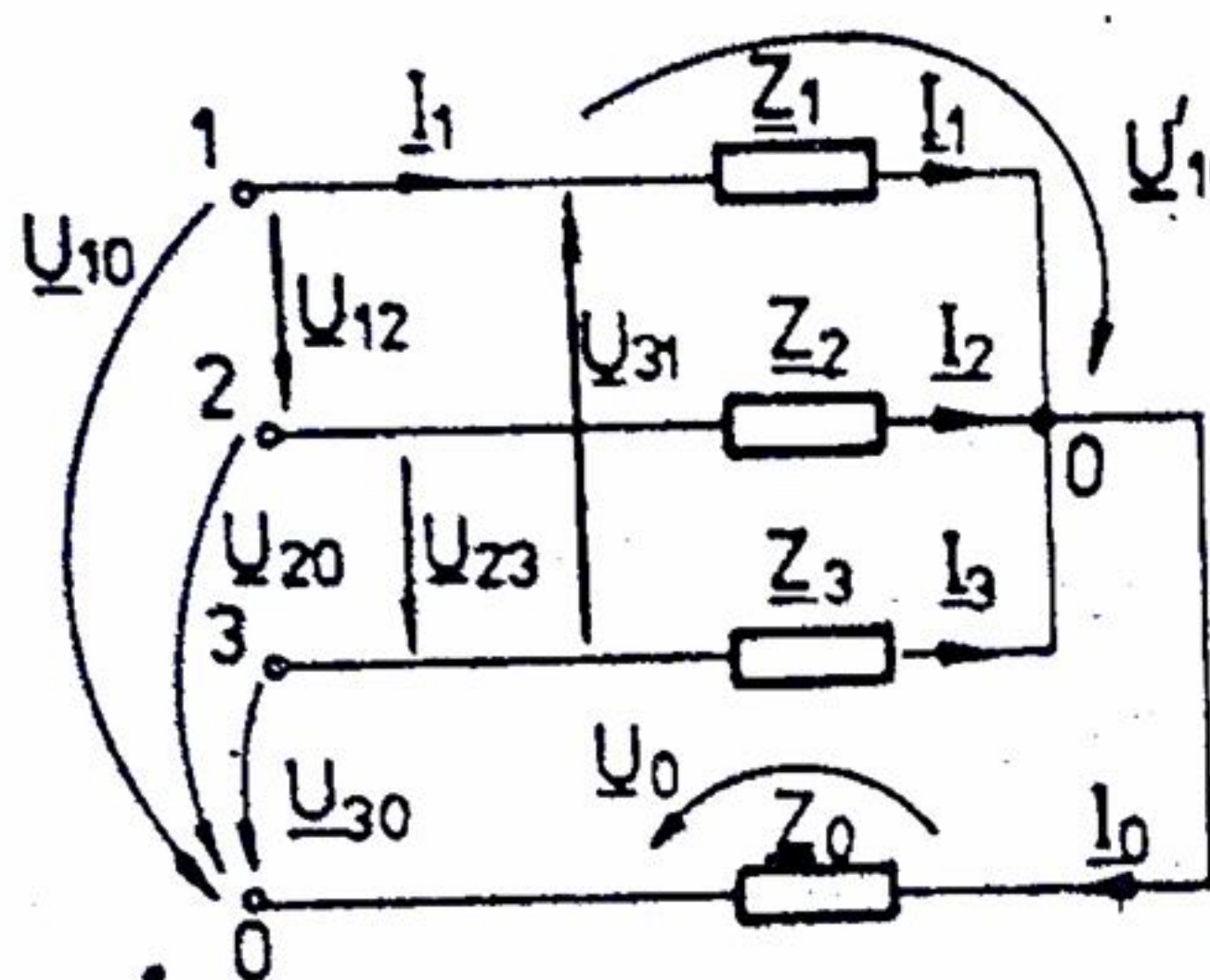


Fig. 5.69

În fig. 5.69 curenții de linie (egali cu cei de fază) au valorile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_0}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1(\underline{U}_{10} - \underline{U}_0); \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2(\underline{U}_{20} - \underline{U}_0); \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}_3(\underline{U}_{30} - \underline{U}_0);$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \underline{Y}_0 \underline{U}_0 \quad (5.181)$$

unde  $\underline{Y}$  reprezintă admitanțele ramurilor circuitului, iar  $\underline{U}_0$  - tensiunea între nodurile circuitului, numită și tensiunea de deplasare a nulului.

Se constată că:  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0$ , deci, din (5.181) rezultă:

$$\underline{Y}_1(\underline{U}_{10} - \underline{U}_0) + \underline{Y}_2(\underline{U}_{20} - \underline{U}_0) + \underline{Y}_3(\underline{U}_{30} - \underline{U}_0) = \underline{Y}_0 \underline{U}_0$$

$$\text{sau: } \underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{10} \underline{Y}_1 + \underline{U}_{20} \underline{Y}_2 + \underline{U}_{30} \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} \quad (5.182)$$

cu ajutorul căreia se calculează tensiunile pe fazele receptorului

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_0 - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_{20} = \underline{U}_0 - \underline{U}_0; \quad \underline{U}_{30} = \underline{U}_0 - \underline{U}_0 \quad (5.183)$$

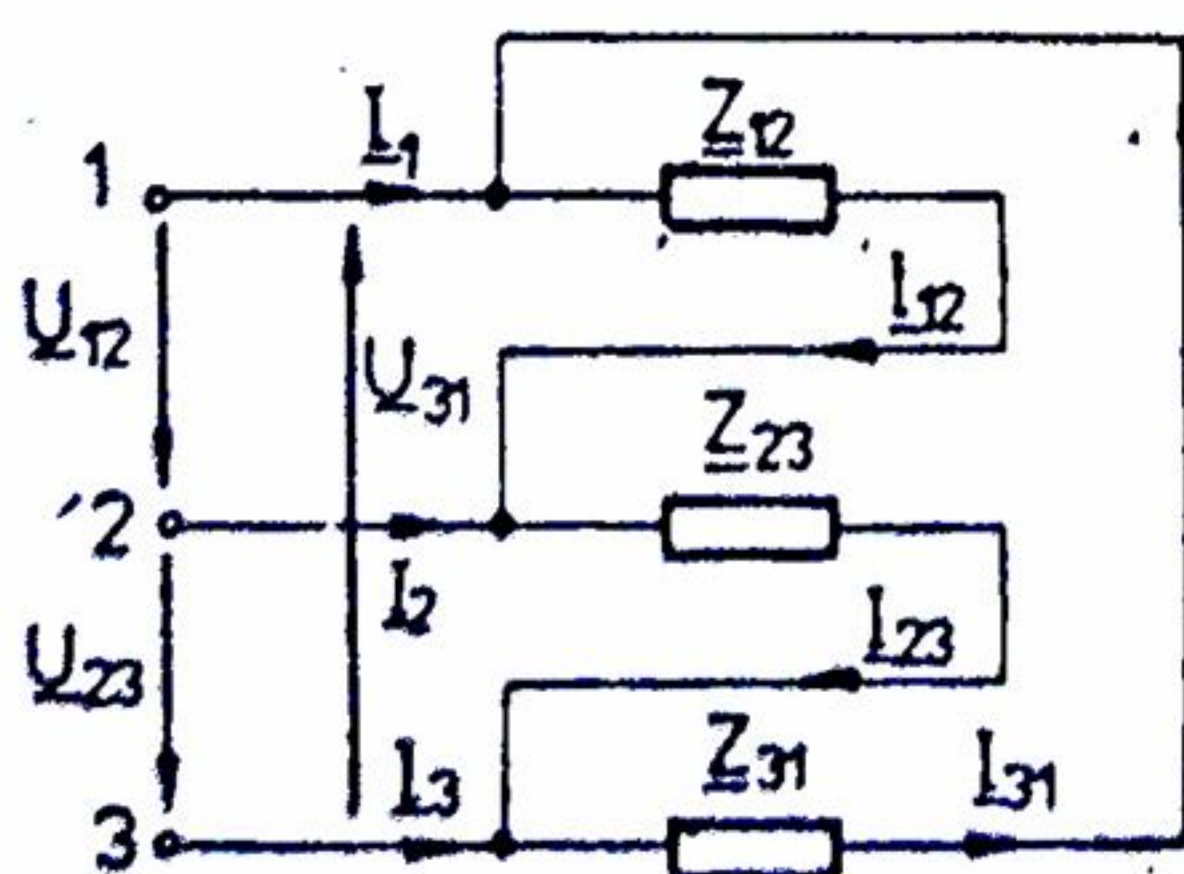


Fig. 5.70 .



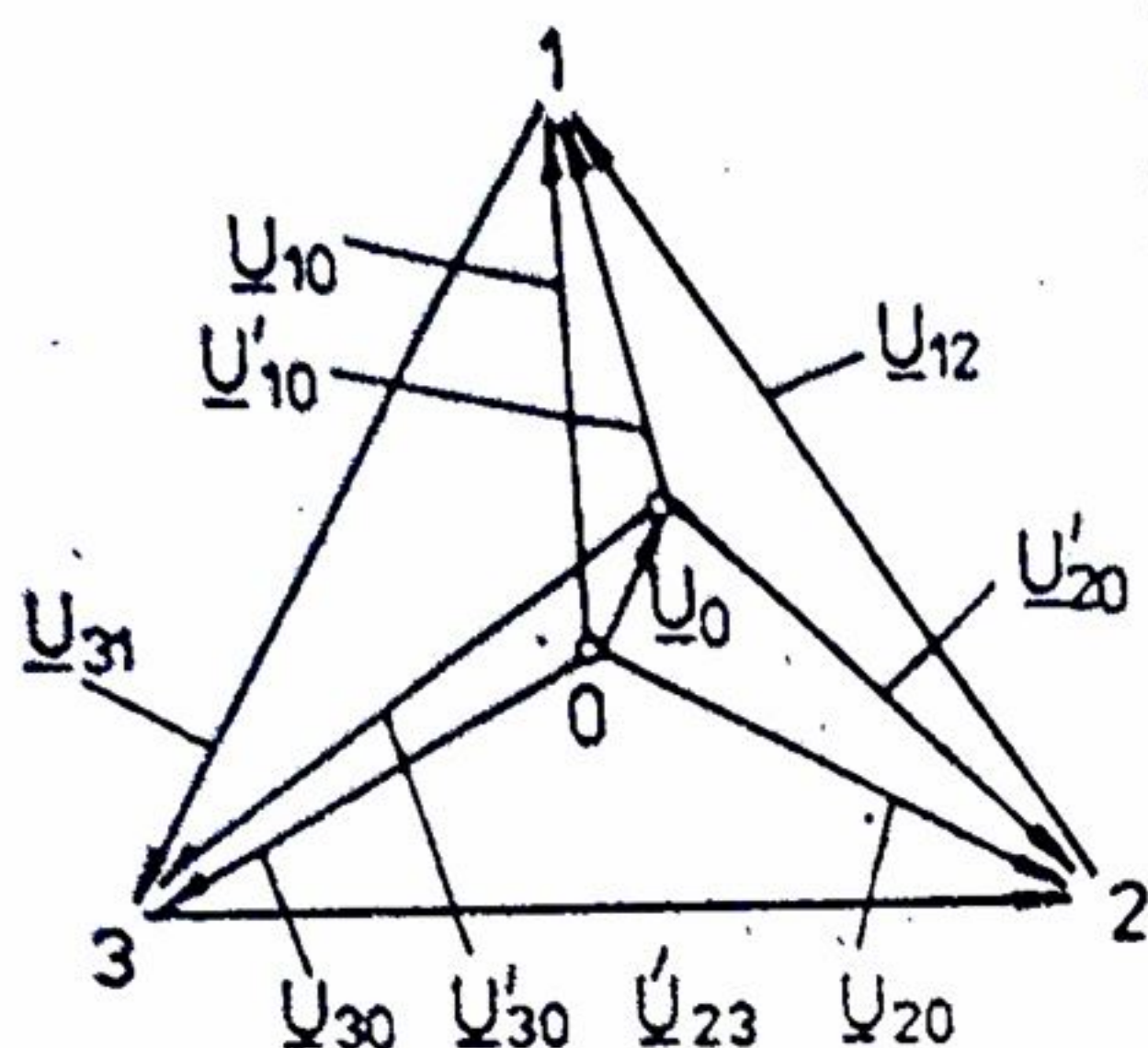


Fig. 5.71

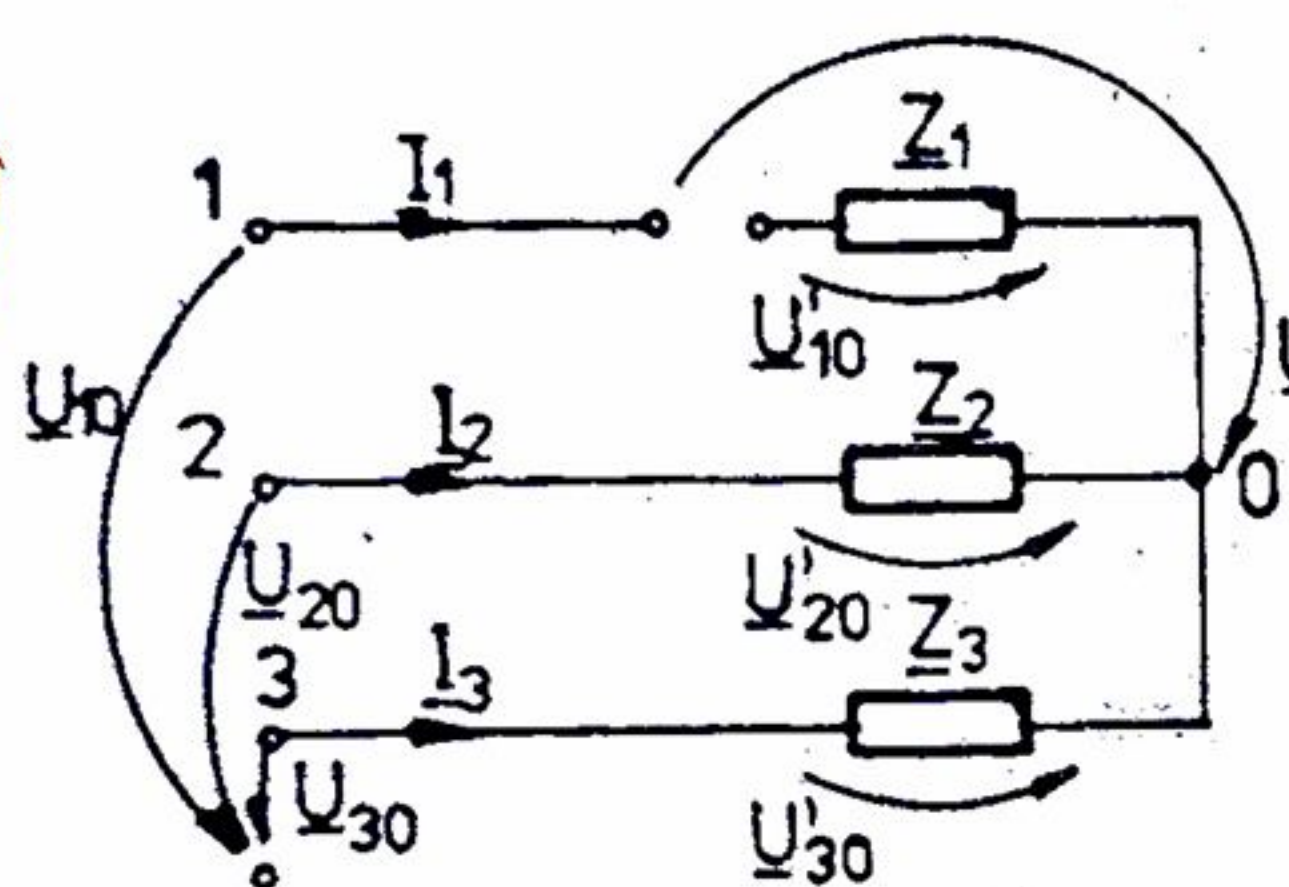


Fig. 5.72

Tensiunile pe fazele receptorului sunt (fig. 5.73) :

$$\underline{U}'_{10} = 0; \underline{U}'_{20} = \underline{U}_{20} + \frac{\underline{U}_{10}}{2} = \frac{\underline{U}_{23}}{2}; \underline{U}'_{30} = \underline{U}_{30} + \frac{\underline{U}_{10}}{2} = -\frac{\underline{U}_{23}}{2}$$

Tensiunea  $\underline{U}''_{10}$  dintre conductor și punctul 0 este  $\underline{U}''_{10} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_0 = \frac{3\underline{U}_{10}}{2}$

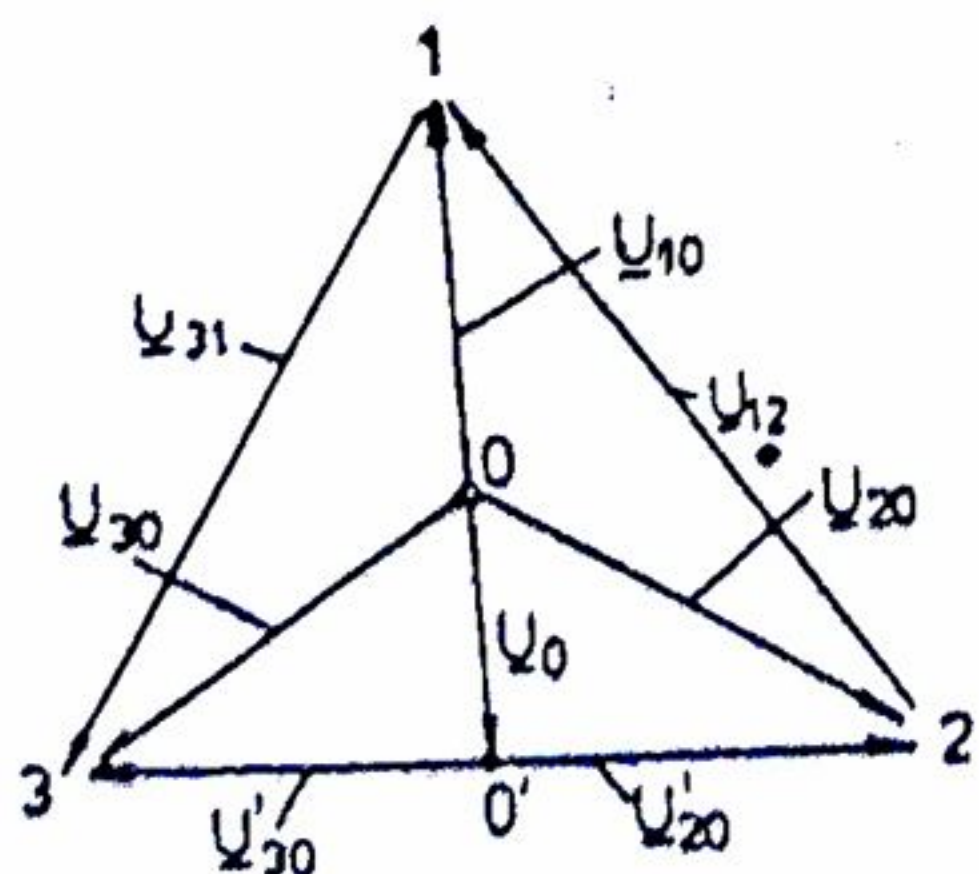


Fig. 5.73

apoi curenții din (5.181). Valoarea tensiunii  $\underline{U}_0$  depinde de valoarea impedanței conductorului de nul  $\underline{Z}_0$  și anume: pentru  $\underline{Z}_0 = 0$ , rezultă  $\underline{Y}_0 = \infty$  și  $\underline{U}_0 = 0$ , pentru  $\underline{Z}_0 \neq 0$ , rezultă  $\underline{Y}_0 \neq 0$  și  $\underline{U}_0 \neq 0$  (fig. 5.71)

Dacă circuitul nu are conductor de nul, rezultă  $\underline{Z}_0 = \infty$  și  $\underline{Y}_0 = 0$ , pentru  $\underline{U}_0 \neq 0$ , caz la care se poate ajunge și prin transfigurarea circuitului din fig. 5.70, în scopul determinării curenților de linie  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  (după care, cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff se calculează curenții de fază  $\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}$ ). Puterea complexă în circuite trifazate dezechilibrate este :

$$\underline{S} = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* = P + jQ \quad (5.184)$$

**Aplicația 1.** Se admite o întrerupere a conductorului 1 (fig. 5.72), în care receptorul trifazat are aceleași impedanțe pe faze, iar sistemul de tensiuni este simetric. În acest caz, rezultă  $\underline{Z}_1 = \infty; \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ , deci:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0; \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y}$$

Tensiunea de deplasare a nului (5.182)

$$\text{este (fig. 5.73) : } \underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}(\underline{U}_{20} + \underline{U}_{30})}{2\underline{Y}} = \frac{\underline{U}_{10}}{2} \quad (5.185)$$

**Aplicația 2.** Se admite un scurtcircuit al fazei 1 ( $\underline{Z}_1 = 0$ ) în circuitul din fig. 5.74, în care  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ , iar sistemul de tensiuni este simetric.

$$\text{Rezultă : } \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \infty, \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y}$$

Tensiunile de deplasare a nulului (5.187) este :

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{10} + \underline{U}_{20} \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_1} + \underline{U}_{30} \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_1}}{1 + \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_1} + \frac{\underline{Y}}{\underline{Y}_1}} = \underline{U}_{10} \quad (5.186)$$



Tensiunile pe fazele receptorului sunt (fig.5.75):  $\underline{U}'_{10} = 0$ ;

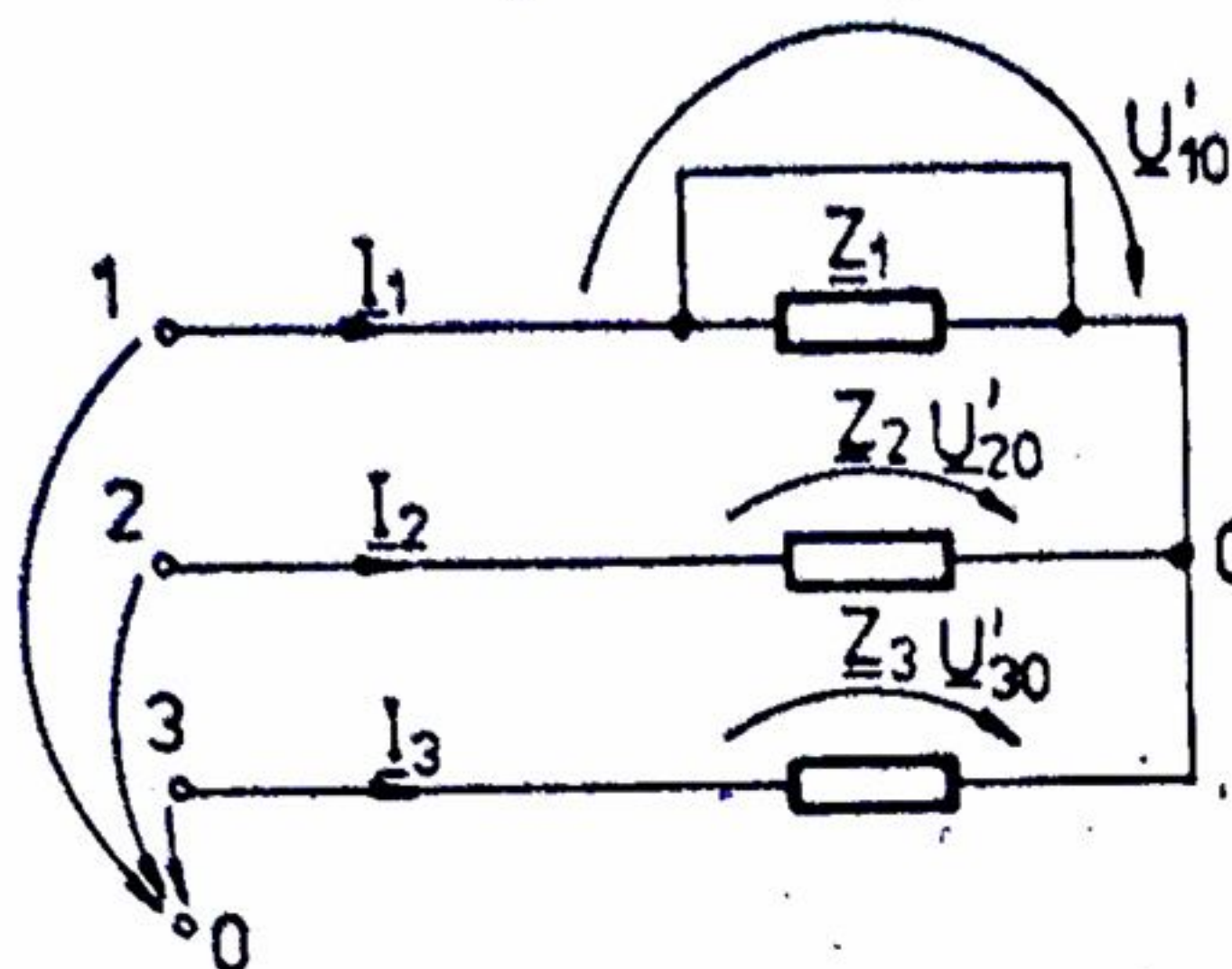


Fig.5.74

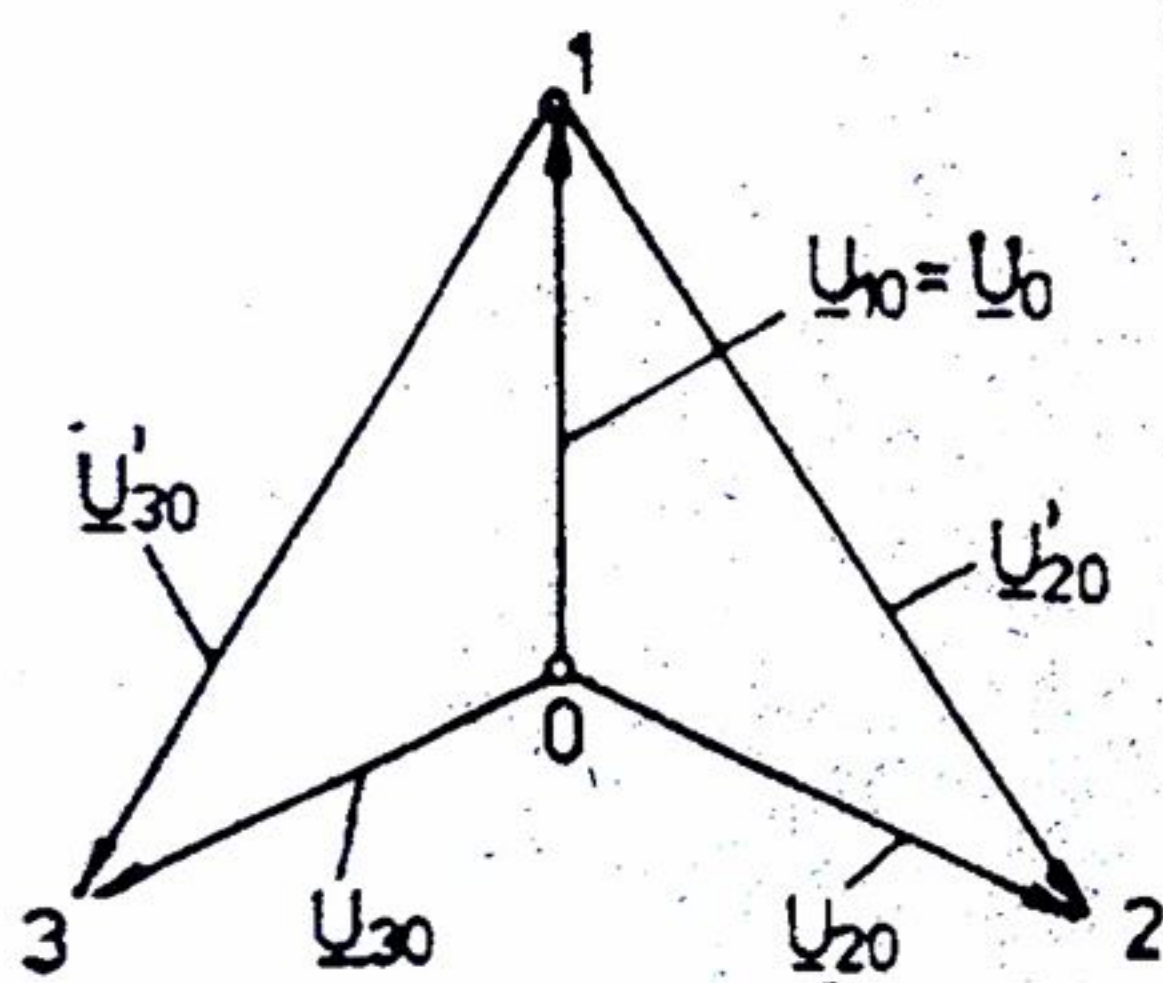


Fig.5.75

$$\underline{U}'_{20} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{10} = -\underline{U}_{12};$$

$$\underline{U}'_{30} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = \underline{U}_{31}$$

Se constată că în cazul întreruperii unei faze (aplicația 1) tensiunea pe celelalte faze scade, iar în cazul apariției unui scurtcircuit (aplicația 2) tensiunile pe celelalte faze cresc de  $\sqrt{3}$  ori. În ambele cazuri se produc deranjamente sau deteriorări ale instalației electrice.

**Aplicația 3.** Se consideră indicatorul de succesiune a fazelor unei rețele trifazate, constituind din rezistențele  $R$  și reactanța  $X = R$ .

Să se determine raportul tensiunilor efective  $\underline{U}'_{10}/\underline{U}_{20}$  (fig.5.76.a). Se admite că reactanța  $X$  este capacitivă, deci admitanțele fazelor sunt :

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{1}{R}; \quad \underline{Y}_3 = \frac{-1}{jX} = j\frac{1}{R}.$$

Tensiunea de deplasare a nulului (5.182) este

$$\underline{U}_0 = U_f \frac{1 + a^2 + aj}{2 + j}, \text{ sau :}$$

$$\underline{U}_0 = U_f \frac{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(j-1)}{2 + j} = \quad (5.187)$$

$$= U_f(-0,41 - j0,47)$$

Rezultă :  $\underline{U}'_{10} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_0 = U_f(1,41 + j0,47);$

$$\underline{U}'_{20} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_0 = U_f(a^2 + 0,41 + j0,47) = U_f(-0,09 - j0,04),$$

care au modulele:

$$U'_{10} = 1,49U_f; \quad U'_{20} = 0,4U_f \text{ (fig.5.76.b).}$$

Raportul lor este :

$$\frac{U'_{10}}{U'_{20}} = 3,72 = 2 + \sqrt{3} \quad (5.188)$$



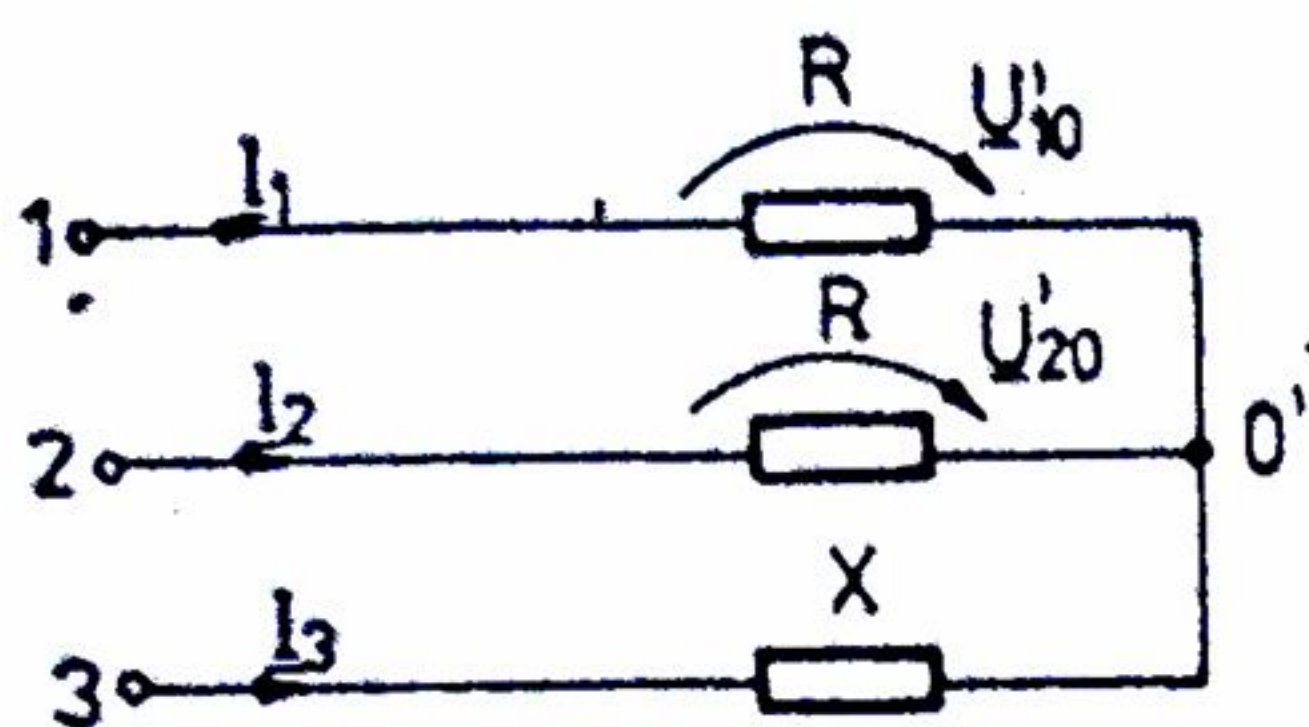
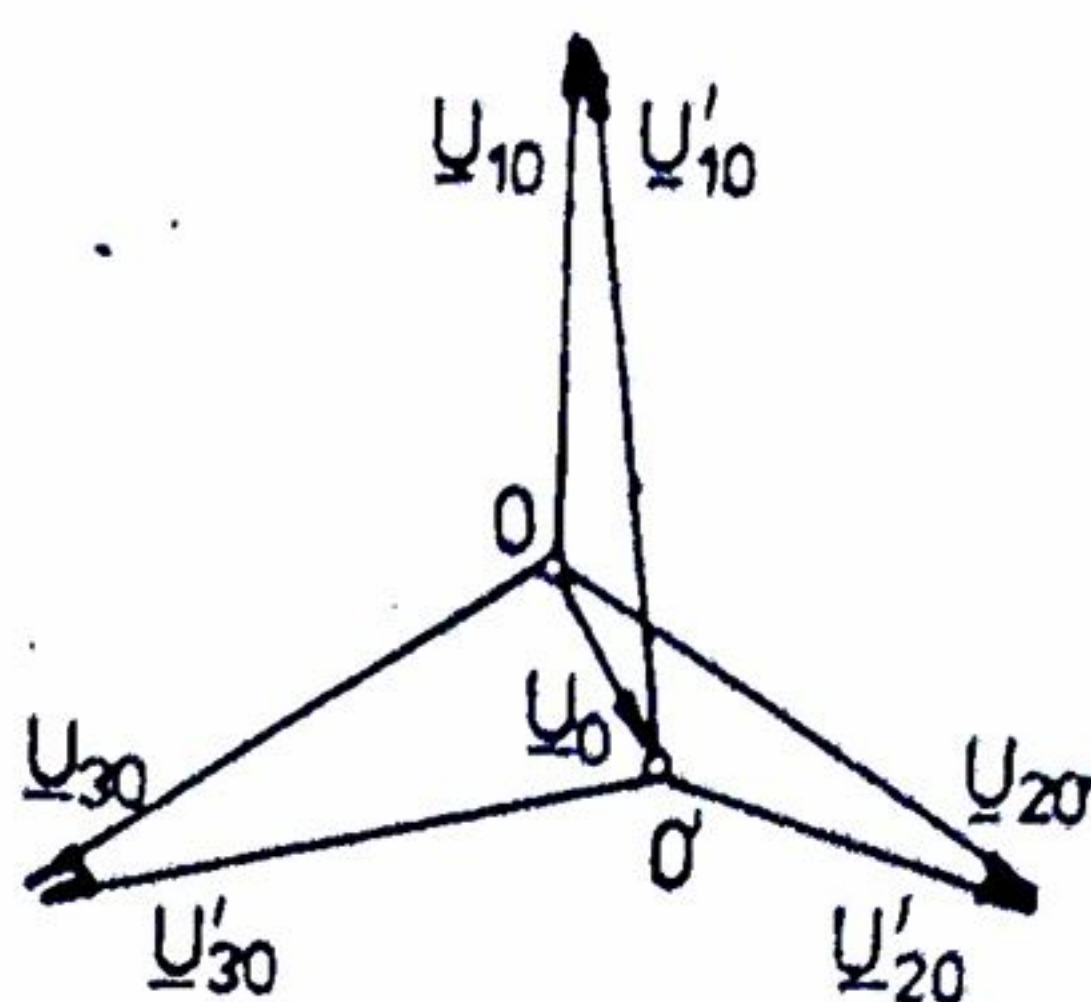


Fig. 5.76



adică, pentru o succesiune normală a fazelor, lampa electrică de pe faza întâi este mai luminoasă decât lampa electrică de pe faza a doua.

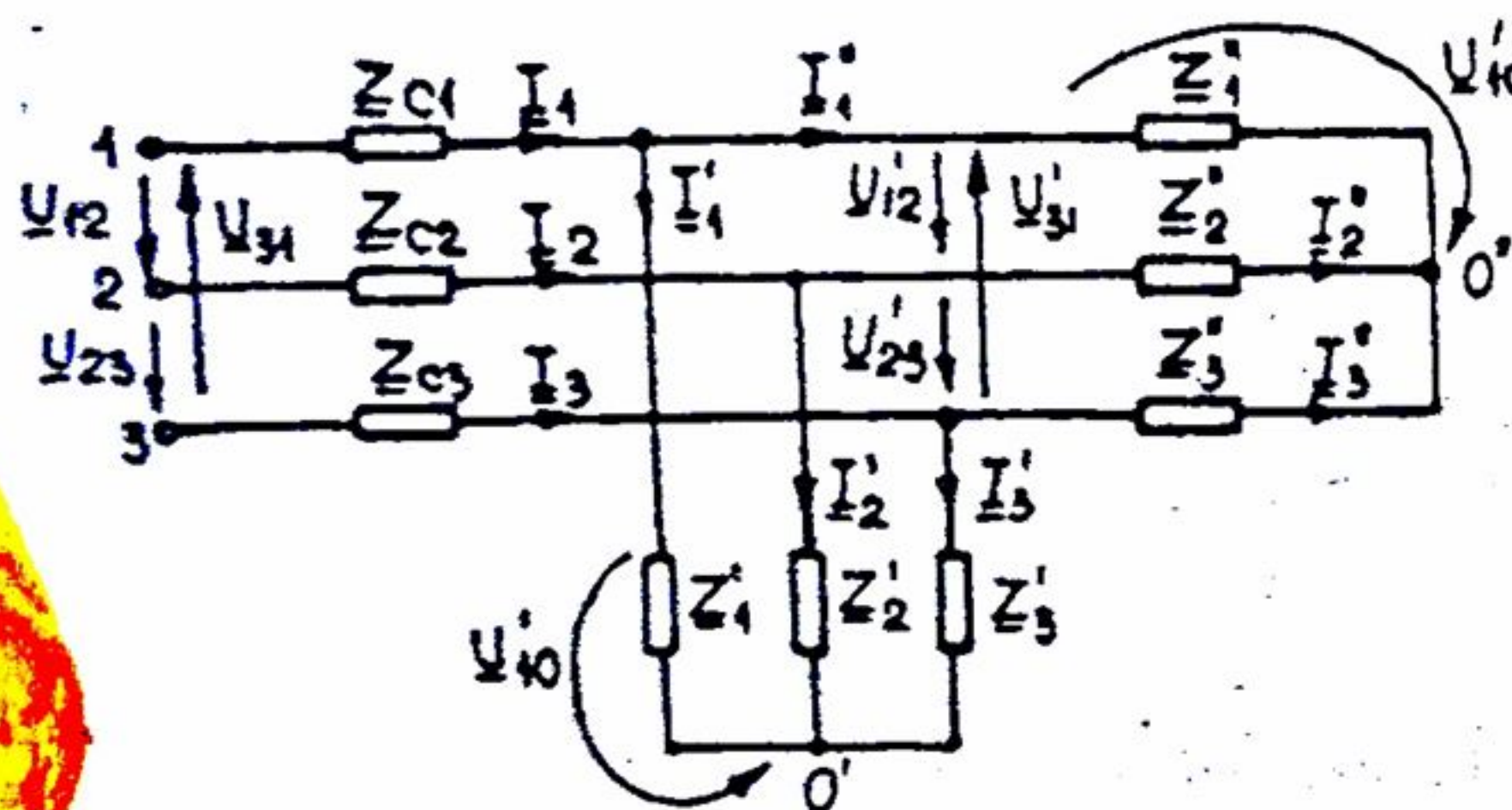


Fig. 5.77

**Aplicația 4.** Să se stabilească etapele de calcul pentru a afla curenții din circuitul trifazat dezechilibrat reprezentat în fig. 5.77, în care se cunosc tensiunile simetrice de linie ale generatorului, impedanțele conductoarelor de alimentare  $\underline{Z}_c$  și impedanțele receptoarelor  $\underline{Z}'$  și  $\underline{Z}''$ .

Stelele din  $O'$  și  $O''$  au impedanțele inegale pe faze, deci potențialele punctelor  $O'$  și  $O''$  sunt diferite și impedanțele  $\underline{Z}'$  și  $\underline{Z}''$  nu pot fi compuse în paralel.

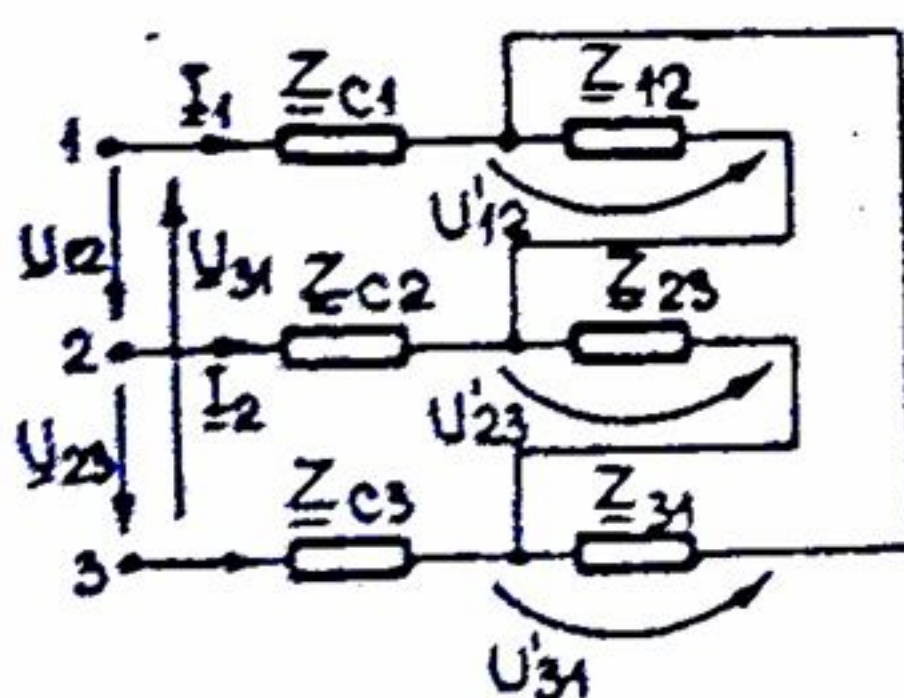


Fig. 5.78

Pentru a afla curenții din circuit se transfigurează ambele

stele în triunghiuri  $\underline{Z}_{12}' = \underline{Z}_1' + \underline{Z}_2' + \frac{\underline{Z}_1' \underline{Z}_2'}{\underline{Z}_3'}$  etc.,

$\underline{Z}_{12}'' = \underline{Z}_1'' + \underline{Z}_2'' + \frac{\underline{Z}_1'' \underline{Z}_2''}{\underline{Z}_3''}$  etc., care la rândul lor se compun

în unul singur (fig. 5.78)  $\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_{12}' \underline{Z}_{12}''}{\underline{Z}_{12}' + \underline{Z}_{12}''}$

Această triunghi se transfigurează în stea (fig. 5.79)  $\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$  etc.

Se ia ca fazor de referință tensiunea de fază:

$$\underline{U}_{10} = U_f = \frac{U_1}{\sqrt{3}} \text{ și deci } \underline{U}_{20} = a^2 U_f; \underline{U}_{30} = a U_f.$$



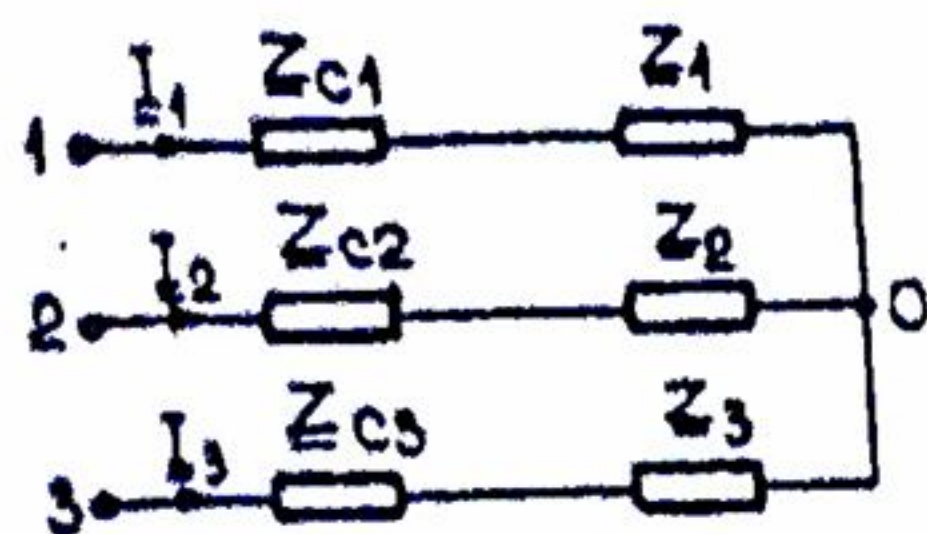


Fig. 5.79

Tensiunea de deplasare a nulului din circuitul echivalent

(fig. 5.79) este: 
$$\underline{U}_0 = U_f \frac{\underline{Y}_1 + a^2 \underline{Y}_2 + a \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

unde: 
$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_1}; \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_2}; \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_{c3} + \underline{Z}_3}.$$

Rezultă curenții de linie debitați de generator :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{10} - \underline{U}_0}{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_1}; \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20} - \underline{U}_0}{\underline{Z}_{c2} + \underline{Z}_2}; \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30} - \underline{U}_0}{\underline{Z}_{c3} + \underline{Z}_3}.$$

În funcție de tensiunile de linie ale generatorului  $\underline{U}_{12} = \sqrt{3} U_f e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} U_f \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right);$

$\underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{12}$  și  $\underline{U}_{31} = a \underline{U}_{12}$  se deduc tensiunile  $\underline{U}'$  din fig. 5.78 :

$\underline{U}_{12} + \underline{Z}_{c2} \underline{I}_2 - \underline{U}'_{12} - \underline{Z}_{c1} \underline{I}_1 = 0$  de unde :  $\underline{U}'_{12} = \underline{U}_{12} + \underline{Z}_{c2} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{c1} \underline{I}_1$  și analog:

$\underline{U}'_{23} = \underline{U}_{23} + \underline{Z}_{c3} \underline{I}_3 - \underline{Z}_{c2} \underline{I}_2$ ,  $\underline{U}'_{31} = \underline{U}_{31} + \underline{Z}_{c1} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{c3} \underline{I}_3$ .

Se revine la circuitul inițial reprezentat în fig. 5.77 și din sistemele de ecuații date de teoremele lui Kirchhoff

$$\begin{cases} \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = 0 \\ \underline{Z}'_1 \underline{I}'_1 - \underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 = \underline{U}'_{12} \\ \underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 - \underline{Z}'_3 \underline{I}'_3 = \underline{U}'_{23} \end{cases} \quad (5.189)$$

și :

$$\begin{cases} \underline{I}''_1 + \underline{I}''_2 + \underline{I}''_3 = 0 \\ \underline{Z}''_1 \underline{I}''_1 - \underline{Z}''_2 \underline{I}''_2 = \underline{U}'_{12} \\ \underline{Z}''_2 \underline{I}''_2 - \underline{Z}''_3 \underline{I}''_3 = \underline{U}'_{23} \end{cases} \quad (5.190)$$

rezultă curenții din fazele receptoarelor.

### 5.3.5 Circuite trifazate alimentate la tensiuni nesimetrice

Rezolvarea acestor circuite necesită, mai întâi, scrierea în complex a tensiunilor nesimetrice de linie, iar apoi, dacă receptorul este legat în triunghi, curenții se obțin direct, din legea lui Ohm.

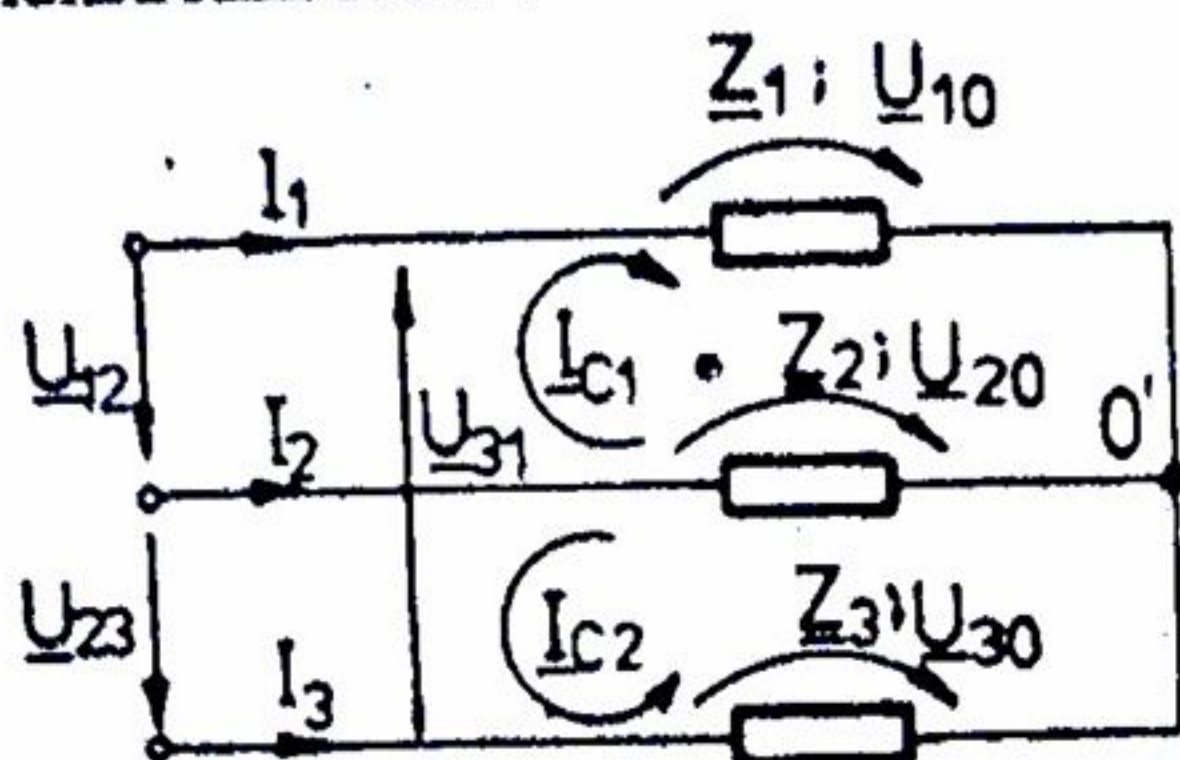
Dacă receptorul este legat în stea, curenții se obțin, fie direct, din teoremele lui Kirchhoff (5.189), fie calculând mai întâi tensiunile pe fazele stelei și apoi curenții, cu legea lui Ohm.

Tensiunile pe fazele stelei (fig. 5.80.a) se calculează cu relațiile :

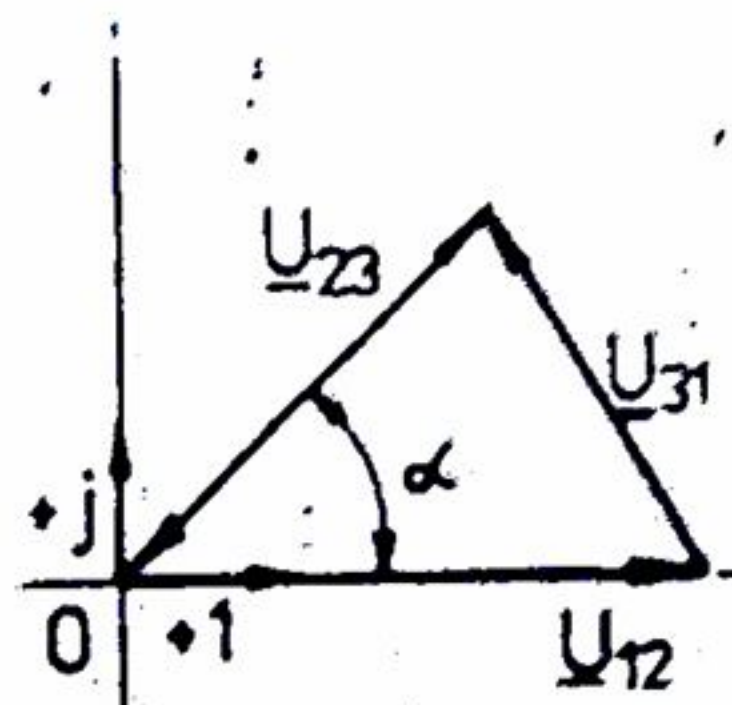


$$\begin{cases} \underline{U}'_{10} = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}'_{20} = \frac{\underline{U}_{23}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{12}\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}'_{30} = \frac{\underline{U}_{31}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \end{cases} \quad (5.191)$$

care se demonstrează astfel :



a



b.

Fig. 5.80)

Se scriu curenții din fazele circuitului

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}'_{10}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1 \underline{U}'_{10}; \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}'_{20}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2 \underline{U}'_{20} = \underline{Y}_2 (\underline{U}'_{10} - \underline{U}_{12}); \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}'_{30}}{\underline{Z}_3} = \underline{Y}_3 \underline{U}'_{30} = \underline{Y}_3 (\underline{U}'_{10} + \underline{U}_{31}), \quad a$$

căror sumă este nulă, deci:  $\underline{Y}_1 \underline{U}'_{10} + \underline{Y}_2 (\underline{U}'_{10} - \underline{U}_{12}) + \underline{Y}_3 (\underline{U}'_{10} + \underline{U}_{31}) = 0$  sau :

$$\underline{U}'_{10} = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \text{ iar prin permutări circulare ale indicilor se obțin și } \underline{U}'_{20} \text{ și } \underline{U}'_{30}.$$

Aplicație. În circuitul din fig. 5.80.a, se cunosc tensiunile  $\underline{U}_{12} = \underline{U}_{23} = 100V$ ,  $\underline{U}_{31} = 89,44V$  și impedanțele  $\underline{Z}_1 = 10\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = -j5\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = 6(9+j2)\Omega$ . Se cer curenții și puterile  $P, Q, S$  din circuit.

Soluția 1.

Se alege ca fază de referință tensiunea  $\underline{U}_{12} = U_{12} = 100V$ . Din fig. 5.80.b, rezultă:

$$\cos\alpha = \frac{U_{12}^2 + U_{23}^2 - U_{31}^2}{2U_{12}U_{23}} = 0,6; \sin\alpha = 0,8 \text{ și deci, tensiunile complexe :}$$

$$\underline{U}_{23} = 100(-0,6 - j0,8)V, \quad \underline{U}_{23} = (-60 - j80)V.$$

$$\text{Din relația } \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0 \text{ se obține } \underline{U}_{31} = (-40 + j80)V.$$

Tensiunile pe fazele receptorului (5.191) au valorile :

$$\underline{U}'_{10} = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Y}_2 - \underline{U}_{31}\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = (70 + j40)V; \quad \underline{U}'_{20} = \frac{\underline{U}_{23}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{12}\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = (-30 + j40)V;$$

$$\underline{U}'_{30} = \frac{\underline{U}_{31}\underline{Y}_1 - \underline{U}_{23}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = (30 + j120)V \quad \text{unde: } \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{10}; \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = j\frac{1}{5};$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{6(9 + j2)}.$$



Se obțin curenții din fazele receptorului:  $\underline{I}_1' = \frac{\underline{U}_{10}'}{\underline{Z}_1} = 7 + j4$ ;  $I_1 = 8,06A$ ;

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{20}'}{\underline{Z}_2} = -8 - j6$$
;  $I_2 = 10A$ ;  $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{30}'}{\underline{Z}_3} = 1 + j2$ ;  $I_3 = 2,24A$ .

Ca verificare:  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ .

Se calculează puterile receptorului  $P = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 = 10 \cdot 8,06^2 + 54 \cdot 2,24^2 = 920W$ ;

$$Q = X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 = -5 \cdot 10^2 + 12 \cdot 2,24^2 = -440VAr$$
;  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1020VA$ .

Soluția 2. Se transfigurează steaua (fig.5.80) în triunghi (fig.5.81):

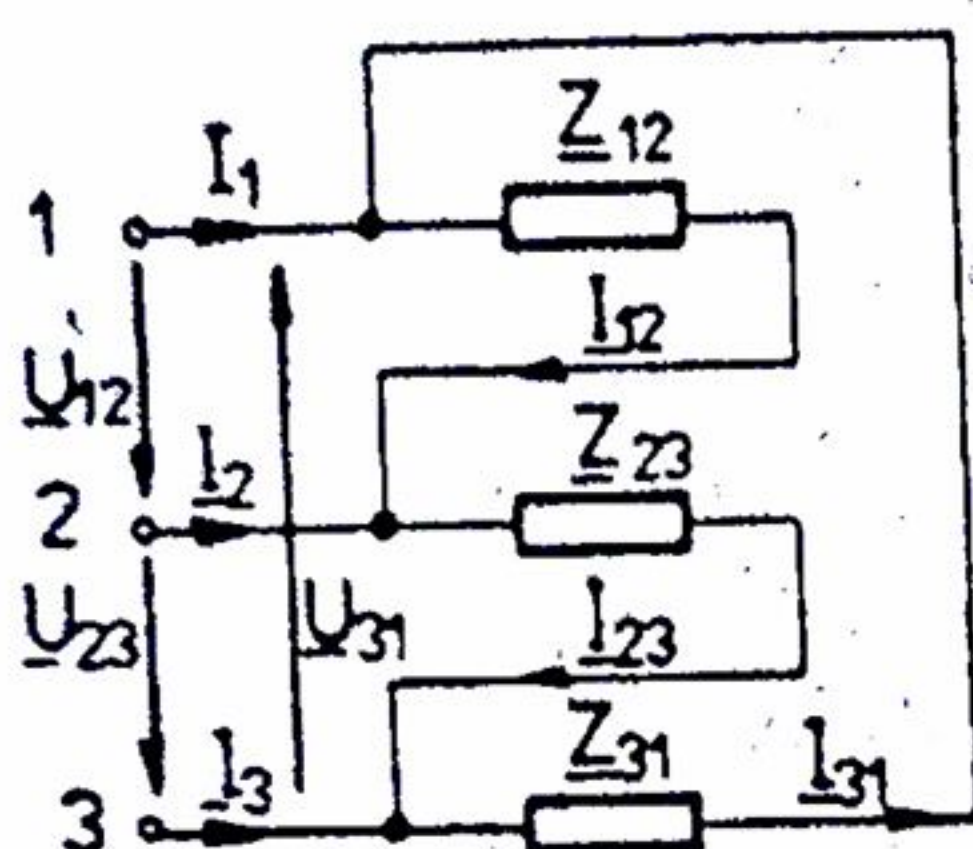


Fig.5.81

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1};$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}.$$

Cu tensiunile complexe din soluția 1 se calculează

$$\text{curenții din fazele tringhiului } \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}};$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}, \text{ apoi se deduc curenții de linie } \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}.$$
 Puterea complexă se poate calcula cu relația:

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} \underline{I}_{31}^* = P + jQ$$

Soluția 3.

Cu tensiunile complexe din soluția 1, se formează sistemul de ecuații date de teoremele lui Kirchhoff  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ ,  $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{U}_{12}$ ;  $\underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = \underline{U}_{23}$  din care rezultă curenții de linie.

Soluția 4.

Cu tensiunile complexe din soluția 1 se calculează curenții de contur  $\underline{I}_{C1}$  și  $\underline{I}_{C2}$  (fig.5.80.a):  $\underline{I}_{C1}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{I}_{C2} \underline{Z}_2 = -\underline{U}_{12}$ ;  $\underline{I}_{C1} \underline{Z}_2 + \underline{I}_{C2}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \underline{U}_{23}$ .

Se obțin soluțiile:  $\underline{I}_{C1} = 7 + j4$ ;  $\underline{I}_{C2} = 1 + j2$ . Rezultă curenții:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{C1}; \underline{I}_2 = -\underline{I}_{C1} - \underline{I}_{C2}; \underline{I}_3 = \underline{I}_{C1}.$$

### 5.3.6 Metoda componentelor simetrice

Sistemele trifazate nesimetrice de tensiuni sau curenți se pot descompune în trei sisteme trifazate simetrice, numite: sistem direct (de succesiune directă), sistem invers (de succesiune inversă) și sistem homopolar (trei mărimi sinusoidale, în fază și cu amplitudini egale) și reprezentate în fig.5.82.a. În fig.5.82.b se prezintă un montaj pentru măsurarea



tensiunilor homopolare ( $\underline{V}_h$ ), directă ( $\underline{V}_d$ ) și inversă ( $\underline{V}_i$ ), precum și curentul homopolar ( $\underline{A}_h$ ).

Dacă cele trei sisteme simetrice sunt cunoscute (fig.5.82), atunci se poate determina sistemul nesimetric :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i; \underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i; \underline{U}_3 = \underline{U}_h + a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i \quad (5.192)$$

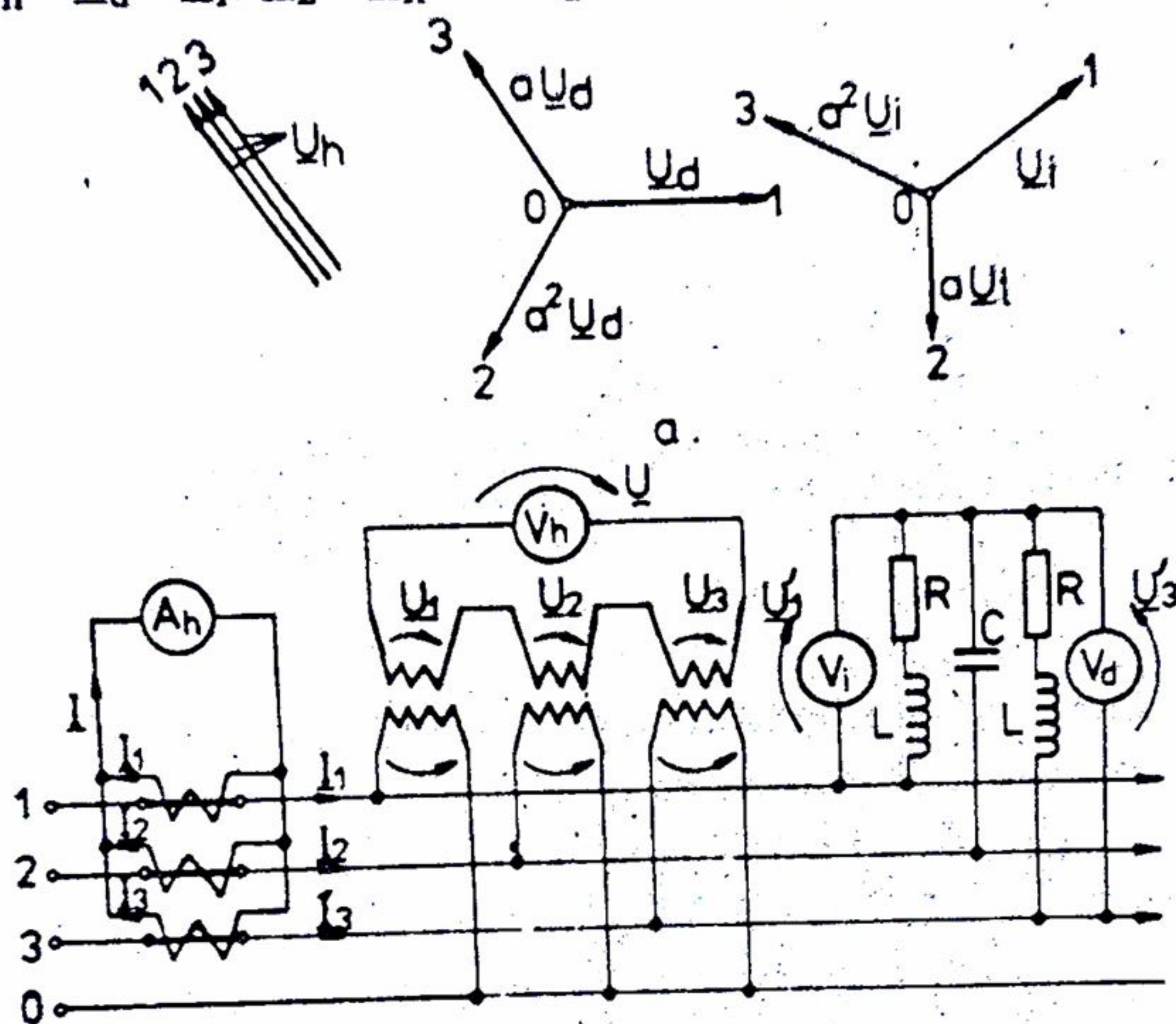


Fig.5.82

Relații similare se pot scrie și pentru curenți și impedanțe

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i; \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i; \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i \quad (5.193)$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i; \underline{Z}_2 = \underline{Z}_h + a^2 \underline{Z}_d + a \underline{Z}_i; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_h + a \underline{Z}_d + a^2 \underline{Z}_i \quad (5.194)$$

Dacă se cunosc componentele sistemului nesimetric, rezultă componentele simetrice, rezolvând sistemul (5.192) în raport cu  $\underline{U}_h, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ :

$$\underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3); \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + a^2 \underline{U}_3); \underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + a \underline{U}_3) \quad (5.195)$$

Relații similare se pot scrie și pentru curenți și impedanțe:

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3); \underline{I}_d = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + a^2 \underline{I}_3); \underline{I}_i = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + a \underline{I}_3),$$

$$\underline{Z}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3); \underline{Z}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a \underline{Z}_2 + a^2 \underline{Z}_3); \underline{Z}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2 \underline{Z}_2 + a \underline{Z}_3), \quad (5.196)$$

Dacă raportul  $\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_d}$  (raportul de disimetrie) și  $\frac{\underline{U}_h}{\underline{U}_d}$  (raport de asimetrie) sunt, simultan, mai



mici de 5%, sistemului se consideră, practic, simetric; în caz contrar, sistemul este nesimetric.

Puterea aparentă complexă într-un sistem nesimetric

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = P + jQ \quad (5.197)$$

poate fi scrisă în funcție de componentele simetrice ale tensiunilor de fază (5.192) și de componentele simetrice ale curenților conjugați (cu  $a^* = a^2$ ;  $a^{2*} = a$ ;  $a^3 = 1$ ;  $a^4 = a$ ;  $1 + a^2 + a = 0$ ):

$$\underline{I}_1^* = \underline{I}_h^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*; \underline{I}_2^* = \underline{I}_h^* + a \underline{I}_d^* + a^2 \underline{I}_i^*; \underline{I}_3^* = \underline{I}_h^* + a^2 \underline{I}_d^* + a \underline{I}_i^* \quad (5.198)$$

Introducând componentele (5.192) și (5.198) în expresia puterii (5.197), se obține:

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i^* = P + jQ \quad (5.199)$$

Puterea activă P și reactivă Q sunt:

$$P = 3 U_h I_h \cos \varphi_h + 3 U_d I_d \cos \varphi_d + 3 U_i I_i \cos \varphi_i; \quad (5.200)$$

$$Q = 3 U_h I_h \sin \varphi_h + 3 U_d I_d \sin \varphi_d + 3 U_i I_i \sin \varphi_i \quad (5.201)$$

unde  $\varphi_h$ ,  $\varphi_d$  și  $\varphi_i$  sunt dezavantajele impedanțelor de calcul ("homopolară directă" și "inversă"), în funcție de impedanțele inegale ale receptorului (5.196).

Se admite circuitul din fig. 5.83. a, la care se scriu teoremele lui Kirchhoff:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_0 = 3 \underline{I}_h; \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_0 3 \underline{I}_h \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_0 3 \underline{I}_h; \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{Z}_0 3 \underline{I}_h \end{cases}$$

În ultimele trei ecuații se introduc (5.192), (5.193) și (5.194). Rezultă:

$$\underline{U}_h = (3 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_h) \underline{I}_h + \underline{Z}_i \underline{I}_d + \underline{Z}_d \underline{I}_i \quad (5.202)$$

$$\underline{U}_d = \underline{Z}_d \underline{I}_h + \underline{Z}_h \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i; \underline{U}_i = \underline{Z}_i \underline{I}_h + \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{Z}_h \underline{I}_i$$

Dacă  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ , relațiile (5.196) devin:  $\underline{Z}_h = \underline{Z}$ ,  $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = 0$ , iar din (5.202)

rezultă:  $\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z} + 3 \underline{Z}_0}; \underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}}; \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} \quad (5.203)$

Pentru rezolvarea circuitelor electrice dezechilibrate, cu receptoare legate în stea, alimentate la tensiuni nesimetrice, folosind metoda componentelor simetrice, se parcurg următoarele etape: se determină componentele simetrice ale sistemului de tensiuni cu relația (5.195) și ale impedanțelor de calcul (5.196), se deduc valorile componentelor simetrice ale curenților din sistemul (5.202), se calculează curenți reali din fazele receptorului folosind (5.193), apoi se calculează puterile cu relațiile (5.197) și (5.199), una din acestea reprezentând relația de verificare.

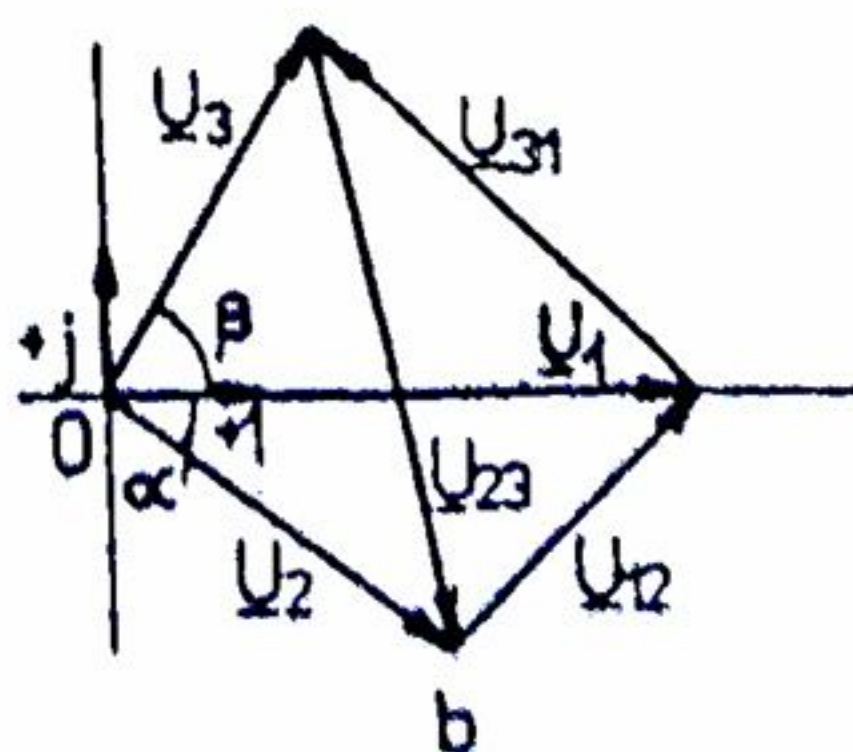
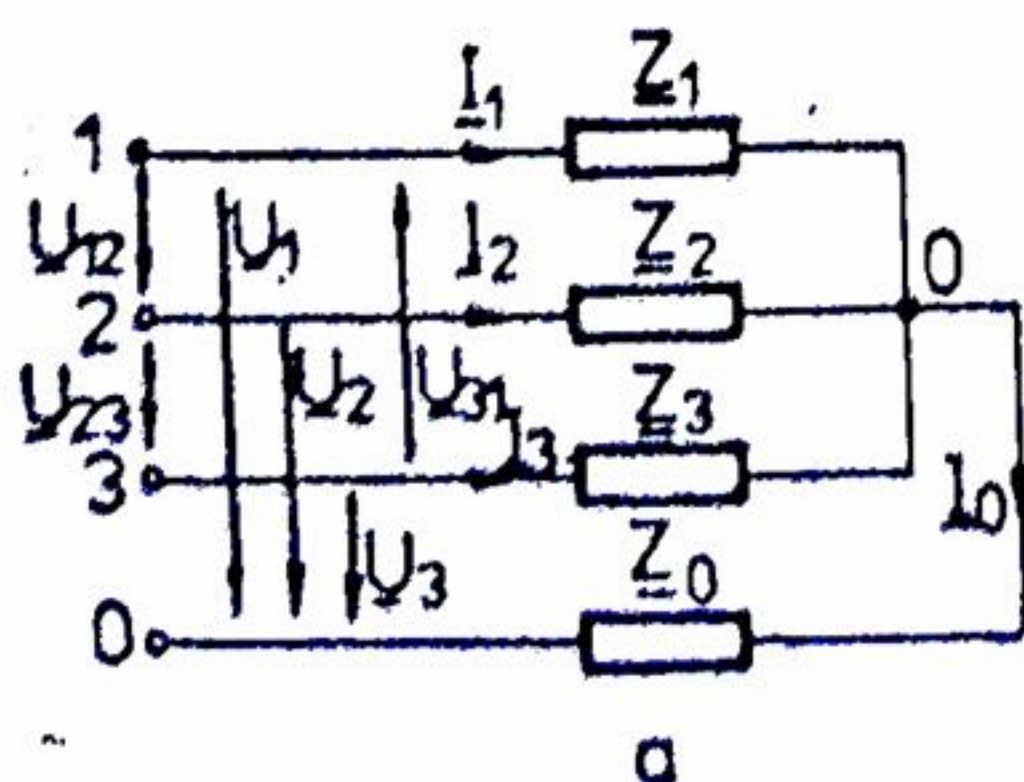


Fig. 5.83

Aplicația 1. Să se rezolve rezolve circuitul din fig. 5.83. a, la care se cunosc tensiunile de linie  $U_{12} = 128 \text{ V}$ ,  $U_{23} = 206,2 \text{ V}$ , tensiunile de fază  $U_1 = 260 \text{ V}$ ,  $U_2 = 179 \text{ V}$ ,  $U_3 = 123 \text{ V}$ , impedanțele receptorului, .



$\underline{Z}_1 = (30 + j40)\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = (50 - j40)\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = (6 - j20)\Omega$  și impedanța conductorului de nul,  $\underline{Z}_0 = 10\Omega$ .

Pentru a rezolva circuitul se deduc mai întâi expresiile complexe ale tensiunii de fază, luându-se ca fazor de referință tensiunea  $\underline{U}_1$  (fig.5.83.b). Rezultă :

$$\cos\alpha = \frac{U_1^2 + U_2^2 - U_{12}^2}{2U_1U_2} = 0,895, \quad \cos\beta = \frac{U_1^2 + U_3^2 - U_{31}^2}{2U_1U_3} = 0,537, \quad \sin\alpha = 0,447,$$

$\sin\beta = 0,845$  și deci, tensiunile complexe de fază :

$$\underline{U}_1 = U_1 = 260V; \underline{U}_2 = 179(0,895 - j0,447) = (160 - j80)V;$$

$$\underline{U}_3 = 123(0,537 + j0,845) = (66 + j104)V;$$

Soluția 1. (metoda componentelor simetrice):

- Se află componentele simetrice ale tensiunilor de fază :

$$\underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) = (162 + j8)V; \quad \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) = (102,1 + j23,1)V;$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3) = (-4,1 - j31,1)V.$$

- Se determină impedanțele de calcul :

$$\underline{Z}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = (28,67 - j6,66)\Omega; \quad \underline{Z}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) = (6,43 + j36)\Omega;$$

$$\underline{Z}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) = (-5,1 + j10,66)\Omega.$$

- Se află componentele simetrice ale curenților din sistemul (5.202) și rezolvând sistemul se obțin valorile componentelor simetrice ale curenților:  $\underline{I}_h = 0,33A$ ;  $\underline{I}_d = (2,49 - j0,27)A$ ;  $\underline{I}_i = (0,18 - j3,73)A$ ;

- Se calculează curenții reali :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3 + j4; I_1 = 5A \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i = 2A \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i = -4 + j4; I_3 = 4\sqrt{2}A \\ \underline{I}_0 = 3\underline{I}_h = I_1 + I_2 + I_3 = I_0 = 1A \end{cases}$$

- Se calculează puterile  $\underline{S} = 3(\underline{U}_h\underline{I}_h^* + \underline{U}_d\underline{I}_d^* + \underline{U}_i\underline{I}_i^*) = 1420 - j1880P = 1420W$ ;  $Q=1880VAR$ ,  $S = 2360VA$ .

Se verifică (5.200) și (5.201):  $P = 3(U_h I_h \cos\varphi_h + U_d I_d \cos\varphi_d + U_i I_i \cos\varphi_i) = 1420W$ .



$$Q = 3(\underline{U}_h \underline{I}_h \sin \varphi_h + \underline{U}_d \underline{I}_d \sin \varphi_d + \underline{U}_i \underline{I}_i \sin \varphi_i) = -1880 \text{ VA unde: } \varphi_h = \arctg \frac{-6,66}{28,67} = (-13^\circ 5');$$

$$\varphi_d = \arctg \frac{36}{6,43} = 79^\circ 50'; \quad \varphi_i = \arctg \frac{10,66}{-5,1} = 115^\circ 30'.$$

Soluția 2 (moda teoremelor lui Kirchhoff) :

- Se formează sistemul (fig.5.83.a):  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_0 = 0$ ,  $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = \underline{U}_1$ ;  $\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = \underline{U}_2$ ;  $\underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = \underline{U}_3$ , în care se introduc valorile cunoscute și din care se obțin aceleași rezultate ca și la soluția 1. Apoi :

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = 1420 - j1880.$$

Aplicația 2. Receptorul din fig.5.83.a, are impedanța pe fiecare fază  $\underline{Z} = (30-j40)\Omega$  și impedanța conductorului de nul  $\underline{Z}_0 = 10\Omega$ . Sistemul de tensiuni este nesimetric:  $\underline{U}_1 = 280\text{V}$ ,  $\underline{U}_2 = 227\text{V}$ ,  $\underline{U}_3 = 76,3\text{V}$ ,  $\underline{U}_{12} = 475\text{V}$ ,  $\underline{U}_{23} = 330\text{V}$ ,  $\underline{U}_{31} = 212\text{V}$ .

Să se afle curenții  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_0$  prin metoda componentelor simetrice.

Se alege  $\underline{U}_1$  faza de referință și parcurgând aceleași etape de calcul ca în aplicația 1 se obțin tensiunile de fază complexe:  $\underline{U}_1 = U_1 = 280\text{V}$ ;  $\underline{U}_2 = (-170-j150)\text{V}$ ;  $\underline{U}_3 = (70+j30)\text{V}$  cu componentele simetrice  $\underline{U}_h = (60-j40)\text{V}$ ;  $\underline{U}_d = (144,66-j49,33)\text{V}$ ;  $\underline{U}_i = (75,33+j89,33)\text{V}$ .

Se calculează componentele simetrice ale curenților cu (5.203):

$$\underline{I}_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_0} = 1\text{A}; \quad \underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}} = 2,52 + j1,73; \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}} = -0,52 + j2,27.$$

Cu (5.193) se obțin curenții:  $\underline{I}_1 = 3+j4\text{A}$ ;  $\underline{I}_1^* = 5\text{A}$ ;  $\underline{I}_2 = -j5\text{A}$ ;  $\underline{I}_2^* = 5\text{A}$ ;  $\underline{I}_3 = j$ ;  $\underline{I}_3^* = 1\text{A}$ ;  $\underline{I}_0 = 3\underline{I}_h = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\text{A}$ .

Aplicația 3. Să se rezolve prin metoda componentelor simetrice circuitul din fig.5.84.a, la care se cunosc  $\underline{U}_{12} = 30\sqrt{41}\text{V}$ ,  $\underline{U}_{23} = 210\text{V}$ ,  $\underline{U}_{31} = 30\sqrt{34}\text{V}$ ,  $\underline{U}_1 = 210\text{V}$ ,  $\underline{U}_2 = 60\sqrt{5}\text{V}$ ,  $\underline{U}_3 = 30\sqrt{13}\text{V}$ ,  $R = 50\Omega$ ,  $X_L = 40\Omega$ ,  $X_C = 30\Omega$ ,  $R_0 = 20\Omega$ .

Alegând ca fazor de referință tensiunea  $\underline{U}_1$  (fig.5.84.b), rezultă :

$$\cos \alpha = \frac{\underline{U}_1^2 + \underline{U}_2^2 - \underline{U}_{12}^2}{2\underline{U}_1 \underline{U}_2} = 0,447, \quad \cos \beta = \frac{\underline{U}_1^2 + \underline{U}_3^2 - \underline{U}_{13}^2}{2\underline{U}_1 \underline{U}_3} = 0,553, \quad \sin \alpha = 0,894,$$

$$\sin \beta = 0,83,$$

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = U_1 = 210\text{V} \\ \underline{U}_2 = U_2 (\cos \alpha - j \sin \alpha) = (60 - j120)\text{V} \\ \underline{U}_3 = U_3 (\cos \beta - j \sin \beta) = (60 + j90)\text{V} \end{cases}$$

- Se determină componentele simetrice ale tensiunilor :



$$\begin{cases} \underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) = (110 - j10) \text{ V} \\ \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) = (50 + 35\sqrt{3} + j5) \text{ V} \\ \underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3) = (50 - 35\sqrt{3} + j5) \text{ V} \end{cases}$$

Ca verificare:  $\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 210 \text{ V}$ . Se determină impedanțele de calcul:

$$\begin{cases} \underline{Z}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \frac{10}{3}(5 + j)\Omega \\ \underline{Z}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) = \frac{5}{3}(10 - 7\sqrt{3} - j)\Omega \\ \underline{Z}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) = \frac{5}{3}(10 + 7\sqrt{3} - j)\Omega \end{cases}$$

unde:  $\underline{Z}_1 = R = 50\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = jX_L = j40\Omega$ ,  $\underline{Z}_3 = -jX_C = -j30\Omega$ .

Ca verificare:  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i = 50\Omega$ .

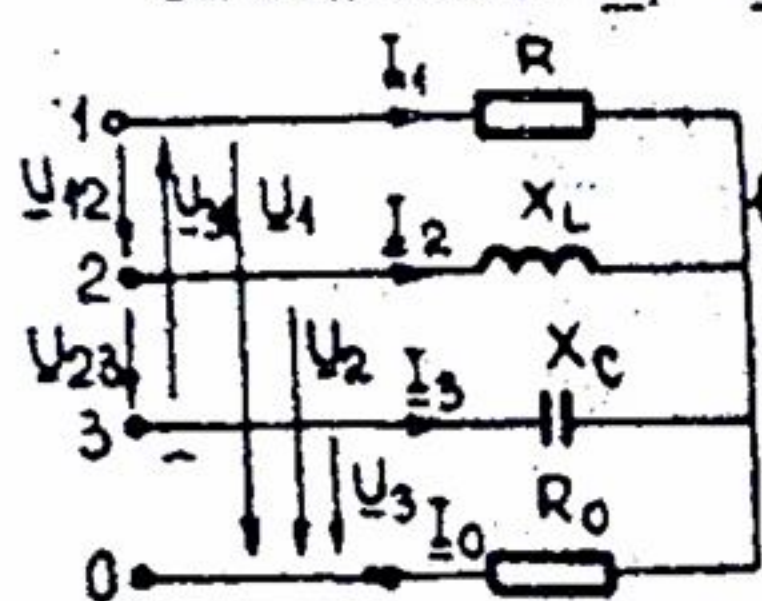
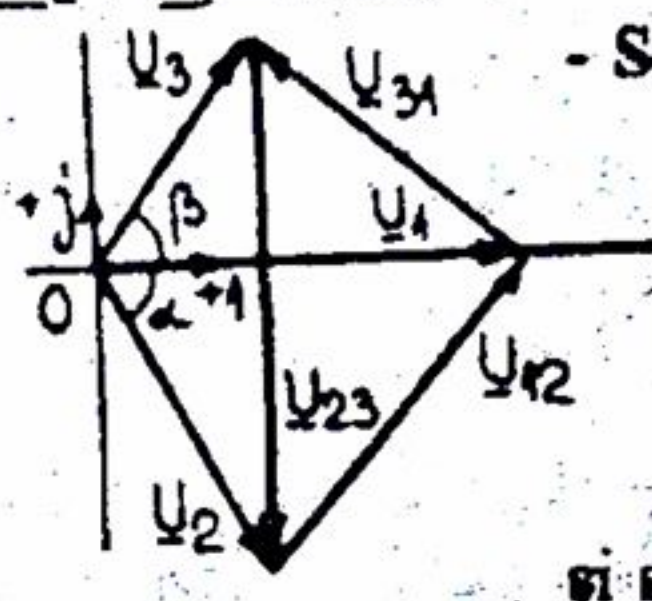


Fig. 5.84



- Se rezolvă sistemul (5.202)

$$\begin{cases} \underline{U}_h = (3R_0 + \underline{Z}_h)\underline{I}_h + \underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{Z}_i\underline{I}_i \\ \underline{U}_d = \underline{Z}_d\underline{I}_h + \underline{Z}_h\underline{I}_d + \underline{Z}_i\underline{I}_i \\ \underline{U}_i = \underline{Z}_i\underline{I}_h + \underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{Z}_h\underline{I}_i \end{cases}$$

și se obțin componentele simetrice ale curenților:  $\underline{I}_h = 1 \text{ A}$ ,  $\underline{I}_d = (1 + \sqrt{3}) \text{ A}$ ,  $\underline{I}_i = (1 - \sqrt{3}) \text{ A}$ .

- Se calculează curenții

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3 \text{ A} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i = -j3 \text{ A} \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i = j3 \text{ A} \\ \underline{I}_0 = 3\underline{I}_h = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3 \text{ A} \end{cases}$$

Se determină puterile  $\underline{S} = 3(\underline{U}_h\underline{I}_h^* + \underline{U}_d\underline{I}_d^* + \underline{U}_i\underline{I}_i^*) = 1260 \text{ VA}$ : deci  $P = 1260 \text{ W}$ ,  $Q = 0$ ,  $S = 1260 \text{ VA}$

## 5.4 CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM DEFORMANT

Mărimile electrice alternative pot avea și forme de variație nesinusoidale, cauzate, fie de neliniaritatea elementelor de circuit (transformatoare cu miezuri saturate, dispozitive redresoare etc.), fie chiar și generatoarele rotative, care nu produc tensiuni de



formă perfect sinusoidală (conductoarele sunt atașate discontinuu în creștăturile indusului, inducția magnetică este repartizată neuniform în interier etc.). Regimul periodic de funcționare a circuitelor electrice cu tensiuni sau curenți nesinusoidali se numește regim deformant. Regimul deformant este cauza unor efecte dăunătoare în electrocomunicații, dar nedăunătoare în electroenergetică (aparitia unor cupluri parazite la mașinile electrice, creșterea pierderilor în rețelele electrice, scăderea factorului de putere  $\cos\varphi$ , apariția rezonanței de tensiune pe anumite armonici superioare-cu frecvențe superioare-și străpungerea cablurilor, creșterea erorilor de indicare la aparatele electrice de măsurat etc.).

#### 5.4.1 Mărimile electrice nesinusoidale

Pe baza teoremei superpoziției tensiunea nesinusoidală poate fi descompusă într-o serie Fourier de forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (5.204)$$

unde  $U_0$  este componenta continuă a tensiunii, care nu produce curent electric în circuit ( $I_0=0$ ) în cazul circuitelor cu condensatoare, iar  $N$  este numărul de armonice, stabilit, practic, la 1,2,3... pe baza neglijării armonicilor nesemnificative, de ordin superior lui  $N$ . Armonica de ordin  $k=1$  se numește fundamentală. Fiecare componentă sinusoidală,

$$u_k = \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \gamma_k), \quad (5.205)$$

produce câte un curent sinusoidal

$$i_k = \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_k - \varphi_k), \quad (5.206)$$

iar  $\gamma_k$  este faza inițială a tensiunii pentru armonica de ordin  $k$ , iar  $\varphi_k$  este defazajul curentului pentru armonica de ordin  $k$ .

Similar cu (5.204) se poate scrie curentul din circuit :

$$i(t) = I_0 + \sum i_k \quad (5.207)$$

unde  $i_k$  este calculat cu (5.206).

Impedanța circuitului pentru armonica de ordin  $k$  (circuit R-L-C, serie) este:

$$Z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2} \quad (5.208)$$

cu defazajul :

$$\varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R}. \quad (5.209)$$

Valoarea efectivă a tensiunii nesinusoidale este prin definiție :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \sqrt{U_0^2 + \sum U_k^2} \quad (5.210)$$

și în mod similar pentru curent:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_0^2 + \sum I_k^2} \quad (5.211)$$



unde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  este perioada mărimilor  $u$  și  $i$ .

Puterea activă  $P$  a unui circuit alimentat la tensiunea deformantă  $u$  și curentul la borne  $i$  (cu  $p=ui$ ) este

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^N U_k I_k \cos \varphi_k \quad (2.212)$$

La aceleași circuit puterea reactivă  $Q$  și puterea aparentă  $S$  sunt definite de expresiile

$$Q = \sum_{k=1}^N U_k I_k \sin \varphi_k \quad (2.213)$$

$$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + \sum U_k^2)(I_0^2 + \sum I_k^2)} \quad (2.214)$$

În regimul deformat mărimea

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (5.215)$$

se numește putere deformantă și se măsoară în VAd (volt-amper-deformant) mărime introdusă de C. Budeanu (1886-1959).

Dacă în (5.220) se introduc expresiile (5.212) și (5.213) și (5.214), se obține forma dezvoltată a puterii deformante :

$$D = \sqrt{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)]} \quad (5.216)$$

unde  $\varphi_m$  și  $\varphi_n$  sunt defazajele între  $U_m$  și  $I_m$ , respectiv, între  $U_n$  și  $I_n$ .

Factorul de putere în regim deformat este definit de relația

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \leq \cos \varphi \quad (5.217)$$

Caracterizarea formei mărimile deformante se face cu :

- coeficientul de distorsiune

$$K_d = \sqrt{\frac{1 - I_1^2}{(I^2 - I_0^2)}} \quad (5.218)$$

cu valoarea  $0 \leq K_d \leq 0,05$  în regim sinusoidal și  $K_d > 0,05$  în regim deformat;

-coeficientul (factorul) de vârf

$$K_v = \frac{I_{\max}}{I} \quad (5.219)$$

cu valoarea  $K_v = \sqrt{2}$  în regim sinusoidal și  $K_v < \sqrt{2}$  în regim deformat;

- coeficient (factorul) de formă

$$K_f = \frac{I}{I_{\text{med}}} \quad (5.220)$$

unde:  $I_{\text{med}} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} i dt$ , iar  $t_0$  este momentul în care  $i$  trece prin zero cu valori



crescătoare. În regim sinusoidal  $K_f = 1,11$ ; iar în regim deformant,  $K_f < 1,11$ .

Rezonanța în regim deformant, pentru o armonică de ordin  $k$ , are loc dacă este îndeplinită condiția

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C}, \text{ sau } \omega_0 = \frac{1}{k\sqrt{LC}} \quad (5.221)$$

#### 5.4.2 Rezolvarea circuitelor electrice monofazate, liniare, aflate în regim deformant

Cunoscând tensiunile nesinusoidale descompuse în serii Fourier, cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff (sau a altor metode) se calculează curentul de aceeași frecvență cu armonica de tensiune. Pe baza principiului superpoziției se calculează curenții din circuit, ca sume ale componentelor armonice ale curenților respectivi :

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_k - \varphi_k) \quad (5.222)$$

unde  $I_0$  este nul dacă circuitul (latura) conține condensatoare.

După calculul curenților se efectuează bilanțul puterilor cu (5.212)... (5.215).

Dacă tensiunile sunt cunoscute numai în forma grafică (la osciloscop, de exemplu), atunci aceste tensiuni se aproximează la forme particulare, apropiate de forma reală și se descompun în serii Fourier, cunoscute (fig.5.85) :

- De exemplu, pentru forma de variația trapez (fig.5.86.a) se poate scrie :

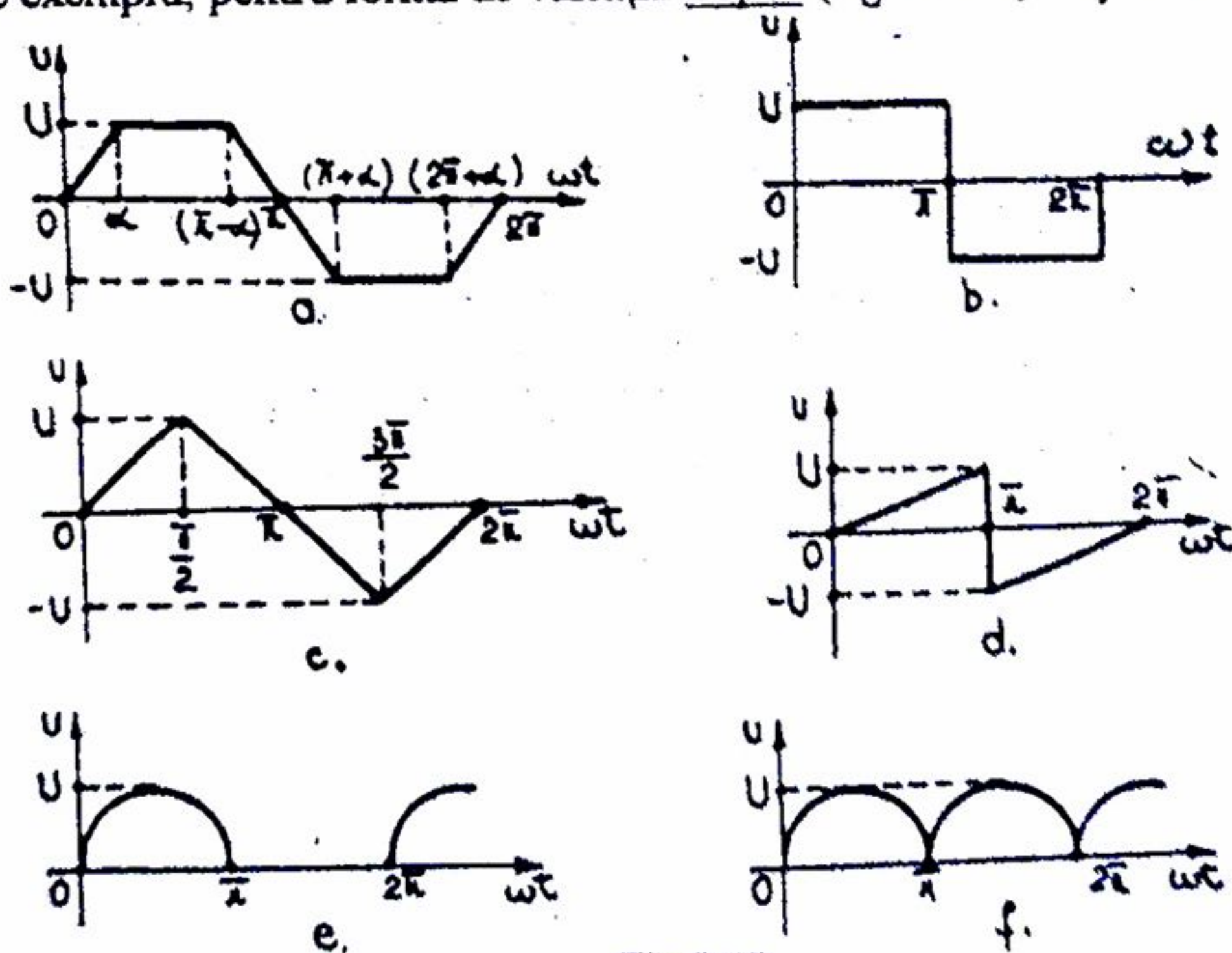


Fig.5.85

$$u(t) = \frac{4U}{\pi\alpha} \sum \frac{\sin k\alpha}{k^2} \sin k\omega t; k=1,3,5,7,\dots$$

sau

$$u(t) = \frac{4U}{\pi\alpha} \left( \frac{\sin \alpha}{1^2} \sin \omega t + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{\sin 5\alpha}{5^2} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (5.223)$$

- Dacă în (5.223) se introduce  $\alpha = 0$  (cu  $\frac{\sin k\alpha}{k\alpha} = 1$ ) se obține seria Fourier pentru



variația dreptunghi (fig.5.85.b):  $u = \frac{4U}{\pi} \sum \frac{\sin k\omega t}{k}; k = 1, 3, 5, 7, \dots$  sau, în forma

$$\text{dezvoltată: } u = \frac{4U}{\pi} \left( \frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) \quad (5.224)$$

- Dacă în (5.223) se introduce  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  se obține seria Fourier pentru variația triunghi

isoscel (fig.5.85.c):  $u = \frac{8U}{\pi^2} \sum \frac{\sin k\omega t}{k^2}; k = 1, 3, 5, 7, \dots$  sau, în formă dezvoltată:

$$u = \frac{8U}{\pi^2} \left( \frac{\sin \omega t}{1^2} - \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\omega t}{5^2} - \dots \right) \quad (5.225)$$

- Pentru forma de variație triunghi dreptunghi (fig.5.85.d) seria Fourier este

$$u = \frac{2U}{\pi} \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\omega t; k = 1, 2, 3, 4, \dots \text{ sau, forma dezvoltată}$$

$$u = \frac{2U}{\pi} \left( \frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right) \quad (5.226)$$

- Pentru semisinusoidă (undă de redresare monoalternanță) (fig.5.85.e) seria Fourier

$$\text{este: } u = U \left[ \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos 2k\omega t}{(2k)^2 - 1}; k = 1, 2, 3, \dots \right] \text{ sau, forma dezvoltată:}$$

$$u = U \left( \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \omega t}{2} - \frac{2 \cos 2\omega t}{1 \cdot 3 \cdot \pi} - \frac{2 \cos 4\omega t}{3 \cdot 5 \cdot \pi} - \dots \right) \quad (5.227)$$

- Pentru dublă semisinusoidă (undă de redresare dublă alternanță) (fig.5.85.f) seria

$$\text{Fourier este } u = U \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\cos 2k\omega t}{(2k)^2 - 1}; k = 1, 2, 3, \dots \right] \text{ sau, în forma dezvoltată}$$

$$u = \frac{2U}{\pi} \left( 1 - \frac{2 \cos 2\omega t}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4\omega t}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6\omega t}{5 \cdot 7} - \dots \right) \quad (5.228)$$

Având tensiunile nesinusoidale aplicate circuitului, descompuse în serii Fourier, cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff (sau a altor metode) se calculează curentul de aceeași frecvență cu armonica de tensiune. Pe baza principiului superpoziției se calculează curenții din circuit, ca sume ale componentelor armonice ale curenților respectivi:

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^N \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_k - \varphi_k), \quad (5.229)$$

unde  $I_0$  este nul dacă circuitul (latura) conține condensatoare. După calculul curenților se efectuează bilanțul puterilor (5.212)...(5.214).



Aplicația 1. Să se rezolve circuitul serie :  $R = 24\Omega$ ,  $X_L = 4\Omega$ ,  $X_C = 36\Omega$ , alimentat la tensiunea :  $u = 80\sqrt{2} \sin \omega t + 24\sqrt{2} \sin(3\omega t + 30^\circ) + 12\sqrt{2} \sin(6\omega t - 45^\circ)$ .

- Se calculează impedanțele și defazajele armonicelor 1 (fundamentala) și 3:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 40\Omega, \quad Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right)^2} = 24\Omega.$$

- La armonica 3 se constată rezonanța armonică ( $3X_L = \frac{X_C}{3}$ ). Impedanța

armonicii 6 este :  $Z_6 = \sqrt{R^2 + \left(6\omega L - \frac{1}{6\omega C}\right)^2} = 30\Omega.$

- Rezultă defazajele:  $\varphi_1 = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = -53^\circ$ ;  $\varphi_3 = \arctg \frac{3X_L - \frac{X_C}{3}}{R} = 0$ ;

$$\varphi_6 = \arctg \frac{6X_L - \frac{X_C}{6}}{R} = 36^\circ 50'.$$

- Se calculează curentul nesinusoidal din circuit ca sumă a componentelor armonice:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = 2A, \quad I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = 1A, \quad I_6 = \frac{U_6}{Z_6} = 0,4A,$$

$$i_1 = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ), \quad i_3 = 2 \sin(3\omega t + 30^\circ), \quad i_6 = 0,4\sqrt{2} \sin(6\omega t - 81^\circ 50'), \quad i = i_1 + i_3 + i_6,$$

$$i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) + \sqrt{2} \sin(3\omega t + 30^\circ) + 0,4\sqrt{2} \sin(6\omega t - 81^\circ 50').$$

- Se determină valorile efective ale tensiunii și curentului:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_6^2} = 84,5V, \quad I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_6^2} = 2,28A.$$

- Se calculează puterile  $P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_6 I_6 \cos \varphi_6 = 110W$ ,

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 + U_6 I_6 \sin \varphi_6 = -112VAr, \quad S = UI = 192VA,$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 118VAd.$$

- Factorul de putere este :  $K = \frac{P}{S} = 1.57$

- Coeficientul de distorsiune este :  $K_d = \sqrt{1 - \frac{I_1^2}{I^2}} = 0,575.$

Aplicația 2. Să afle prin metoda simbolică curenții și puterile consumate din circuitul din fig.5.86 în care :



$R_1 = R_2 = 5\Omega$ ,  $\omega L_1 = \omega L_3 = 10\Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_1} = 5\Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_3} = 15\Omega$ , iar tensiunea nesinusoidală

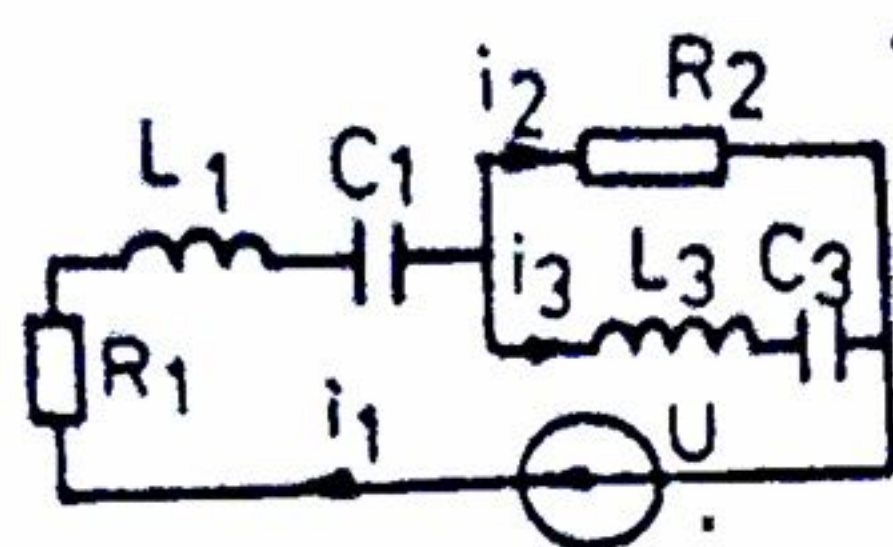


Fig. 5.86

este  $u = 125\sqrt{2}\sin\omega t + 94\sqrt{2}\sin(3\omega t - 30^\circ)$ , cu:  $U_1 = 125V$

și  $U_3 = 94V$ ;  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = -30^\circ$ .

- Pentru armonica întâi rezultă

$$\underline{Z}_e = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) + \frac{R_2 j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right)}{R_2 + j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right)} = 7,5 - j2,5$$

$$\underline{I}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_e} = 15 + j5 = 5\sqrt{10}e^{j18^\circ 20'}, \underline{U}_{AB1} = \underline{I}_{11} \frac{R_2 j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right)}{R_2 + j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}\right)} = 25(2 - j),$$

$$\underline{I}_{21} = \frac{\underline{U}_{AB1}}{R_2} = 5(2 - j) = 5\sqrt{5}e^{-j26^\circ 30'}, \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{AB1}}{\underline{Z}_3} = 5(1 + j2) = 5\sqrt{5}e^{j26^\circ 30'},$$

$$\begin{cases} i_{11} = \sqrt{2}I_{11}\sin(\omega t - \varphi_{11}) = 10\sqrt{5}\sin(\omega t - 18^\circ 20') \\ i_{21} = \sqrt{2}I_{21}\sin(\omega t - \varphi_{21}) = 5\sqrt{10}\sin(\omega t + 26^\circ 30') \\ i_{31} = \sqrt{2}I_{31}\sin(\omega t - \varphi_{31}) = 5\sqrt{10}\sin(\omega t - 26^\circ 30') \end{cases}$$

- Pentru armonica a treia se obține :

$$\underline{Z}_e = R_1 + j\left(3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1}\right) + \frac{R_2 j\left(3\omega L_3 - \frac{1}{3\omega C_3}\right)}{R_2 + j\left(3\omega L_3 - \frac{1}{3\omega C_3}\right)} = 10 + j29$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_e} = \frac{94}{10 + j29} = 1 - j2,9 = 3,07e^{-j71^\circ}, \underline{U}_{AB3} = \underline{I}_3 \frac{R_2 j\left(3\omega L_3 - \frac{1}{3\omega C_3}\right)}{R_2 + j\left(3\omega L_3 - \frac{1}{3\omega C_3}\right)} = 7,9 - j13,5,$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{AB3}}{R_2} = 1,6 - j2,7 = 3,14e^{-j59^\circ}, \underline{I}_{33} = \frac{\underline{U}_{AB3}}{\underline{Z}_3} = -(0,6 + j0,2) = 0,2\sqrt{5}e^{j168^\circ},$$



$$\begin{cases} i_{13} = \sqrt{2}I_{13} \sin(3\omega t + \gamma_3 - \varphi_{13}) = 3,07\sqrt{2} \sin(3\omega t + 41^\circ) \\ i_{23} = \sqrt{2}I_{23} \sin(3\omega t + \gamma_3 - \varphi_{23}) = 3,14\sqrt{2} \sin(3\omega t + 29^\circ) \\ i_{33} = \sqrt{2}I_{33} \sin(3\omega t + \gamma_3 - \varphi_{33}) = 0,4\sqrt{5} \sin(3\omega t - 198^\circ) \end{cases}$$

- Pentru ambele armonici:

$$\begin{cases} i_1 = i_{11} + i_{13} = 10\sqrt{5} \sin(\omega t - 18^\circ 20') + 3,07\sqrt{2} \sin(3\omega t + 41^\circ) \\ i_2 = i_{21} + i_{23} = 5\sqrt{10} \sin(\omega t + 26^\circ 30') + 3,14\sqrt{2} \sin(3\omega t + 29^\circ) \\ i_3 = i_{31} + i_{33} = 5\sqrt{10} \sin(\omega t - 26^\circ 30') + 0,4\sqrt{5} \sin(3\omega t - 198^\circ) \end{cases}$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 156V; I = \sqrt{I_{11}^2 + I_{13}^2} = 18,1A, \cos \varphi_{e1} = \cos(-18^\circ 20') = 0,95,$$

$$\sin \varphi_{e1} = -0,314, \cos \varphi_{e3} = \cos 71^\circ = 0,325, \sin \varphi_{e3} = 0,945,$$

$$P = U_1 I_{11} \cos \varphi_{e1} + U_3 I_{13} \cos \varphi_{e3} = 1975W, Q = U_1 I_{11} \sin \varphi_{e1} + U_3 I_{13} \sin \varphi_{e3} = -350VAr,$$

$$S = UI = 2500 VA, D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 1490VAd.$$

## 5.5 CUADRIPOLI ELECTRICI

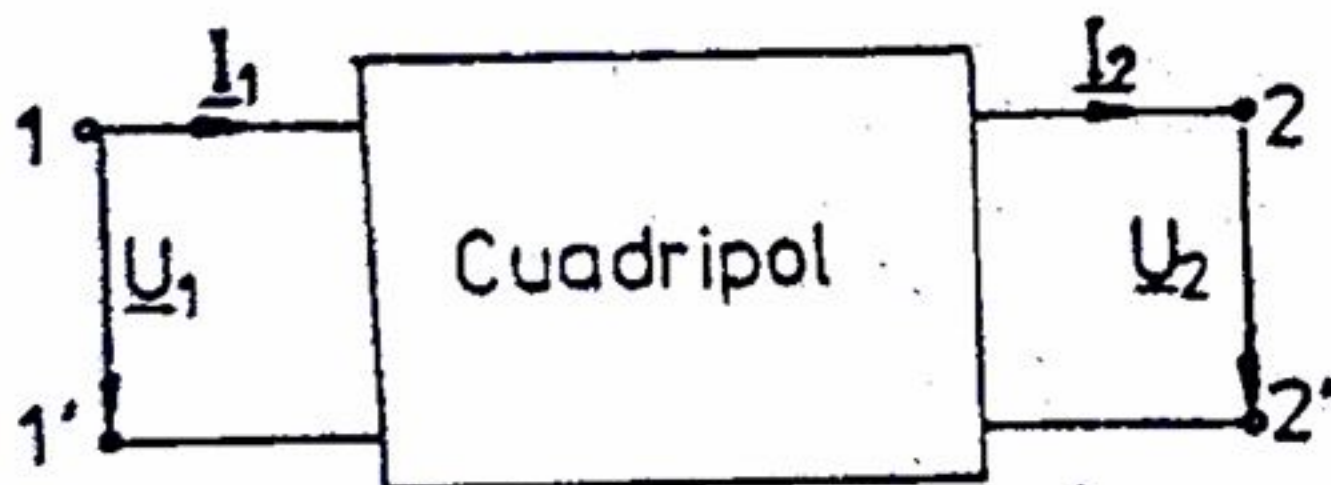


Fig.5.87

Cuadripolul este un circuit electric fără cuplaje magnetice cu exteriorul, care are patru borne de acces (fig.5.87). Cuadripolii pot fi: diport (cu două porți, una de intrare 1-1' și una de ieșire 2-2'), liniari (conținând numai elemente liniare), neliniari (conțin cel puțin un element neliniar), activi (conțin

surse de t.e.m.), pasivi (nu conțin surse de t.e.m.), simetrici (prin inversarea celor două perechi de borne 1-1' și 2-2' nu se modifică curenții din circuitul la care este conectat cuadripolul), nesimetrici (la care nu este îndeplinită condiția menționată) etc.

### 5.5.1 Ecuațiile și schemele echivalente ale cuadripolilor diport, liniari și pasivi

Mărimile de intrare  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$  pot fi scrise în funcție de mărimile de ieșire  $\underline{U}_2$  și  $\underline{I}_2$ :

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 \quad (5.230)$$



unde:  $\underline{A}$  și  $\underline{D}$  (mărimi complexe fără dimensiuni),  $\underline{B}$  (impedanța complexă) și  $\underline{C}$  (admitanța complexă) se numesc parametrii fundamentali ai cuadripolului. Pentru determinarea practică a parametrilor  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  și  $\underline{D}$  se aplică cuadripolului două regimuri de funcționare :

- un regim de mers în gol (se deschid bornele 2-2', deci  $\underline{I}_2 = 0$ ) și se determină din ecuațiile fundamentale (5.230) parametrii  $\underline{A}$  și  $\underline{C}$  :

$$\underline{A} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} \text{ și } \underline{C} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} \quad (5.231)$$

- un regim de scurtcircuit (se scurtcircuitază bornele 2-2' deci  $\underline{U}_2 = 0$ ) și se determină din ecuațiile fundamentale parametrii  $\underline{B}$  și  $\underline{D}$  :

$$\underline{B} = \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} \text{ și } \underline{D} = \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} \quad (5.232)$$

Relațiile (5.231) și (5.232) se mai pot scrie

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_2}; \underline{B} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{I}_2}; \underline{C} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_2}; \underline{D} = \frac{\underline{I}_{1sc}}{\underline{I}_2} \quad (5.233)$$

un  $\underline{U}_{10}$  și  $\underline{I}_{10}$  sunt tensiunea și curentul de la intrare pentru încercarea de mers în gol, iar  $\underline{U}_{1sc}$  și  $\underline{I}_{1sc}$  - tensiunea și curentul de la intrare pentru încercarea de mers în scurtcircuit.

Înlocuind (5.233) în (5.230) se obține

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{10} + \underline{U}_{1sc} \text{ și } \underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_{1sc} \quad (5.234)$$

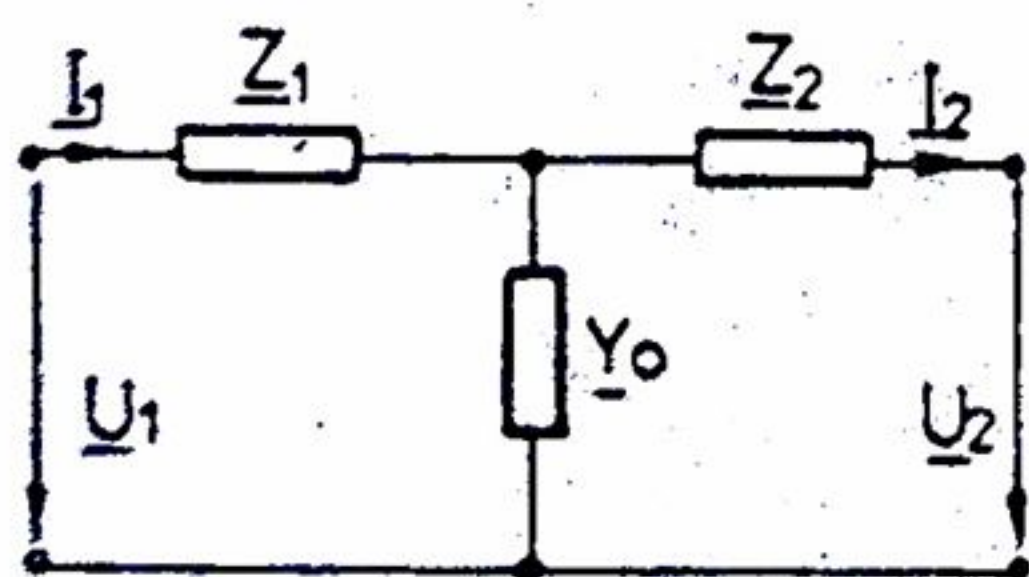


Fig. 5.88

adică, mărimile de intrare ale cuadripolului (tensiunea  $\underline{U}_1$  și curentul  $\underline{I}_1$ ) pot fi obținute prin însumarea algebrică a valorilor acelorași mărimi din cele două regimuri extreme: mersul în gol și scurtcircuit. Din (5.233) se obțin și impedanțele de intrare la mersul în gol și scurtcircuit.

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \text{ și } \underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{I}_{1sc}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \quad (5.235)$$

Dacă între parametrii fundamentali ai cuadripolului există relația

$$\underline{AD} - \underline{BC} = 1 \quad (5.236)$$

numită și teorema reciprocității, cuadripolul se numește reciproc, putându-se demonstra că toți cuadripolii liniari și pasivi sunt reciproci.

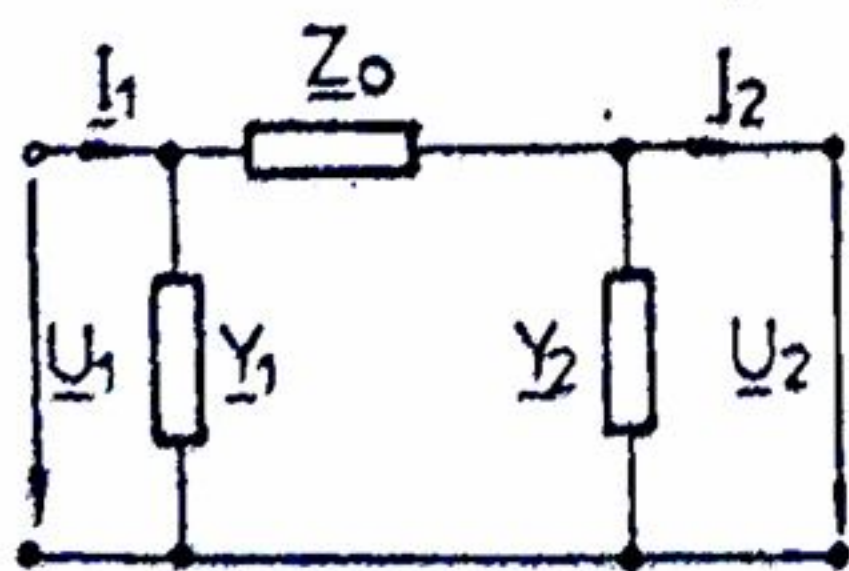


Fig. 5.89

Rezultă că pentru caracterizarea completă a unui



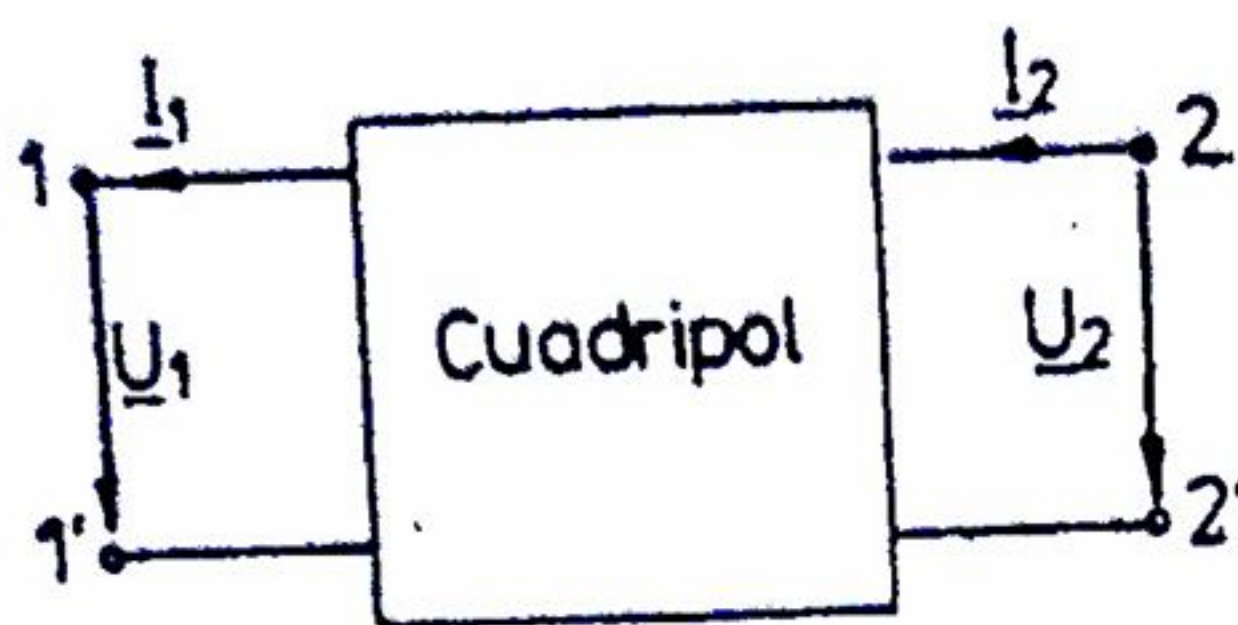


Fig.5.90

cuadripol reciproc sunt necesari trei parametri fundamentali, al patrulea fiind determinat din condiția de reciprocitate. Schema echivalentă a acestui cuadripol este deci concepută doar cu trei elemente de circuit : schema în T (fig.5.88) sau schema în  $\pi$  (fig.5.89).

Pe baza definiției cuadripolilor simetrici, aceștea pot fi alimentați pe la bornele de ieșire (fig.5.90), iar ecuațiile fundamentale devin :

$$\underline{U}_2 = \underline{A}\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{I}_1; -\underline{I}_2 = \underline{C}\underline{U}_1 - \underline{D}\underline{I}_1 \quad (5.237)$$

sau, rezolvând sistemul în raport cu  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$  :

$$\underline{U}_1 = \underline{D}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2; \underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{A}\underline{I}_2 \quad (5.238)$$

adică, un cuadripol reciproc este și simetric dacă parametrii lui fundamentali  $\underline{A}$  și  $\underline{D}$  sunt egali între ei :

$$\underline{A} = \underline{D} \quad (5.239)$$

Rezultă că pentru caracterizarea completă a unui cuadripol simetric sunt necesari doi parametri fundamentali, ceilalți doi fiind determinați din condițiile de reciprocitate și simetrie. Schema echivalentă a cuadripolului simetric este deci concepută doar cu două elemente de circuit: schema în T (fig.5.91) sau schema în  $\pi$  (fig.5.92).

Ecuațiile fundamentale ale cuadripolilor reprezentați prin schemele echivalente se determină astfel:

- Pentru schema echivalentă în T a cuadripolului reciproc (fig.5.88) se pot scrie relațiile :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + (\underline{U}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2) \underline{Y}_0; \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \quad (5.240)$$

sau, introducând pe  $\underline{I}_1$  în expresia lui  $\underline{U}_1$  și ordonând termenii se obțin ecuațiile fundamentale :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0) \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{Y}_0 \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (5.241)$$

Se compară (5.241) cu (5.230) și rezultă :

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \underline{C} = \underline{Y}_0; \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 \quad (5.242)$$

$$\text{sau : } \underline{Y}_0 = \underline{C}; \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}; \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}} \quad (5.243)$$



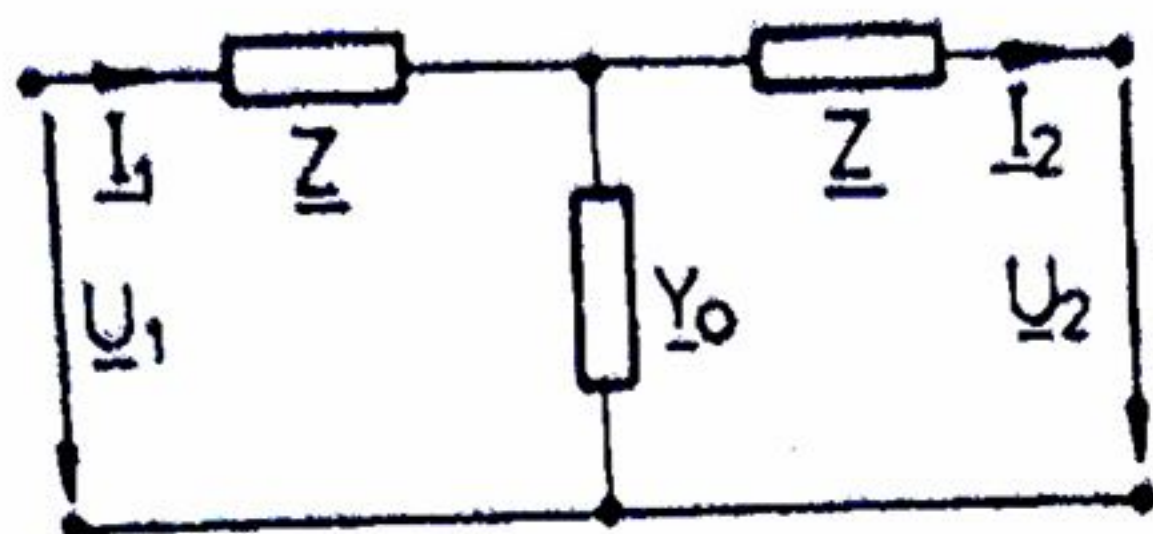


Fig. 5.91

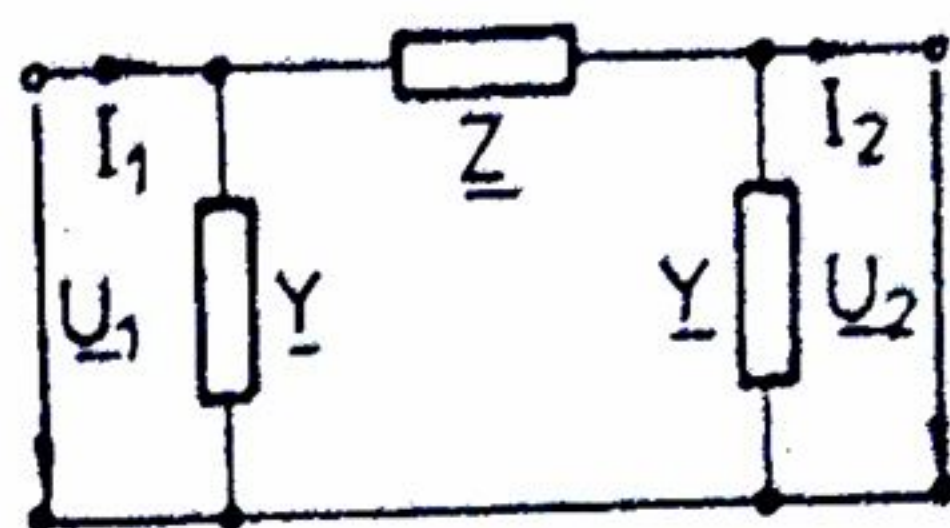


Fig. 5.92

Introducând (5.243) în expresia lui  $\underline{B}$  din (5.242) se regăsește condiția de reciprocitate (5.236).

- Pentru schema echivalentă în T a cuadripolului simetric (fig. 5.91) se obțin ecuațiile fundamentale din (5.241) în care  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$ :

$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}\underline{Y}_0)\underline{U}_2 + (2\underline{Z} + \underline{Z}^2 \underline{Y}_0)\underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{Y}_0 \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}\underline{Y}_0)\underline{I}_2 \quad (5.244)$$

$$\text{deci:} \quad \underline{A} = \underline{D} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0; \quad \underline{B} = 2\underline{Z} + \underline{Z}^2 \underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0 \quad (5.245)$$

sau:

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}; \quad \underline{Z} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}} = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}} \quad (5.246)$$

- Pentru schema echivalentă în  $\pi$  a cuadripolului reciproc (fig. 5.89) se pot scrie relațiile

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_0 (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2) + \underline{U}_2; \quad \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 \quad (5.247)$$

sau, introducând pe  $\underline{U}_1$  în expresia lui  $\underline{I}_1$  și ordonând termenii se obțin ecuațiile fundamentale:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1) \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.248)$$

Se compară (5.248) cu (5.230) și rezultă

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 \quad (5.249)$$

sau:

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}} \quad (5.250)$$

Introducând (5.250) în expresia lui  $\underline{C}$  din (5.249) se regăsește condiția de reciprocitate (5.236).

+ Pentru schema echivalentă în  $\pi$  a cuadripolului simetric (fig. 5.92) se obțin ecuațiile fundamentale din (5.248) în care  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}$ :

$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = (2\underline{Y} + \underline{Y}^2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}) \underline{I}_2 \quad (5.251)$$



deci :

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}; \underline{B} = \underline{Z}_0; \underline{C} = \underline{Y}(2 + \underline{Y} \underline{Z}_0); \quad (5.252)$$

sau :

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}; \underline{Y} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}} = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{B}} \quad (5.253)$$

### 5.5.2 Impedanța caracteristică și constanta de propagare a cuadripolului diport, liniar și pasiv.

Dacă impedanța  $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$  conectată la bornele de ieșire ale cuadripolului este egală cu impedanța calculată  $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$  de la intrarea cuadripolului, atunci expresia

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad (5.254)$$

se numește impedanța caracteristică sau iterativă a cuadripolului.

Din (5.230) și (5.254) rezultă, succesiv, pentru cuadripolul reciproc:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2}{\underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2} = \frac{\underline{A} \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{B}}{\underline{C} \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} + \underline{D}}; \underline{Z}_c = \frac{\underline{A}\underline{Z}_c + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_c + \underline{D}} \quad (5.255)$$

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2\underline{C}} \left[ \underline{A} - \underline{D} \pm \sqrt{(\underline{A} - \underline{D})^2 + 4\underline{B}\underline{C}} \right]; \quad (5.256)$$

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2\underline{C}} \left[ \underline{A} - \underline{D} \pm \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 + 4} \right]. \quad (5.257)$$

Dintre cele două soluții ale impedanței caracteristice  $\underline{Z}_c$  se va alege aceea care are partea reală pozitivă.

Prin definiție, constanta de propagare  $\gamma$  are valoarea

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\underline{U}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_2 \underline{I}_2} \right) \quad (5.258)$$

unde, din (5.254) rezultă

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \quad (5.259)$$

și deci :

$$\gamma = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = a + jb \quad (5.260)$$



Partea reală a constantei de programare (a) se numește constantă de atenuare, iar partea imaginară (b) se numește constantă de fază.

Dacă ecuațiile cuadripolului reciproc se scriu sub forma

$$\underline{U}_1 = \underline{A}\underline{U}_2 + \underline{B}\underline{I}_2 = \underline{U}_2 \left( \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} \right); \quad \underline{I}_1 = \underline{C}\underline{U}_2 + \underline{D}\underline{I}_2 = \underline{I}_2 (\underline{D} + \underline{C}\underline{Z}_c) \quad (5.261)$$

în care se introduc valorile  $\underline{Z}_c$  din (5.257) și apoi se explicitează rapoartele (5.259), rezultă, succesiv :

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_c} = \underline{D} + \underline{C}\underline{Z}_c \quad (5.262)$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 - 4} \quad (5.263)$$

iar din (5.260) se obține constanta de propagare :

$$\gamma = \ln \left[ \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 - 4} \right] \quad (5.264)$$

(De regulă, în aplicații, semnul radicalului este pozitiv).

Pentru un cuadripol simetric, impedanța caracteristică  $\underline{Z}_c$  (5.257) și constanta de propagare  $\gamma$  (5.264) au expresiile (cu  $\underline{A} = \underline{D}$ ) :

$$\underline{Z}_c = \frac{\pm 1}{2\underline{C}} \sqrt{4\underline{A}^2 - 4} = \pm \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} \quad (5.265)$$

$$\gamma = \ln \left( \underline{A} \pm \sqrt{\underline{A}^2 - 1} \right) = \ln \left( \underline{A} \pm \sqrt{\underline{B}\underline{C}} \right) \quad (5.266)$$

Aplicația 1. Să se determine parametrii fundamentali, impedanța caracteristică și constanta de propagare, la cuadripolul reciproc cu schema echivalentă în T reprezentată în fig.5.88, în care  $\underline{Z}_1 = (1 + j2)\Omega$ ,  $\underline{Z}_2 = j2\Omega$ ,  $\underline{Y}_0 = (1 - j2)\Omega^{-1}$  și la cuadripolul reciproc cu schema echivalentă în  $\pi$  (fig.5.89), în care  $\underline{Z}_0 = j2\Omega$ ,  $\underline{Y}_1 = (1 - j2)\Omega^{-1}$ ,  $\underline{Y}_2 = -j2\Omega^{-1}$ .

Cuadripolul T:

- Se calculează parametrii fundamentali (5.242) :

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 = 6; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = (1 + j14)\Omega; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0 = (1 - j2)\Omega^{-1}; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0 = (5 + j2).$$

Se verifică condiția de reciprocitate (5.236) :  $6(5 + j2) - (1 + j14)(1 - j2) = 1$ .

- Impedanța caracteristică (5.257) este succesiv :

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2(1 - j2)} \left[ 1 - j2 \pm \sqrt{(11 + j2)^2 - 4} \right];$$



$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{24,2 e^{j148^\circ}} \right) = 0,5 \pm 2,46(0,275 + j0,96);$$

$$\underline{Z}_c = (1,175 + j2,36) \Omega.$$

A doua soluție nu convine, având rezistența negativă  $(-0,175 \Omega)$

- Constanta de propagare (5.264) este :

$$\gamma = \ln \left[ 5,5 + j + \sqrt{(5,5 + j)^2 - 1} \right] = 2,398 + j0,195;$$

eci, constanta de atenuare este:  $a = 2,398$ , iar constanta de fază este:  $b = 0,195$  radiani.

Cuadripolul  $\pi$  :

- Se calculează parametrii fundamentali (5.249) :

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_2 = 5; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0 = j2 \Omega; \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 = (5 - j12) \Omega^{-1};$$

$$\underline{D} = 1 + \underline{Z}_0 \underline{Y}_1 = 5 + j2.$$

Se verifică condiția de reciprocitate (5.236):  $5(5 + j2) - j2(5 - j12) = 1$ .

- Impedanța caracteristică (5.257) este succesiv :

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2(5 - j12)} \left[ 5 - (5 + j2) \pm \sqrt{(10 + j2)^2 - 4} \right],$$

$$\underline{Z}_c = \frac{(5 + j12) [-j \pm (4,895 + j \cdot 1,039)]}{169}, \quad \underline{Z}_c = (0,148 + j0,355) \Omega.$$

A doua soluție nu convine, având rezistența negativă.

- Constanta de propagare (5.264):

$$\gamma = \ln \left[ 5 + j + \sqrt{(5 + j)^2 - 1} \right] = 2,3 + j0,193,$$

eci:  $a = 2,3$  (constantă de atenuare);  $b = 0,193$  radiani (constantă de fază).

Aplicația 2 Să se scrie ecuațiile fundamentale ale cuadripolului simetric în funcție de constanta de propagare și impedanța caracteristică.

- Din condițiile de reciprocitate și simetrie, precum și din expresiile impedanței caracteristice (5.265) și constantei de propagare (5.266) rezultă sistemul de ecuații în raport

$$\text{cu } \underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \text{ și } \underline{D}: \underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1, \quad \underline{Z}_c^2 = \frac{\underline{B}}{\underline{C}}, \quad e^\gamma = \frac{\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \underline{C}}}{\underline{C}}, \quad \underline{A} = \underline{D}.$$

- Soluțiile acestui sistem sunt



$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{e}^{\underline{\gamma}} + \underline{e}^{-\underline{\gamma}}) = \underline{\text{ch}}\underline{\gamma} \\ \underline{B} = \underline{Z}_c \frac{\underline{e}^{\underline{\gamma}} - \underline{e}^{-\underline{\gamma}}}{2} = \underline{Z}_c \underline{\text{sh}}\underline{\gamma} \\ \underline{C} = \frac{\underline{e}^{\underline{\gamma}} - \underline{e}^{-\underline{\gamma}}}{2\underline{Z}_c} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{\text{sh}}\underline{\gamma} \end{cases} \quad (5.267)$$

- Rezultă ecuațiile fundamentale ale cuadripolului simetric :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{\text{ch}}\underline{\gamma} \underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{\text{sh}}\underline{\gamma} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{\text{sh}}\underline{\gamma}}{\underline{Z}_c} \underline{U}_2 + \underline{\text{ch}}\underline{\gamma} \underline{I}_2 \end{cases} \quad (5.268)$$

## 5.6 CIRCUITE ELECTRICE NELINIARE DE CURENT ALTERNATIV

Unele instalații electrice, precum și numeroase aparate (generatoare și convertizoare de curent electric, amplificatoare de energie electromagnetică) conțin bobine cu miez feromagnetic, condensatoare cu dielectric de permitivitate variabilă, rezistoare cu rezistivitate variabilă, diode semiconductoare, tranzistoare, s.a.m.d., care au o caracteristică curent-tensiune  $i=f(u)$ , neliniară. Elementele de circuit cu caracteristică neliniară curent - tensiune se numesc elemente neliniare (vezi paragraful 3.3.1).

Rezolvarea circuitelor cu elemente neliniare, alimentate la t.e.m.  $u(t)$  sinusoidale se face prin metode care variază de la caz la caz (de la circuit la circuit). Totuși, metodele de rezolvare a acestor circuite pot fi grupate în metode grafice și metode analitice (metode de aproximare analitice).

1). Metoda grafică constă în găsirea formei curentului electric ce străbate circuitul, printr-o construcție grafică realizată punct cu punct. De exemplu, cunoscând caracteristica  $i(u)$  a unui rezistor neliniar, alimentat la t.e.m. sinusoidală  $u(t)$ , se poate afla grafic curentul  $i(t)$  realizând construcția grafică din fig. 5.93.

În cazul grupurilor serie sau paralel de rezistențe neliniare se folosesc grafic caracteristicile echivalente, ca și în c.c. (fig. 3.36 și 3.39).



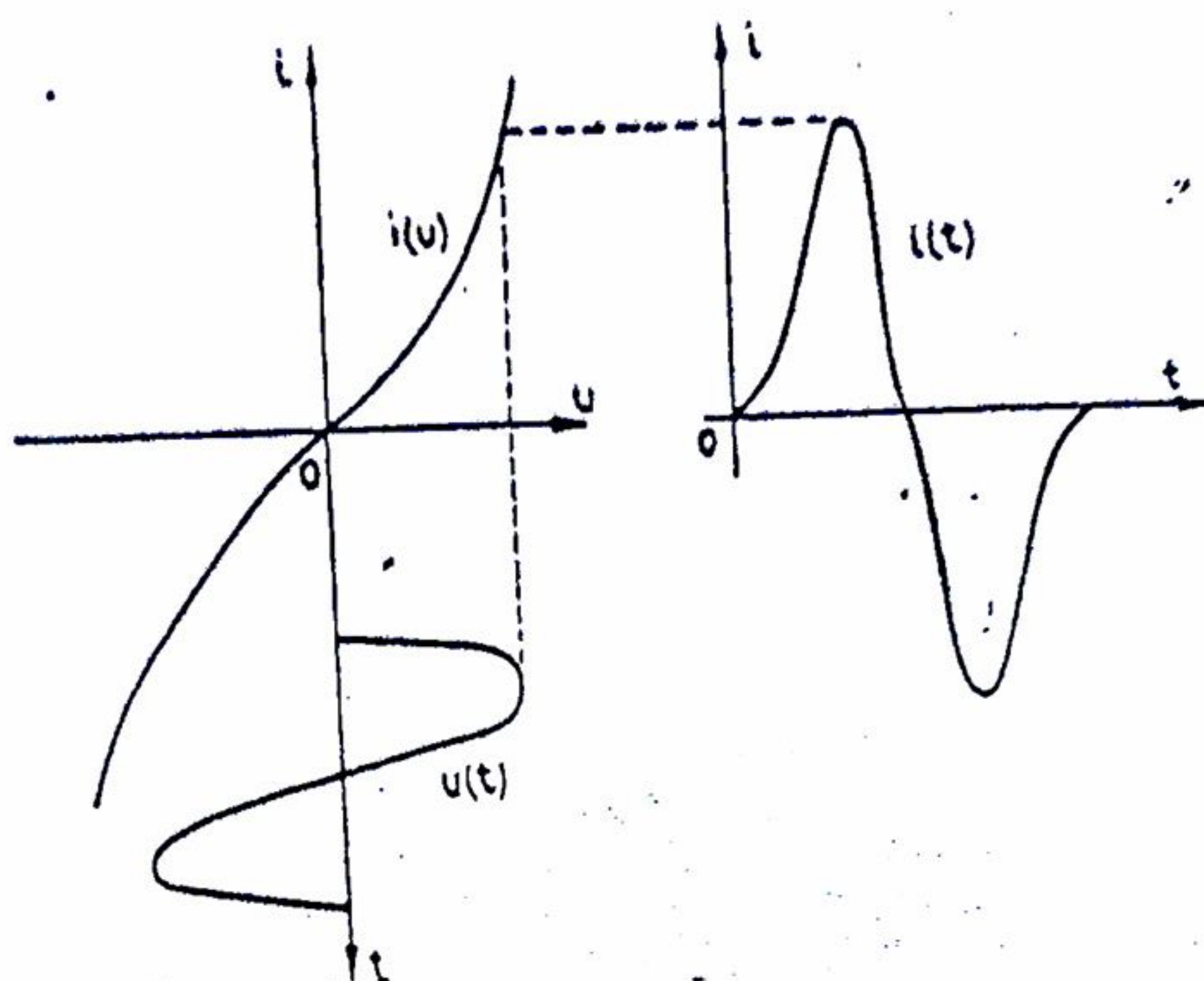


Fig. 5.93

2) Metodele de aproximare analitice folosesc caracteristica  $i(u)$  a elementului neliniar, dezvoltând-o în serie Taylor în jurul unei valori  $u_0$  a tensiunii de alimentare  $u(t)$  care poate fi sinusoidală sau nesinusoidală

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u - u_0}{1!} \cdot \frac{\partial i}{\partial u} + \frac{u - u_0}{2!} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \dots \quad (5.269)$$

sau :

$$i(u) = A_0 + A_1(u - u_0) + A_2(u - u_0)^2 + \dots \quad (5.270)$$

Dacă graficul (caracteristica)  $i(u)$  a elementului sau circuitului neliniar se poate aproxima la o ecuație de forma :

$$i(u) = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (5.271)$$

atunci dezvoltarea ei în serie este

$$i(u) = 1 + \frac{3}{2a}u + \frac{3}{8a^2}u^2 + \dots \quad (5.272)$$

sau, dacă operația de aproximare conduce la o ecuație de forma

$$i(u) = a(e^{bu} - 1) \quad (5.273)$$

atunci dezvoltarea ei în serie este

$$i(u) = a \left( \frac{bu}{1!} + \frac{b^2u^2}{2!} + \frac{b^3u^3}{3!} + \dots \right) \quad (5.274)$$

Metoda se poate aplica și în cazul când se aproximează variația rezistenței neliniare în timp  $R_n(t)$ . În acest caz se deduce

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_n(t)} \quad (5.275)$$



3) Metoda aproximărilor succesive se utilizează când nu se găsește pe caracteristică o porțiune liniară care să conțină punctul real de funcționare sau când nu se pot găsi relațiile analitice de genul (5.271), (5.273) etc.

Se aproximează o valoare  $I'_n$  pentru curentul din rezistența neliniară (fig.5.94), obținându-se  $R'_n = \frac{U'_n}{I'_n}$ , cu care se rezolvă circuitul. Dacă se obține o eroare

$$\Delta I' = \frac{I'_c - I'_n}{I'_n} 100\% \quad (5.276)$$

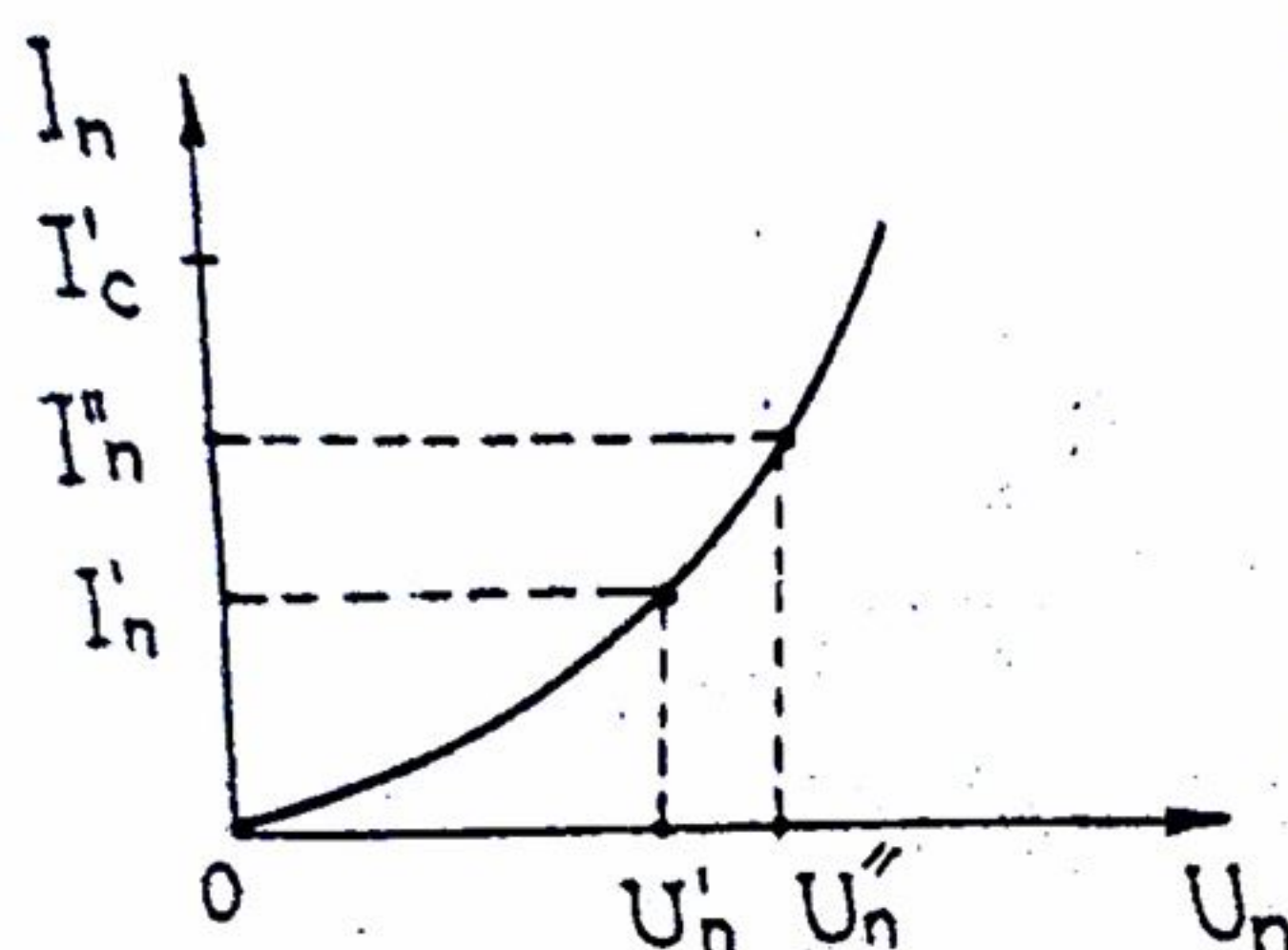


Fig.5.94

mai mare (în modul) decât cea admisă ( $I'_c$  fiind curentul obținut din calcul) atunci se alege un alt curent  $I''_n$  ( $I'_n < I''_n < I'_c$ ) care stabilește rezistența:

$$R''_n = \frac{U''_n}{I''_n}, \text{ cu care se rezolvă din nou circuitul,}$$

obținându-se curentul  $I''_c < I'_c$ , deci o eroare  $\Delta I'' < \Delta I'$ . Procedura se repetă până când  $\Delta I$  are valoarea admisă.

Această metodă utilizează valorile efective ale mărimilor electrice și se recomandă în cazul circuitelor cu unul, două sau mai multe elemente

neliniare distribuite în circuite de c.a. ramificate sau neramificate.

4) Metoda generatorului de tensiune echivalent se utilizează în cazul când într-un circuit cu trei sau mai multe noduri se găsește o singură rezistență neliniară a cărei caracteristică  $I_n(U_n)$  se cunoaște. Din această caracteristică se deduce caracteristica  $I_n(R_n)$

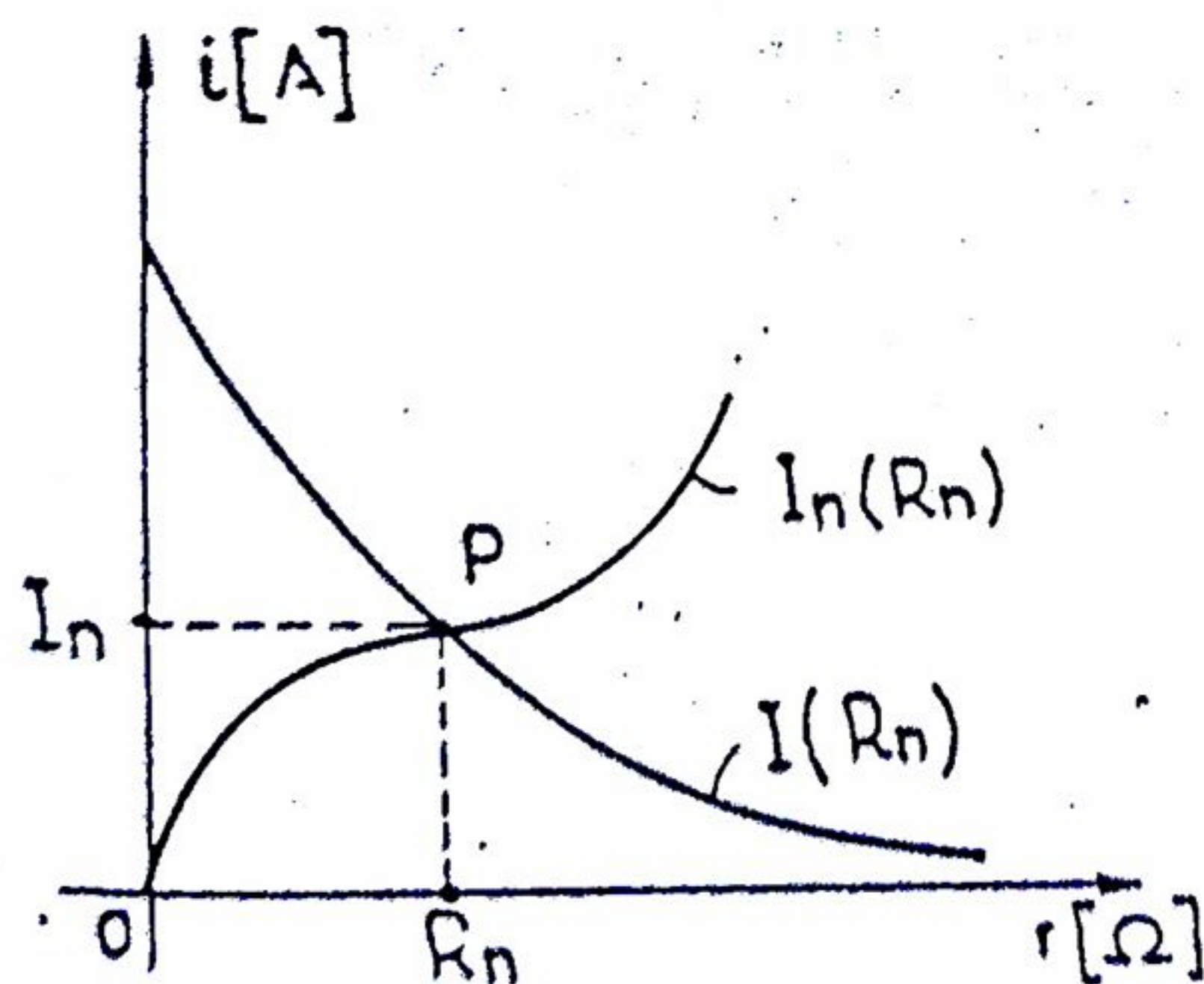


Fig.5.95

Punctul P de intersecție (fig.5.95) determină valorile reale  $R_n$  și  $I_n$ .

folosind relația  $R_n = \frac{U_n}{I_n}$ .

Formula Thevenin în formă complexă, cunoscută  $I = \frac{U_{ABO}}{Z + Z_{ABO}}$ , în care  $Z = R_n$

este rezistența neliniară, iar  $U_{ABO}$  și  $Z_{ABO}$  se determină prin procedee cunoscute, poate fi scrisă și pe module

$$I = \frac{U_{ABO}}{\sqrt{(R_{ABO} + R_n)^2 + X_{ABO}^2}} \quad (5.277)$$

Se trasează în același plan și la aceeași scară, atât caracteristica neliniară a rezistorului  $I_n(R_n)$ , cât și curba  $I(R_n)$  din (5.277)



5) Bobina cu miez feromagnetic. Se știe că miezul feromagnetic, cu permeabilitatea magnetică relativă mare, se folosește pentru a mări inductivitatea bobinelor. La trecerea unui curent alternativ printr-o bobină cu miez feromagnetic se constată că variația inducției magnetice a miezului produce variații ale permeabilității magnetice a bobinei, care se comportă deci ca un element neliniar, cu inductivitate variabilă. De asemenea, variația inducției magnetice (în timp) produce degajare de căldură în miezul feromagnetic, adică energia electromagnetică transformată în acest proces, în unitatea de timp, constituie pierderile prin histerezis. Sub acțiunea câmpului electric indus, în miezul feromagnetic se induc curenți electrici de conducție denumiți curenți turbionari sau curenți Foucault. Aceștia produc, prin efect Joule, transformări ireversibile de energie electromagnetică prin degajare de căldură în miez (pierderi prin curenți turbionari).

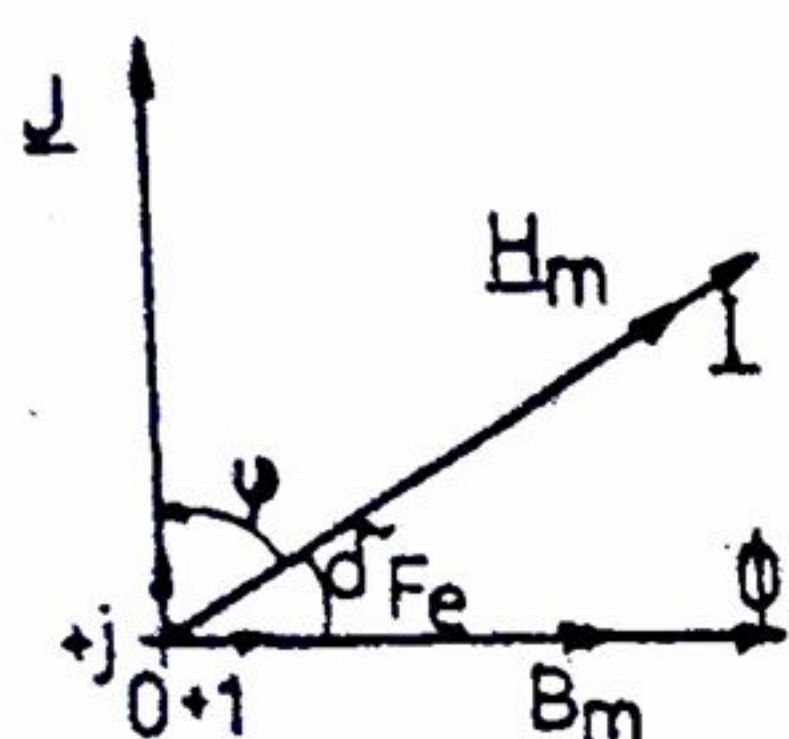


Fig. 5.96

Pentru a reduce pierderile prin curenți turbionari, miezul feromagnetic se realizează din tole de oțel electrotehnic izolate cu hârtie și lac sau din materiale magnetoelectrice. O bobină ideală (fără pierderi) nu consumă energie activă, în curent alternativ, deci în diagrama fazorială, tensiunea la bornele bobinei este defazată cu  $90^\circ$  înaintea curentului care străbate bobina. O bobină reală (cu pierderi) consumă energie activă, în curent alternativ, deci unghiul de defazaj  $\varphi$  între tensiune și curent este mai mic decât  $90^\circ$ . Complementul acestui unghi în plan complex se numește unghi de pierderi al

bobinei  $\delta_{Fe} = 90^\circ - \varphi$  (fig. 5.96).

Se consideră o bobină având rezistența înfășurării neglijabilă. Tensiunea la bornele ei se determină cu relația (în modul)

$$u = N \frac{d\phi}{dt} \quad (5.278)$$

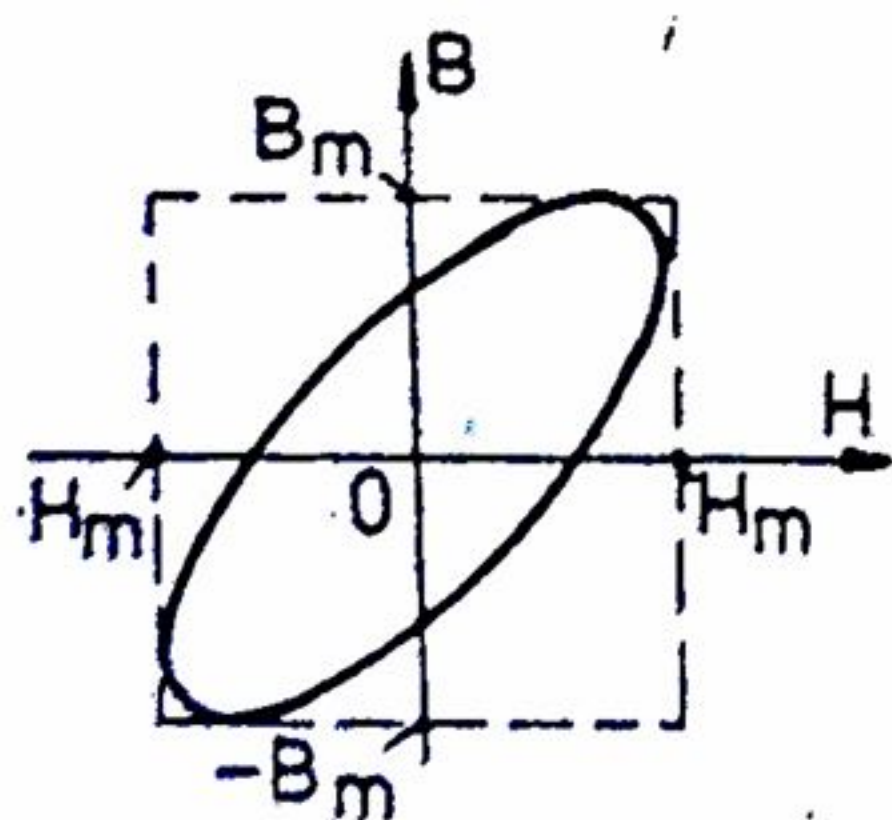


Fig. 5.97

unde  $N$  este numărul de spire ale înfășurării. În regim sinusoidal în complex (5.278) se scrie

$$\underline{U} = j\omega N\phi \quad (5.279)$$

Din relațiile :

$$\phi = \int \underline{E} d\underline{S}; \quad Ni = \oint \underline{H} d\underline{l}, \quad (5.280)$$

în care  $S$  reprezintă secțiunea miezului, iar  $l$  lungimea circuitului magnetic, rezultă că perechile de fazoni  $(\phi, \underline{B}_m)$  și  $(I, \underline{H}_m)$  sunt sinfazice.

Din diagrama fazorială (fig. 5.96) se deduce :

$$\underline{B} = B_m \sin \omega t; \quad \underline{H} = H_m \sin(\omega t + \delta_{Fe}) \quad (5.281)$$

au, în complex :

$$\underline{B}_m = B_m; \quad \underline{H}_m = H_m e^{j\delta_{Fe}} \quad (5.282)$$

Relațiile (5.281) reprezintă ecuațiile parametrice ale curbei  $B = f(H)$ , care se obține eliminând timpul din aceste relațiile :

$$\frac{H}{H_m^2} + \frac{B}{B_m^2} - \frac{HB}{H_m B_m} \cos \delta_{Fe} = \sin^2 \delta_{Fe} \quad (5.283)$$



adică, o elipsă reprezentată în fig.5.97.

Pierderile prin histerezis, pierderile prin curenți turbionari și pierderile în fier, care iau naștere în timpul funcționării bobinei se pot calcula, după cum urmează :

- Pierderile prin histerezis sunt proporționale cu frecvența, cu volumul miezului feromagnetic și cu aria ciclului de histerezis

$$P_h = fVS_d \quad (5.284)$$

- Pierderile prin curenți turbionari sunt proporționale cu: pătratul frecvenței  $f$ , conductivitatea totală  $\sigma$ , pătratul grosimii tolei  $d$  și cu volumul de material  $V$

$$P_t = \frac{\pi^2}{6} f^2 \delta B_m^2 d^2 V \quad (5.285)$$

Pentru micșorarea pierderilor prin curenți turbionari, se folosesc grosimi mici ale tolelor, cu  $d=0,25 \dots 0,35$  mm.

- Pierderile în fier pentru un kilogram de material magnetic, se determină cu relația aproximativă :

$$P_{Fe} = P_{10} \left( \frac{B_m}{10^4} \right)^n \left( \frac{f}{50} \right)^{1,3} \quad (5.286)$$

în care  $n=5,69 \cdot 10g \frac{P_{15}}{P_{10}}$ ;  $P_{10}$ ,  $P_{15}$  - pierderile în fier într-un kilogram de material feromagnetic

la o inducție magnetică maximă de 1T respectiv de 1,5T și la o frecvență de 50 Hz;  $B_m$  - inducția manetică maximă din tolă măsurată în Gauss G;  $f$  - frecvența inducției magnetice sinusoidale. Dacă inducția  $B_m$  se măsoară în [T] ( $1T=10^4G$ ), relația (5.286) devine

$$P_{Fe} = P_{10} B_m^n \left( \frac{f}{50} \right)^{1,3} \quad (5.287)$$

relație empirică, verificabilă în practică prin diferite metode (de exemplu cu aparatul Epstein)

Componentele pierderilor în fier:  $P_h$  (5.286) și  $P_t$  (5.285), însumate, constituie pierderile totale în fier

$$P_{Fe} = P_h + P_t \quad (5.288)$$

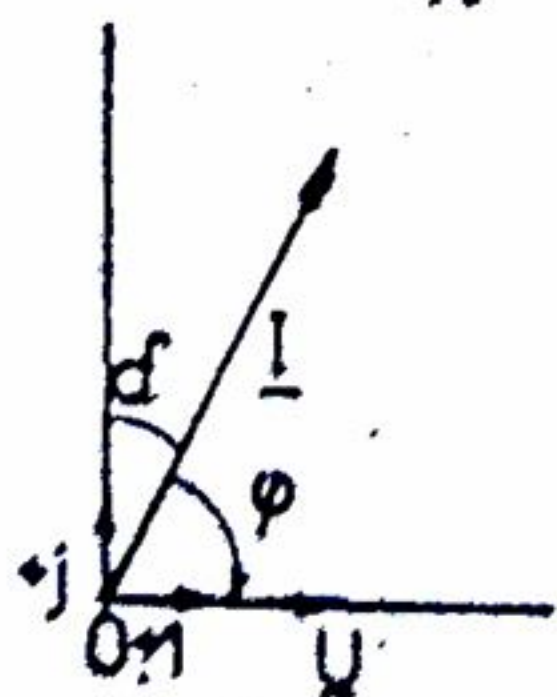


Fig.5.98

6) Condensatorul cu pierderi. Condensatorului cu pierderi constituie cu un circuit neliniar, aflat în regim periodic. La un condensator fără pierderi (ideal) energia activă consumată în curent alternativ este nulă, deoarece curentul din condensator este defazat cu  $90^\circ$  înaintea tensiunii aplicate la borne. Condensatorul cu pierderi (real) are un defazaj între tensiune și curent mai mic decât  $90^\circ$ , iar complementul până la  $90^\circ$  reprezintă unghiul de pierderi ( $\delta$ ) al, condensatorului (fig.98).

Pierderile în condensator se datoresc atât imperfecțiunii dielectricului, cât și a proceselor de polarizare ciclică a dielectricului.

Curentul printr-un condensator cu pierderi este:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (5.289)$$

sau, în regim sinusoidal, în complex :

$$\underline{I} = j\omega \underline{U}. \quad (5.290)$$



Câmpul electric  $E$  și inducția electrică  $D$ , care acționează în dielectricului condensatorului cu pierderi (și cu histerezis) se exprimă în valori momentane :

$$E = E_m \sin \omega t; D = D_m \sin(\omega t - \delta) \quad (5.291)$$

sau în complex :

$$\underline{E}_m = E_m; \underline{D}_m = D_m e^{-j\delta}, \quad (5.292)$$

și au diagrama fazorială prezentată în fig.5.99.

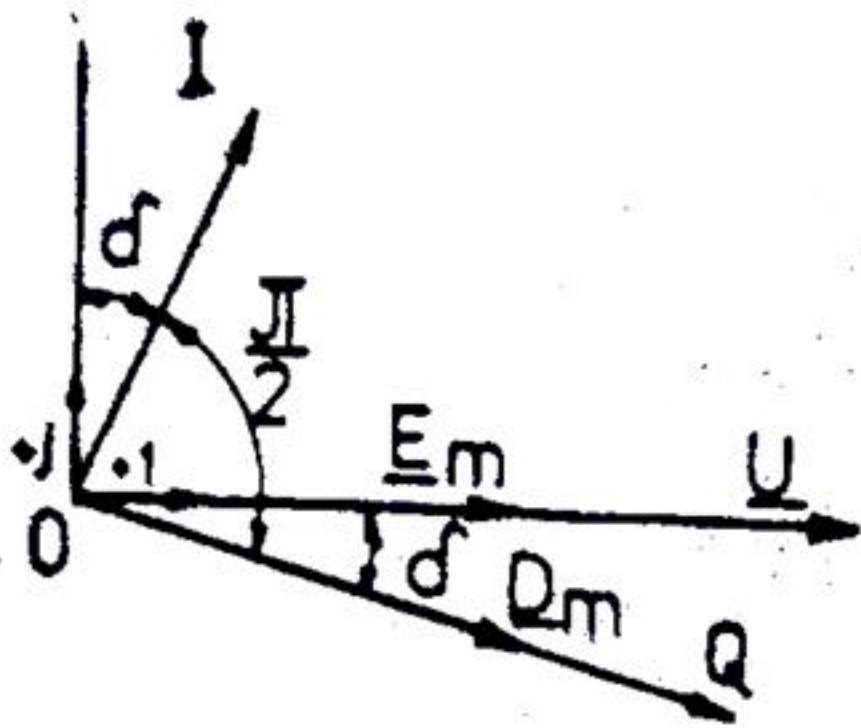


Fig.5.99

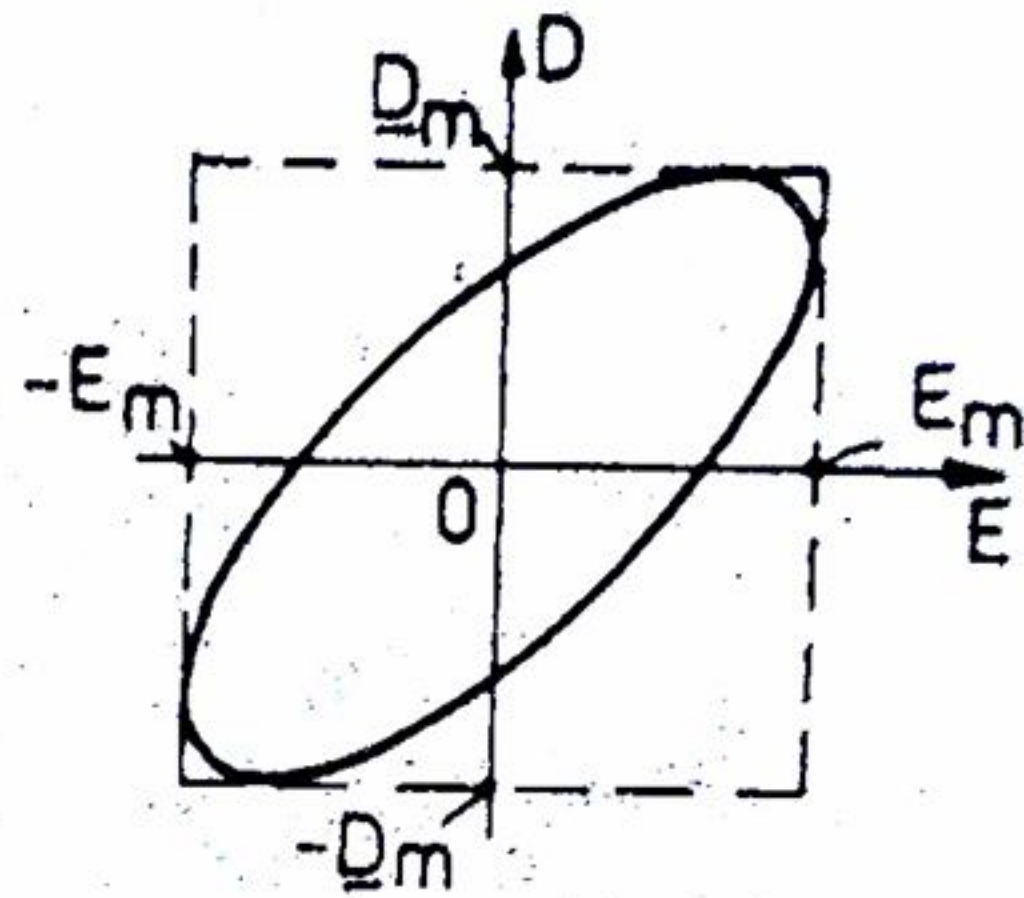


Fig.5.100

Eliminând timpul  $t$ , din (5.291), rezultă :

$$\frac{E^2}{E_m^2} + \frac{D^2}{D_m^2} - 2 \frac{ED}{E_m D_m} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (5.293)$$

adică, ecuația unei elipse (fig.5.100).

Energia electrică înmagazinată în dielectric este :

$$W_e = \int \vec{E} d\vec{D} = \pi E_m D_m \sin \delta, \quad (5.294)$$

și reprezintă suprafața elipsei (5.293).

Schema echivalentă în paralel și diagrama fazorială sunt date în fig.5.101, din care rezultă :

$$I' = I \cos \delta; I'' = I \sin \delta; I' = UC_1 \omega; I'' = \frac{U}{R_1} \quad (5.295)$$

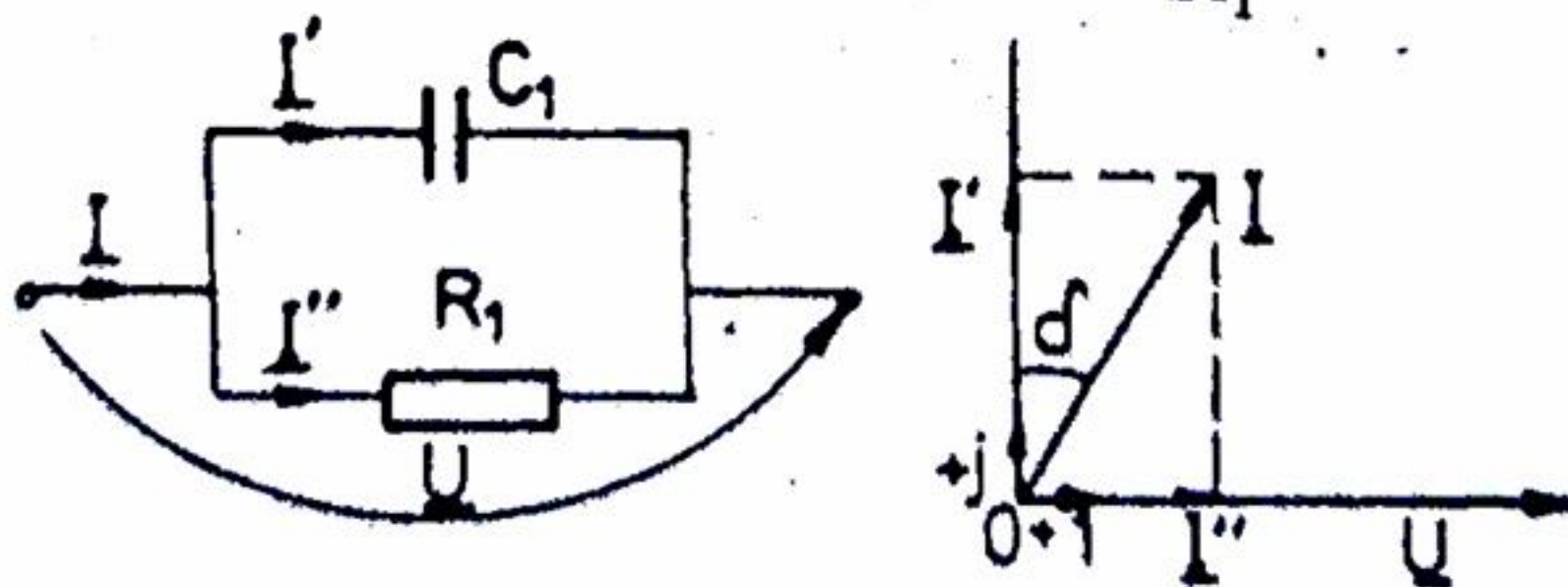


Fig.5.101

în care :

$$C_1 = \frac{1}{\omega C} \cos \delta; R_1 = \frac{U}{I \sin \delta} \quad (2.296)$$

Schema echivalentă serie și diagrama fazorială sunt date în fig. 5.102 din care rezultă:

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}''; \underline{U}' = U \cos \delta; \underline{U}'' = U \sin \delta \quad (5.297)$$



$$\underline{U}' = \frac{I}{\omega C_2}; \underline{U}'' = IR_2 \quad (5.298)$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega U \cos \delta}; R_2 = \frac{U}{I} \sin \delta \quad (5.299)$$

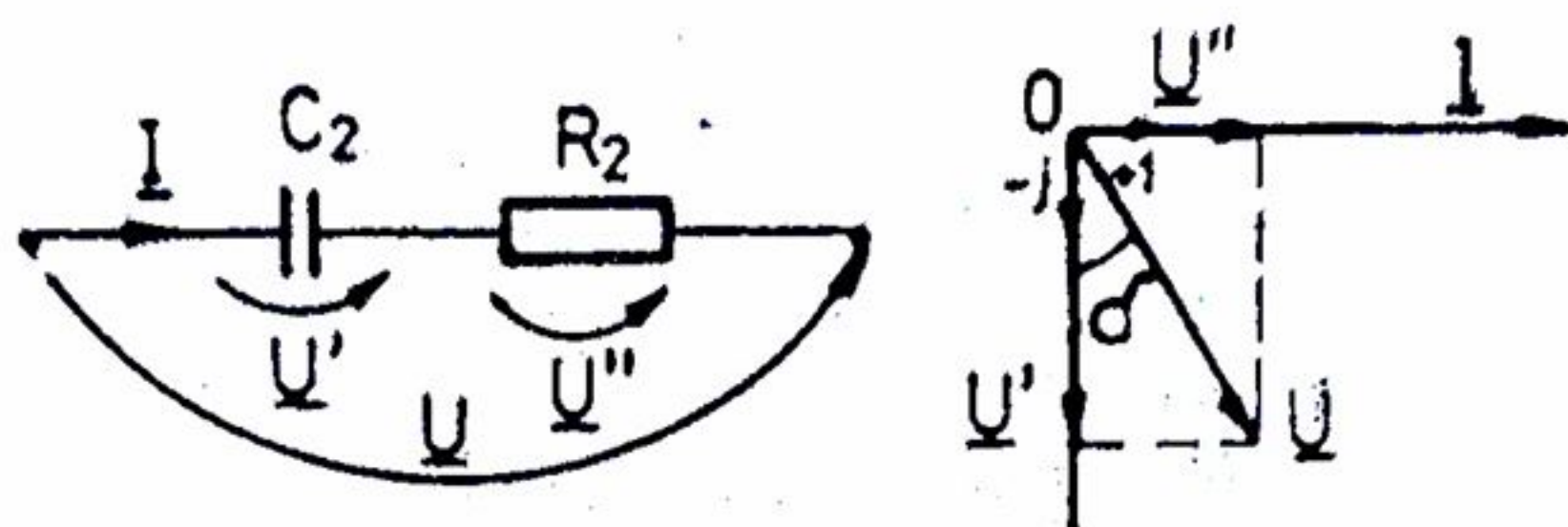


Fig. 5.102

Din cele două scheme echivalente rezultă :

$$C_1 = C_2 \cos^2 \delta; R_1 = \frac{R_2}{\sin^2 \delta} \quad (5.300)$$

În aplicațiile practice unghiul de pierderi  $\delta$  este de ordinul gradelor, deci :

$$C_1 \approx C_2; R_1 \gg R_2 \quad (5.301)$$

7) Efectul pelicular. Un curent variabil care parcurge un conductor masiv, are densitatea de curent mai mică în centrul conductorului decât la periferie (cazul efectului pelicular).

Adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic ( $\delta$ ) reprezintă distanța de la suprafața semispațiului pe care ar trebui să fie repartizat uniform curentul total.

Efectul pelicular poate fi net, slab și mediu.

Efectul pelicular net are loc când:  $\delta \ll \sqrt{A}$ , unde  $A$  este aria secțiunii transversale a conductorului. Raportul dintre rezistență în curent alternativ a conductorului masiv  $R_{ca}$  și cea în curent continuu a aceluiași conductor  $R_{cc}$  și se notează  $K_a$  și are expresia (conductorul fiind circular, cu lungimea  $l$  și rezistivitatea  $\rho$ ):

$$K_a = \frac{R_{ca}}{R_{cc}} = \frac{\rho \frac{1}{\pi a^2 - \pi(a-\delta)^2}}{\rho \frac{1}{\pi a^2}} = \frac{a^2}{2a\delta - \delta^2}, \text{ sau pentru } \delta \ll a, \text{ rezultă } K_a = \frac{a}{2\delta}, \text{ iar}$$

dacă adâncimea de pătrundere este:  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ , se obține :

$$K_a = \frac{a}{2} \sqrt{\pi f \mu \sigma}, \quad (5.302)$$

unde:  $a$  este raza conductorului masiv;  $f$  - frecvența curentului alternativ;  $\sigma$  - conductivitatea electrică a conductorului;  $\mu$  - permeabilitatea magnetică.

Efectul pelicular slab are loc la frecvențe joase, când  $\delta \gg \sqrt{A}$ , iar efectul pelicular mediu are loc la frecvențe medii, când  $\delta \approx \sqrt{A}$ .



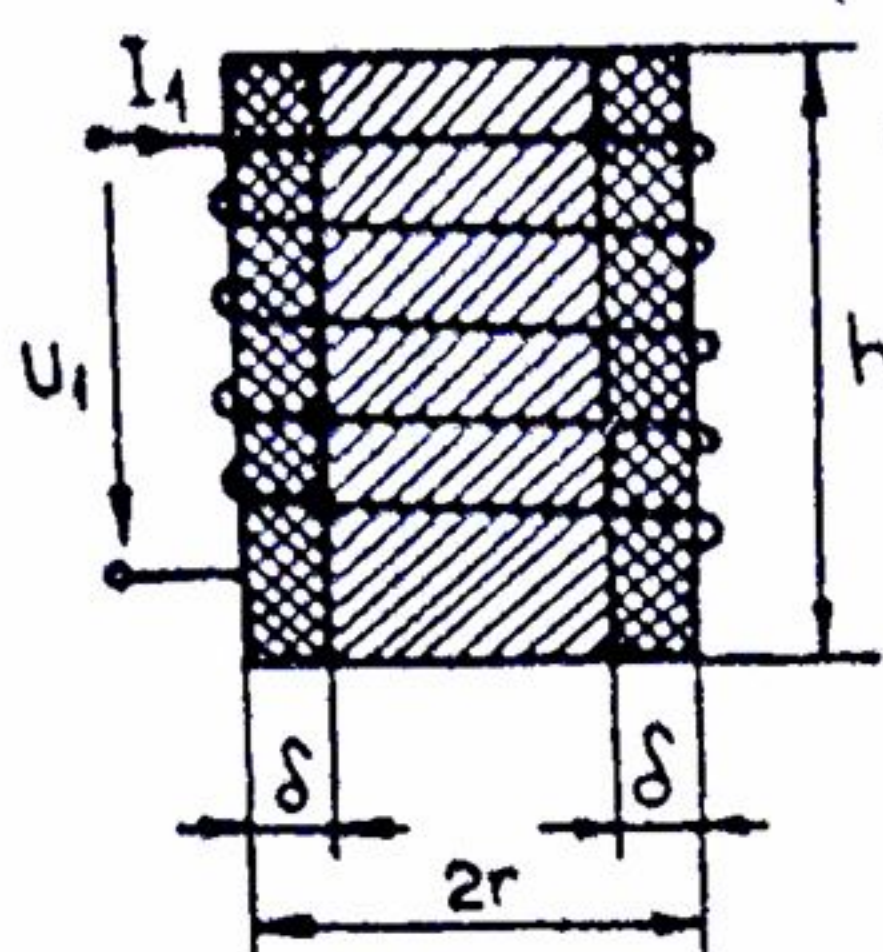


Fig. 5.103

### 8) Adâncimea de pătrundere a câmpului magnetic

Se consideră o piesă metalică cilindrică în care sunt induși curenți turbionari, datorită câmpului magnetic  $H_1$  creat de o bobină cu  $N$  spire, prin care circulă curentul de conducție  $I_1$  sinusoidal (fig. 5.103). Curenții turbionari crează la rândul lor un câmp magnetic  $H_2$ , care în axul solenoidului este nul și are sens invers față de  $H_1$ . Din cauza efectului pelicular curenții turbionari sunt situați numai pe o adâncime  $\delta$  de la suprafața piesei. Se poate deci considera că în partea centrală a piesei, atât câmpul rezultat, cât și curenții turbionari sunt nuli.

Admițând că permeabilitatea magnetică relativă a piesei  $\mu_r$  este constantă și intensitatea câmpului magnetic  $H_2$  variază liniar, având valoarea maximă  $H_1$ , din legea fluxului magnetic rezultă fluxul din piesă :

$$\phi = \int \vec{B}_2 d\vec{S} = \mu \int H_2 dS = \mu \frac{H_1}{2} 2\pi r \delta \quad (5.303)$$

unde s-a considerat că inducția magnetică  $B_2$  din piesă este paralelă cu câmpul  $H_2$  și cu vectorul elementului de suprafață  $dS$ . Câmpul  $H_2$  variind liniar s-a considerat o valoare medie ( $\frac{1}{2} H_1$ ).

Fluxul  $\phi$  variază sinusoidal, cu pulsația  $\omega$ , deci produce în piesă o t.e.m. sinusoidală

$$U_2 = \omega \phi \quad (5.304)$$

acoperită de căderea de tensiune

$$R_2 I_2 = \rho \frac{2\pi r}{\delta h} I_2 = \omega \phi \quad (5.305)$$

unde  $I_2$  este curentul indus în stratul cu curenți turbionari, pe adâncimea  $\delta$ , care se determină din legea circuitului magnetic (aplicată pe un contur  $C$  cuprinzând numai stratul cu  $I_2$ )

$$\oint_C \vec{H}_2 d\vec{l} = \int_C H_2 dl = H_1 h = I_2 \quad (5.306)$$

întrucât în spațiul dintre bobină și piesă câmpul este considerat uniform și egal cu  $H_1$ , iar în interiorul piesei câmpul rezultat este nul.

Se introduce (5.303) în (5.305),  $\rho \frac{2\pi r}{\delta h} I_2 = \omega \mu \frac{H_1}{2} 2\pi r \delta$  și se ține seama de 5.306,

$$\text{deci} \quad \delta^2 = \frac{2\rho}{\mu\omega} \frac{I_2}{H_1 h} = \frac{2\rho}{\mu\omega} \quad (5.307)$$

Înlocuind  $\mu = \mu_0 \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_r$  și  $\omega = 2\pi f$ , rezultă adâncimea de pătrundere [m]:

$$\delta = 503 \sqrt{\frac{\rho}{\mu_r f}} \quad (5.308)$$

unde  $\rho$  este rezistivitatea piesei [ $\Omega m$ ],  $\mu_r$  - permeabilitatea magnetică relativă a piesei [-], iar  $f$  - frecvența tensiunii de alimentare a bobinei inductoare [Hz].

Din (5.308) rezultă că la frecvențe joase curenții turbionari pot circula în (aproape) întreaga masă a piesei, ceea ce permite încălzirea acesteia în volum (în adâncime), iar la



frecvențe ridicate curenții turbionari circulă numai spre suprafață, ceea ce permite încălzirea ei superficială. Se constată deci că pe măsură ce crește frecvența de lucru, adâncimea de pătrundere scade și invers.

## 5.7 LINII ELECTRICE LUNGI

Liniiile electrice lungi sunt utilizate în transportul de energie electrică sau în telecomunicații și sunt formate din fire conductoare paralele a căror rezistență, inductivitate și capacitate electrică sunt aproape uniform repartizate pe fiecare porțiune a liniei. În studiul acestor circuite, denumite circuite cu parametrii repartizați, trebuie să se țină seama de faptul că există un câmp magnetic și un câmp electric repartizate în tot lungul circuitului și că transformarea de energie electromagnetică în căldură se face, de asemenea, în tot lungul circuitului. La aceste linii, curentul alternativ dintr-un conductor filiform variază în lungul liniei, deoarece o parte din sarcinile transportate încarcă suprafața conductoarelor o dată cu variația tensiunii alternative dintre aceste conductoare și deoarece o parte din curentul electric din conductoare trece prin izolantul imperfect dintre ele.

### 5.7.1 Ecuatiile liniilor omogene

Se admite cazul unei linii bifilare formată din două conductoare paralele (fig. 5.104), în care :

$r'$  - este rezistența electrică a conductoarelor pe unitatea de lungime a liniei;

$L'$  - inductivitatea proprie a liniei pe unitatea de lungime;

$C'$  - capacitatea dintre cele două conductoare pe unitatea de lungime;

$g'$  - conductanța izolației dintre cele două conductoare pe unitatea de lungime

Liniiile cu parametrii distribuiți  $r'$ ,  $L'$ ,  $C'$ ,  $g'$  de valoare constantă, în tot lungul liniei se numesc linii omogene.

Fie  $u$  tensiunea electrică dintre cele două conductoare și  $i$  intensitatea curentului în momentul  $t$  la distanța  $x$  de la sfârșitul liniei (de la bornele receptorului).

Tensiunea  $u'$  la distanța  $x + dx$  este egală cu tensiunea la distanța  $x$  plus căderile de tensiune rezistive și inductive ale celor două conductoare de lungime  $dx$  ale liniei (consecință a legii inducției electromagnetice):

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u + r' dx \cdot i + L' dx \frac{\partial i}{\partial t} \quad (5.309)$$

Intensitatea curentului  $i'$  care intră în secțiunea  $x + dx$  a liniei este egală cu suma intensității curentului care iese prin secțiunea  $x$ , a intensității curentului care trece prin dielectricul dintre conductoare și a intensității curentului care încarcă suprafața de lungime  $dx$  a conductoarelor (consecință a legii de conservare a sarcinii electrice)

$$i' = i + \frac{\partial i}{\partial x} dx = i + g' dx u' + C' dx \frac{\partial u'}{\partial t} \quad (5.310)$$



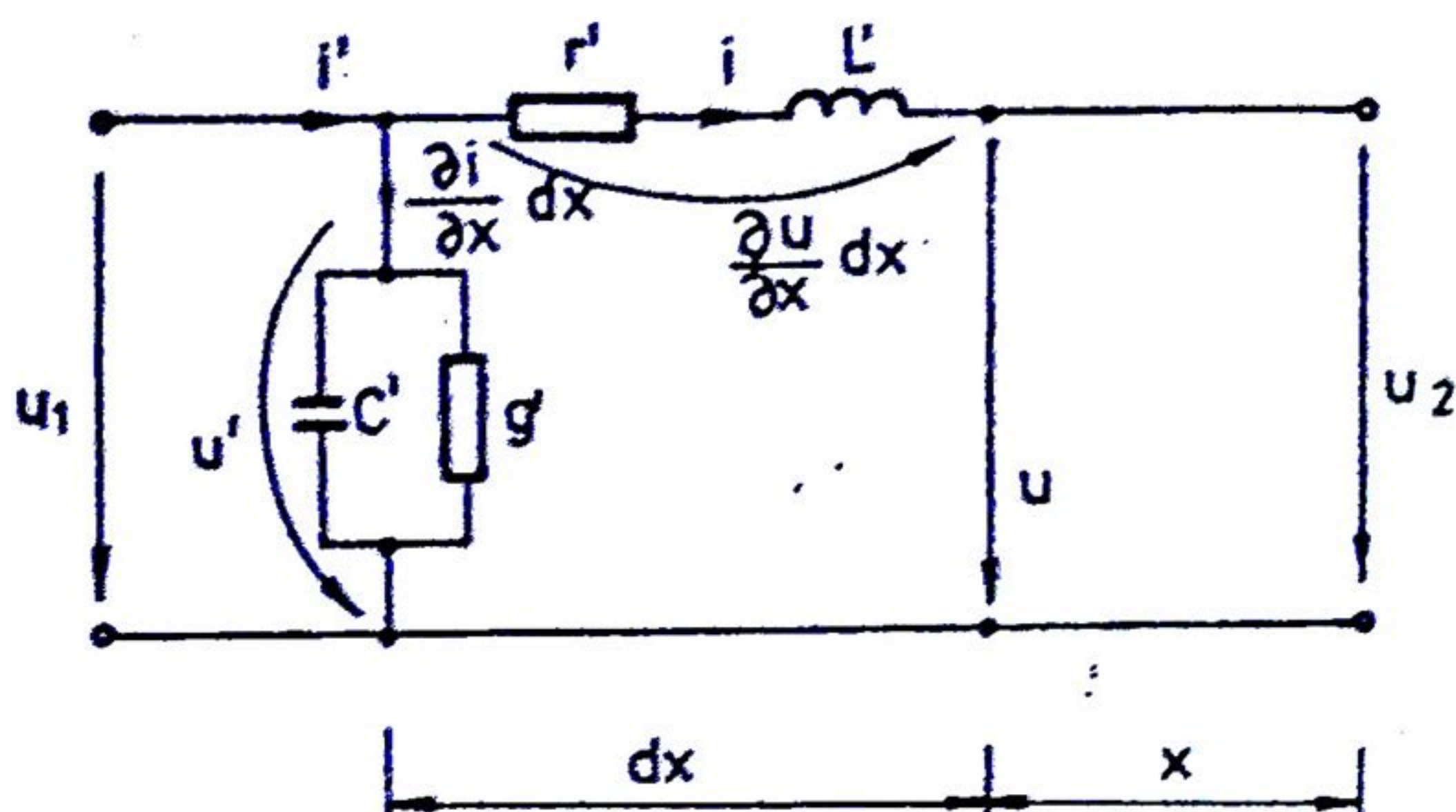


Fig.5.104

În relația 5.310 se va lua  $u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \approx u$ , deoarece  $u \gg \frac{\partial u}{\partial x}$  și  $\frac{\partial u}{\partial x} (dx)^2 \approx 0$ .

Rezultă ecuațiile liniilor omogene cu parametrii constanți (în timp)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = r'i + L' \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g'u + C' \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (5.311)$$

numite ecuațiile telegrafistilor. Aceste ecuații cu derivate parțiale permit determinarea tensiunii și a curentului ca funcții de distanța  $x$  și timpul  $t$  dacă se dau condițiile inițiale ( $t=0$ ) și la limită (la  $x=0$ ).

### 5.7.2 Rezolvarea ecuațiilor telegrafistilor

Utilizând metoda operațională transformatele Laplace ale tensiunii și curentului sunt funcțiile de  $x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[i] &= \int_0^{\infty} i(x,t) e^{-st} dt = I(s,x) \\ \mathcal{L}[u] &= \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} dt = U(s,x) \end{aligned} \quad (5.312)$$

Pe baza teoremelor fundamentale ale metodei operaționale, în ipoteza unor condiții inițiale de zero  $u(0,x) = 0$ ,  $i(0,x) = 0$ , se deduc ecuațiile diferențiale corespunzătoare ecuațiilor cu derivate parțiale (5.311):

$$\begin{cases} \frac{\partial U(s,x)}{\partial x} = (r' + sL') I(s,x) \\ \frac{\partial I(s,x)}{\partial x} = (g' + sC') U(s,x) \end{cases} \quad (5.313)$$



Definind exponentul de propagare (operațional)

$$\gamma^2 = (r' + sL')(g' + sC'), \quad (5.314)$$

prin eliminarea transformatei curentului din sistemul (5.313) se obține ecuația diferențială a imaginii tensiunii:

$$\frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial x^2} - \gamma^2 U(s, x) = 0 \quad (5.315)$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale omogene cu coeficienți constanți are forma :

$$U(s, x) = K_1 e^{+\gamma x} + K_2 e^{-\gamma x} \quad (5.316)$$

unde  $K_1$  și  $K_2$  sunt constante arbitrare.

Definind impedanța caracteristică (operațională):

$$Z_c = \sqrt{\frac{r' + sL'}{g' + sC'}} \quad (5.317)$$

din (5.316) și (5.313) se obține imaginea curentului:

$$I(s, x) = \frac{1}{Z_c} (K_1 e^{+\gamma x} - K_2 e^{-\gamma x}) \quad (5.318)$$

Presupunând date condițiile la limită:

$$\begin{cases} u(t, 0) = u_2(t), \\ i(t, 0) = i_2(t) \end{cases} \quad (5.319)$$

respectiv

$$U(s, 0) = \mathcal{L}[u_2(t)] = U_2 \quad (5.320)$$

$$I(s, 0) = \mathcal{L}[i_2(t)] = I_2$$

rezultă valorile constantelor arbitrare :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}(U_2 + Z_c I_2) \\ K_2 = \frac{1}{2}(U_2 - Z_c I_2) \end{cases} \quad (5.321)$$

În cazul general când imaginile (5.316), (5.318) au la exponent o funcție (5.314) irațională de  $s$ , găsirea funcțiilor original  $u$  și  $i$  este foarte dificilă.

Din acest motiv se consideră un caz idealizat, cazul particular important al unei linii fără pierderi, pentru care se obține :

$$\gamma = s\sqrt{L'C'} \quad (5.322)$$

și

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (5.323)$$

Dacă este îndeplinită condiția lui Heaviside :

$$\frac{r'}{L'} = \frac{g'}{C'} \quad (5.324)$$

se zice că linia este fără distorsiuni, adică este fără defazaje între mărimile de intrare și de ieșire. În acest caz, constanta de propagare (5.314) devine :

$$\gamma = \sqrt{(r' + sL')(g' + sC')} = \sqrt{L' \left( \frac{r'}{L'} + s \right) C' \left( \frac{g'}{C'} + s \right)}$$



$$\gamma = \left( \frac{r'}{L'} + s \right) \sqrt{L'C'} = \left( \frac{g'}{C'} + s \right) \sqrt{L'C'} \quad (5.325)$$

Schimbând operatorul  $s$  în  $j\omega$  (vezi transformata Fourier), rezultă

$$\underline{\gamma} = \sqrt{r'g'} + j\omega \sqrt{L'C'} = a + jb, \quad (5.326)$$

adică se deduc valorile constantei de atenuare :

$$a = \sqrt{r'g'} \quad (5.327)$$

și constanta de fază :

$$b = \sqrt{L'C'}\omega \quad (5.328)$$

Viteza de propagare a undei este prin definiție :

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (5.329)$$

iar impedanța caracteristică are valoarea

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r' + j\omega L'}{g' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{r'}{g'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (5.330)$$

La liniile fără pierderi (liniile idealizate)  $r' = 0$  și  $g' = 0$ , se respectă (5.324), dar constanta de atenuare este

$$a = \sqrt{r'g'} = 0. \quad (5.331)$$

Se remarcă următoarele cazurile particulare importante în practică:

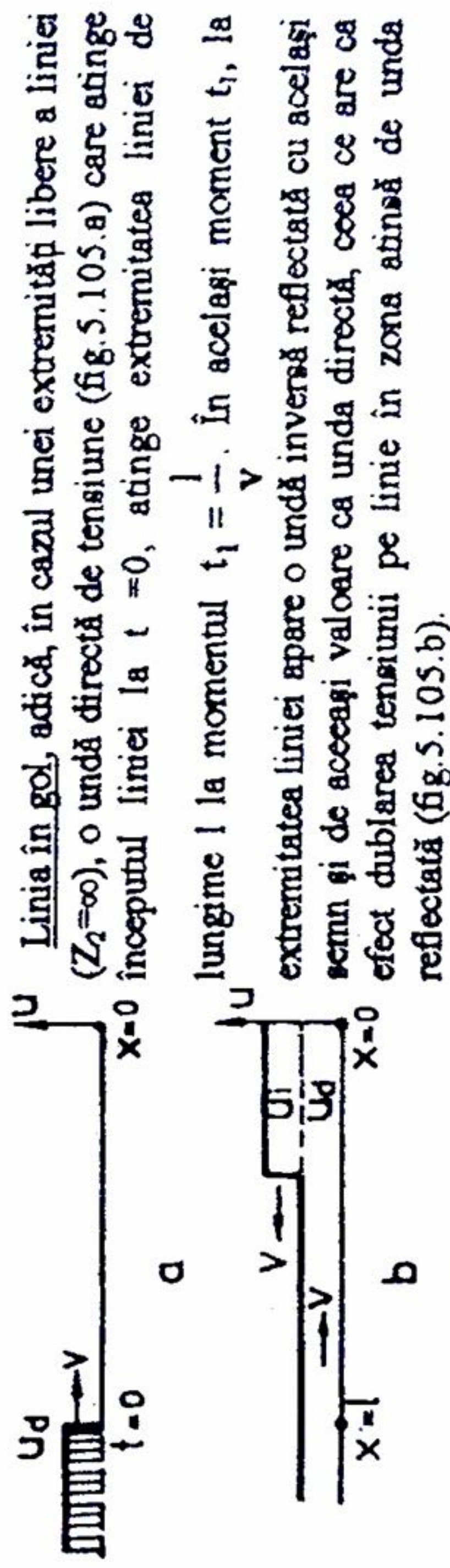


Fig. 5.105

Linia în scurtcircuit, adică, în cazul unei extremități

legate printr-un conductor de impedanță nulă  $Z_2 = 0$ ,

$U_2 = 0$ , cu  $\frac{U_2}{Z_2} = I_2$ , rezultă că, în condițiile de la

$x=l$

linia în gol în momentul  $t_1$  apare o undă inversă de

tensiune egală și de semn contrar cu unda directă de tensiune pe care o compensează. Rezultă o undă inversă de curent egală cu unda directă, ceea ce produce o dublare a curentului de scurtcircuit pe linie (fig. 5.106).

Linia adaptată care prin definiție are la ieșire un receptor de impedanță egală cu impedanța caracteristică; nu are unde inverse.



### 5.7.3 Linii lungi în regim permanent

Pentru reprezentările în complex simplificat, corespunzătoare regimului sinusoidal, din (5.316), (5.318) și (5.321) rezultă:

$$\underline{U}(x) = \underline{K}_1 e^{\gamma x} + \underline{K}_2 e^{-\gamma x} \quad (5.332)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{Z_c} (\underline{K}_1 e^{\gamma x} - \underline{K}_2 e^{-\gamma x}) \quad (5.333)$$

$$\underline{K}_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + Z_c \underline{I}_2) \quad (5.334)$$

$$\underline{K}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - Z_c \underline{I}_2) \quad (5.335)$$

Din relațiile de mai sus se obține forma complexă a ecuațiilor telegrafistilor:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma x) + Z_c \underline{I}_2 \operatorname{sh}(\gamma x) \\ \underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma x) + \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma x) \end{cases} \quad (5.336)$$

unde impedanța caracteristică complexă  $Z_c$  și exponentul complex de propagare  $\gamma$  se obține prin înlocuirea  $s \rightarrow j\omega$  din (5.314) și (5.317).

În particular, reprezentările în complex simplificate ale tensiunii și curentului la intrarea liniei de lungime  $l$  se obține pentru  $x = l$ :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + Z_c \underline{I}_2 \operatorname{sh}(\gamma l) \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma l) + \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) \end{cases} \quad (5.337)$$

Aplicația 1. O linie monofază este construită din conducte de cupru având secțiunea  $s$  și distanța dintre ele  $d$ . Tensiunea la sfârșitul liniei trebuie menținută, la funcționarea în gol, la valoarea  $U_2$ . Să se determine parametrii liniei, se neglijează conductanța specifică (perdițiunea lineică)  $G' \approx 0$  și valorile mărimilor de la intrarea liniei. Aplicație numerică:  $s = 35 \text{ mm}^2$ ;  $d = 1,5 \text{ m}$ ;  $U_2 = 110 \text{ kV}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $l = 200 \text{ km}$ ;  $\rho_{\text{cu}} = 0,0175 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$ .

Soluție: Parametrii liniei se calculează cu relațiile:

$$R' = 2 \frac{\rho}{s}; \quad L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}; \quad C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}} \quad (5.338)$$

iar mărimile de la intrare cu expresiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 Z_0 \operatorname{sh} \gamma l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l \end{cases} \quad \text{și deoarece linia}$$

funcționează în gol,  $\underline{I}_2 = 0$  și se obține:  $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l$ ;  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma l$  în care

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') j\omega C'} \quad \text{și} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{j\omega C'}}$$



Cu valorile numerice din enunț se obțin:

$$R' = 2 \frac{0,0175 \cdot 10^{-6}}{35 \cdot 10^{-6}} = 10^{-3} \Omega / m = 1 \Omega / km; s = \pi a^2; a = 3,33 \text{ mm};$$

$$L' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \ln \frac{1,5}{3,33 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 6,1 = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} = 2,44 \text{ mH/km}; \omega L' = 0,76 \Omega / km.$$

$$C' = \frac{\pi \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}{\ln \frac{1,5}{3,33 \cdot 10^{-3}}} = \frac{10^{-9}}{36 \cdot 6,1} = 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 4,5 \cdot 10^3 \mu\text{F/km}; \omega C' = 1,41 \cdot 10^6 \text{ S/km}$$

Constanta de propagare are valoarea:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(1 + j0,76)j1,41 \cdot 10^{-6}} \approx 10^{-3} \sqrt{j1,41} = 1,2 \cdot 10^{-3} \sqrt{j} = 1,2 \cdot 10^{-3} \sqrt{e^{j\pi/2}} =$$

$$= 1,2 \cdot 10^{-3} e^{j\pi/4} = 1,2 \cdot 10^{-3} \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = 0,85 \cdot 10^{-3} (1 + j) [\text{km}^{-1}]$$

și  $\underline{\gamma} \cdot l = 0,17(1+j)$ ,  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha = \beta = 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$ , iar impedanța caracteristică:

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{1 + j0,76}{j1,41 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \sqrt{0,53 - j0,7} = 10^3 \sqrt{0,87 e^{-j53^\circ}} = 932 e^{-j26,5^\circ} = (834 - j415) \Omega.$$

$$\text{Cu } \underline{\text{ch}} \underline{\gamma} l = \text{ch}(\alpha + j\beta)l = \text{ch} \alpha l \cos \beta l + j \text{sh} \alpha l \sin \beta l$$

$$\underline{\text{sh}} \underline{\gamma} l = \text{sh}(\alpha + j\beta)l = \text{sh} \alpha l \cos \beta l + j \text{ch} \alpha l \sin \beta l \text{ și } \text{ch} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2};$$

$$\text{sh} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{2} \text{ se obține } \text{ch} \alpha l = 1,014; \text{sh} \alpha l = 0,17; \cos \beta l = 0,985; \sin \beta l = 0,17; \underline{\text{ch}} \underline{\gamma} l =$$

$$0,998 + j0,0289; \underline{\text{sh}} \underline{\gamma} l = 0,167 + j0,172 \text{ și}$$

$$\underline{U}_1 = 110 \cdot 10^3 (0,998 + j0,0289) = (109,78 + j3,179) 10^3 \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{110 \cdot 10^3}{834 - j415} (0,167 + j0,172) = (8,56 + j26,86) \text{ A}.$$

**Aplicația 2.** Printr-o linie de transport monofazăată, practic fără pierderi, se alimentează un consumator inductiv cu putere  $P_2$  factor de putere  $\cos \varphi_2$  și tensiunea  $U_2$ . Cunoșcând parametrii lineici  $L'$  și  $C'$  se cere să se determine mărimile de la începutul liniei  $U_1$ ,  $I_1$  și să se reprezinte în planul complex. **Aplicație numerică:**  $L' = 1 \text{ mH/km}$ ;  $C' = 0,011 \mu\text{F/km}$ ;  $l = 400 \text{ km}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $U_2 = 110 \text{ kV}$ ;  $P_2 = 30 \text{ MW}$ ;  $\cos \varphi_2 = 0,8$ .

**Soluție:** Mărimile de la începutul liniei se exprimă funcție de cele de la sfârșitul ei cu relațiile:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \underline{\text{ch}} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_0 \underline{I}_2 \underline{\text{sh}} \underline{\gamma} l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \underline{\text{ch}} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \underline{\text{sh}} \underline{\gamma} l \end{cases}$$



Constanta de propagare a liniei are valoarea :

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'} = j\omega\sqrt{L'C'} = j2\pi 50\sqrt{10^{-6} \cdot 1,1 \cdot 10^{-11}} = j1,05 \cdot 10^{-3} \text{ 1/m}$$

Alegând tensiunea  $\underline{U}_2$  după axa reală  $\underline{U}_2 = U_2$ ; curentul  $\underline{I}_2$  va putea fi exprimat în complex în forma  $\underline{I}_2 = I_2(\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2)$ , deoarece consumatorul are caracter inductiv și curentul este defazat în urmă față de tensiune. Din  $P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2$  rezultă :

$$I_2 = \frac{30 \cdot 10^6}{110 \cdot 10^3 \cdot 0,8} = 340 \text{ A și în complex: } \underline{I}_2 = 340(0,8 - j0,6) = 273 - j205$$

$$\text{Impedanța caracteristică a liniei are expresia: } \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{10^{-6}}{1,1 \cdot 10^{-11}}} = 300 \Omega$$

Funcțiile hiperbolice din relațiile lui  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$  pot fi înlocuite cu funcții trigonometrice, deoarece  $\gamma = j\beta$  și  $\text{ch}\beta l = \cos\beta l$ ;  $\text{sh}\beta l = j\sin\beta l$  și cu  $\beta l = 1,05 \cdot 10^{-3} \cdot 400 = 0,42 \text{ rad} = 24^\circ$  se obține:

$$\underline{U}_1 = 110 \cdot 10^3 \cos 24^\circ + (273 - j205) \cdot 300 j \sin 24^\circ,$$

$$\underline{I}_1 = (273 - j205) \cos 24^\circ + \frac{110 \cdot 10^3}{300} j \sin 24^\circ$$

Efectuând calculele rezultă:  $\underline{U}_1 = (125 + j33,4)10^3 \text{ V}$ ;  $U_1 = 130 \text{ kV}$ ;  $\underline{I}_1 = (248 - j38) \text{ A}$ ;  $I_1 = 250 \text{ A}$

Deoarece linia considerată este fără pierderi, puterea de la începutul liniei  $P_1$  trebuie să fie egală cu cea de la consumator  $P_2$ ; într-adevăr :

$$P_1 = \text{Re}\{\underline{U}_1 \underline{I}_1^*\} = \text{Re}\{(125 + j33,4)(248 + j38)10^3\} = 30 \cdot 10^6 \text{ W} = P_2$$

Factorul de putere la începutul liniei are valoarea :

$$\cos\varphi_1 = \frac{P_1}{U_1 I_1} = \frac{30 \cdot 10^6}{130 \cdot 10^3 \cdot 250} = 0,92 > \cos\varphi_2; \varphi_1 < \varphi_2$$

Mărimile de la intrare sunt prezentate în planul complex în fig.5.107.

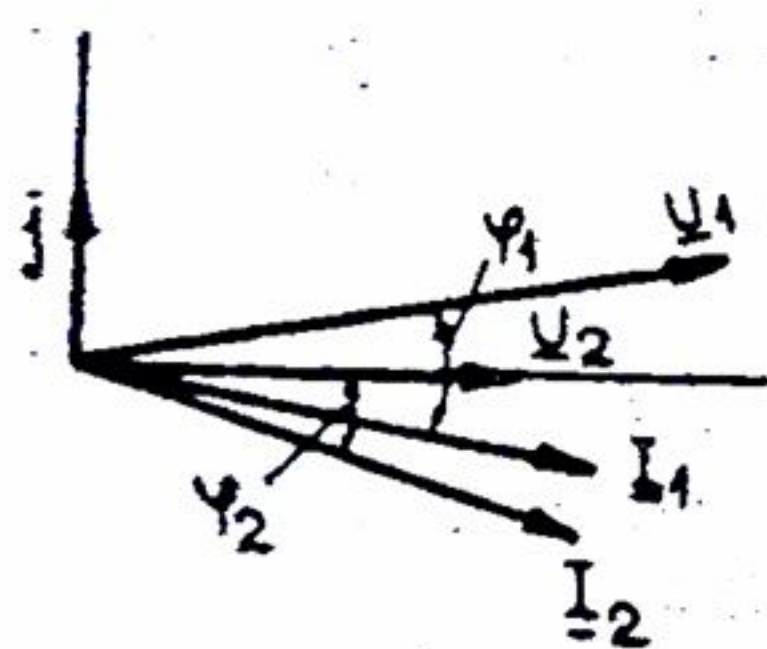


Fig.5.107

**Aplicația 3.** O linie fără pierderi, de lungime  $l$  are impedanța de intrare la funcționarea în gol  $\underline{Z}_{10}$  și scurtcircuit  $\underline{Z}_{1k}$ . Să se determine parametrii liniei  $L'$  și  $C'$ .  
**Aplicație numerică:**  $\underline{Z}_{10} = -j1000\Omega$ ;  $\underline{Z}_{1k} = j400\Omega$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $l = 200 \text{ km}$ .

$$\text{Soluție: Din expresia impedanței de intrare: } \underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \text{sh}\underline{\gamma}l}{\underline{I}_2 \text{ch}\underline{\gamma}l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \text{sh}\underline{\gamma}l}$$

obține la funcționarea în gol,  $\underline{I}_2 = 0$ :  $\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_0 \frac{\text{ch}\underline{\gamma}l}{\text{sh}\underline{\gamma}l}$  respectiv la funcționarea în

scurtcircuit,  $\underline{U}_2 = 0$ :

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_0 \frac{\text{sh}\underline{\gamma}l}{\text{ch}\underline{\gamma}l}. \text{Linia fiind fără pierderi } \underline{\gamma} = j\beta \text{ și } \text{sh}\underline{\gamma}l = j\sin\beta l; \text{ch}\underline{\gamma}l = \cos\beta l, \text{ rezultă :}$$



$$\underline{Z}_{10} = -j\underline{Z}_0 \operatorname{ctg}\beta l; \underline{Z}_{1k} = j\underline{Z}_0 \operatorname{tg}\beta l. \text{ Din } \underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_0^2 \text{ se obține } \underline{Z}_0 = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1k}} \text{ iar din}$$

$$\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{10}} = -\operatorname{tg}^2\beta l \text{ rezultă: } \operatorname{tg}\beta l = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{10}}} \text{ și } \beta l = \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{10}}}. \text{ Înlocuind } \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ și}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} \text{ se determină } L' \text{ și } C'.$$

Cu valorile numerice din enunț rezultă :

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{-j \cdot 10^3 \cdot j \cdot 4 \cdot 10^2} = 632 \, \Omega; \operatorname{tg}\beta l = \sqrt{-j \frac{4 \cdot 10^2}{-j \cdot 10^3}} = 0,632 \text{ și } \beta l = 32^\circ = 0,56 \text{ rad;}$$

$$\beta = \frac{0,56}{200} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km și } \frac{L'}{C'} = \underline{Z}_0^2 = 4 \cdot 10^5 \, [\Omega^2];$$

$$L'C' = \frac{\beta^2}{\omega^2} = \frac{2,8^2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{(2\pi 50)^2} = 7,84 \cdot 10^{-17} \, [s^2/m^2]. \text{ Efectuând calculele se obține: } L'$$

$$= 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} = 5,6 \text{ mH/km}, C' = 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ F/m} = 0,014 \, \mu\text{F/km}.$$

Aplicația 4. La cablurile pentru transportul energiei electrice, la frecvențe joase, reactanța lineică  $\omega L'$  este mică în comparație cu rezistența lineică  $R'$  și perdanța lineică  $G'$  este mică față de  $\omega C'$ . Să se determine în acest caz expresiile pentru constanta de propagare, cea de atenuare și de fază și impedanța caracteristică. Aplicație numerică:  
 $R' = 10 \, \Omega/\text{km}; C' = 0,06 \, \mu\text{F/km}; f = 50 \text{ Hz}$

Soluție. Din (5.314) și (5.317), cu  $L' = G' = 0, s = j\omega$ , rezultă :

$$\underline{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\omega C R} (1 + j); \alpha = \beta = \frac{1}{2} \sqrt{2 \omega C R}; \underline{Z}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R}{\omega C}} (1 - j)$$

$$\alpha = \beta = 9,7 \cdot 10^{-3} \, 1/\text{km}; \underline{Z}_0 = 515(1-j); v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi f}{\beta} = 32,4 \cdot 10^3 \text{ km/s.}$$



## CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

Regimul tranzitoriu este un regim nestaționar, corespunzător trecerii circuitelor electrice de la un regim permanent la un alt regim permanent. Durata regimului tranzitoriu este, teoretic, infinită, practic însă, această durată se apreciază la ordinul sutimilor, zecimilor și unităților de secundă, sau, foarte rar, la ordinul minutilor. Regimurile tranzitorii apar în cazul conectării și deconectării circuitelor electrice de la sursele de tensiune, precum și în cazul variației în trepte a valorii parametrilor R, L, M, C ai circuitelor electrice.

Rezolvarea circuitelor electrice liniare în regim tranzitoriu constă în determinarea tensiunilor și curenților tranzitorii din circuit, fie prin metoda rezolvării directe a ecuațiilor integro-diferențiale care caracterizează circuitul, fie prin metode operaționale, mult mai eficiente, care folosesc transformatele Laplace și Fourier.

### 6.1 METODA REZOLVĂRII DIRECTE A ECUATIILOR DIFERENȚIALE

Metoda constă în scrierea ecuațiilor diferențiale, sau integro-diferențiale, care caracterizează circuitul, rezolvarea lor, trasarea curbilor de variație, în timpul de la zero la infinit, a tensiunilor sau curbilor de variație, în timpul de la zero la infinit, a tensiunilor sau curenților tranzitorii din circuit, precum și în determinarea altor mărimi specifice circuitului electric analizat.

#### 6.1.1 Circuite cu rezistență și inductivitate

Un circuit cu rezistența R și inductivitatea L legate în serie și alimentate la tensiunea momentană u, produce în circuit curentul momentan i. Aplicând circuitului teorema a doua a lui Kirchhoff se obține ecuația diferențială neomogenă :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t) \quad (6.1)$$

care are soluția

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (6.2)$$

Componenta  $i_1(t)$  are expresia

$$i_1(t) = Ae^{\frac{R}{L}t} \quad (6.3)$$

și reprezintă soluția generală a ecuației omogene

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (6.4)$$

iar componenta  $i_2(t)$  este o soluție particulară a ecuației (6.1)

Constanta A se determină din condiția inițială, la timpul  $t = 0$ -(momentul dinaintea cuplării sau comutării circuitului) și  $t = 0+$  (momentul începerii regimului tranzitoriu studiat):



(6.5)  
 $i(0_-) = i(0_+) = i_0$ ,  
 care exprimă continuitatea curentului  $i$  (deci și a fluxului magnetic) din bobină în momentul  $t = 0$  al cuplării (sau comutării) circuitului.

Aplicația 1. Să se determine curentul  $i$  dintr-un circuit cu rezistența  $R$  și inductivitatea  $L$  legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală de curent continuu, cu t.e.m.  $U = \text{const}$ .

Din (6.1) se obține  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}$ , cu soluția  $i(t) = i_1 + i_2 = Ae^{\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}$ , unde

$i_1 = Ae^{\frac{R}{L}t}$  reprezintă componenta tranzitorie, iar  $i_2 = \frac{U}{R}$  componenta permanentă a

curentului  $i$  din circuit. Constanta  $A$  se obține din ecuația  $i(0) = \frac{U}{R} + A = 0$ , deci :

$A = -\frac{U}{R}$  și rezultă (fig. 6.1) :

$$i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (6.6)$$

Teoretic, doar pentru  $t = \infty$  se obține regimul permanent  $i = \frac{U}{R}$ , practic, însă, se apreciază că regimul tranzitoriu se amortizează după trei sau patru constante de timp  $\left( t = 3T_0 = 3\frac{L}{R} \right)$ , când curentul este  $i(3T_0) = \frac{U}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0,95 \frac{U}{R}$

Constanta de timp  $T_0$  reprezintă subtangenta la curba  $i$ , în orice punct  $M$ .

Aplicația 2. Să se studieze regimul tranzitoriu produs prin decuplarea bornelor de alimentare ale circuitului cu rezistența  $R$  și inductivitatea  $L$ , care a funcționat în regim

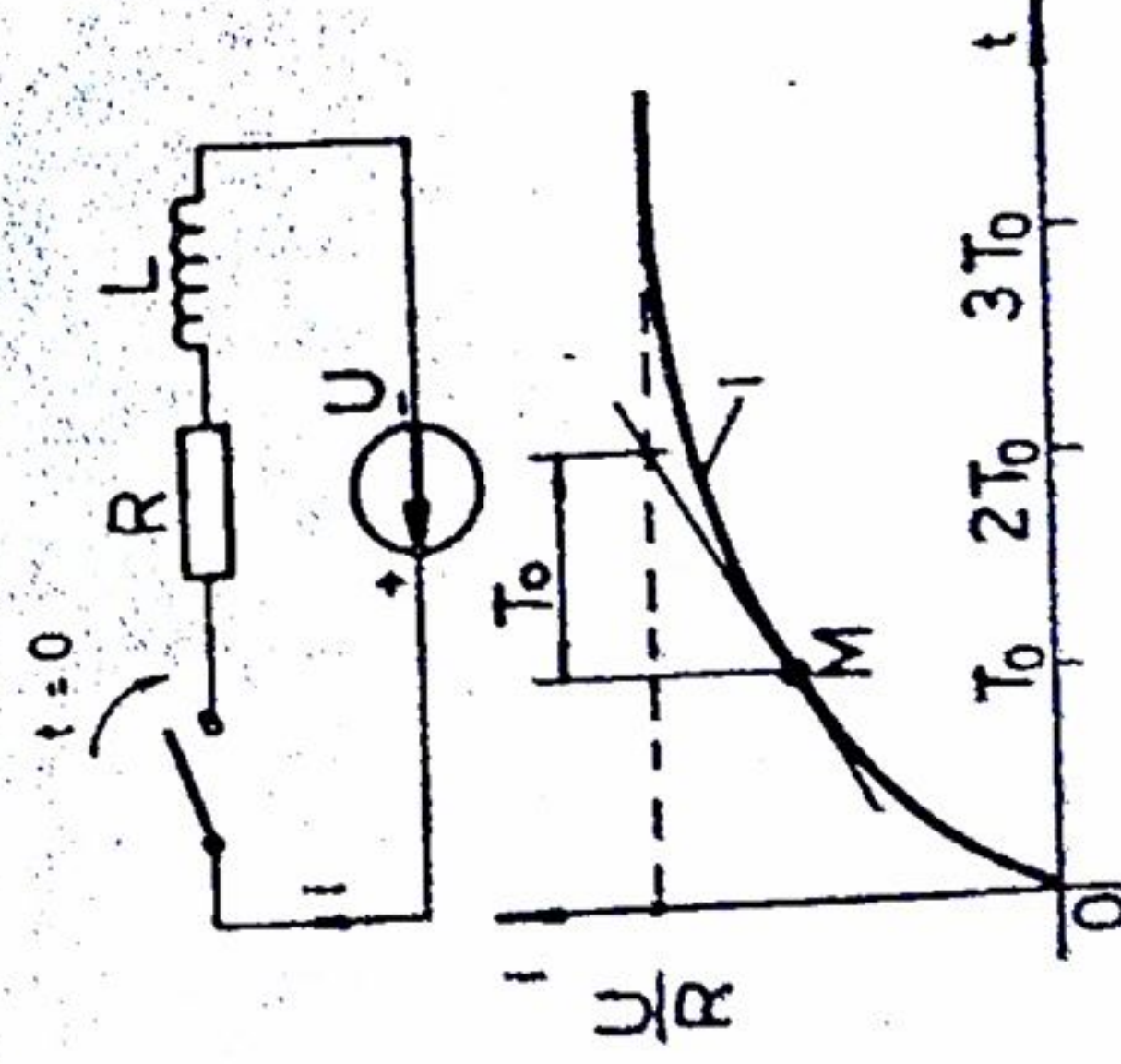


Fig. 6.1

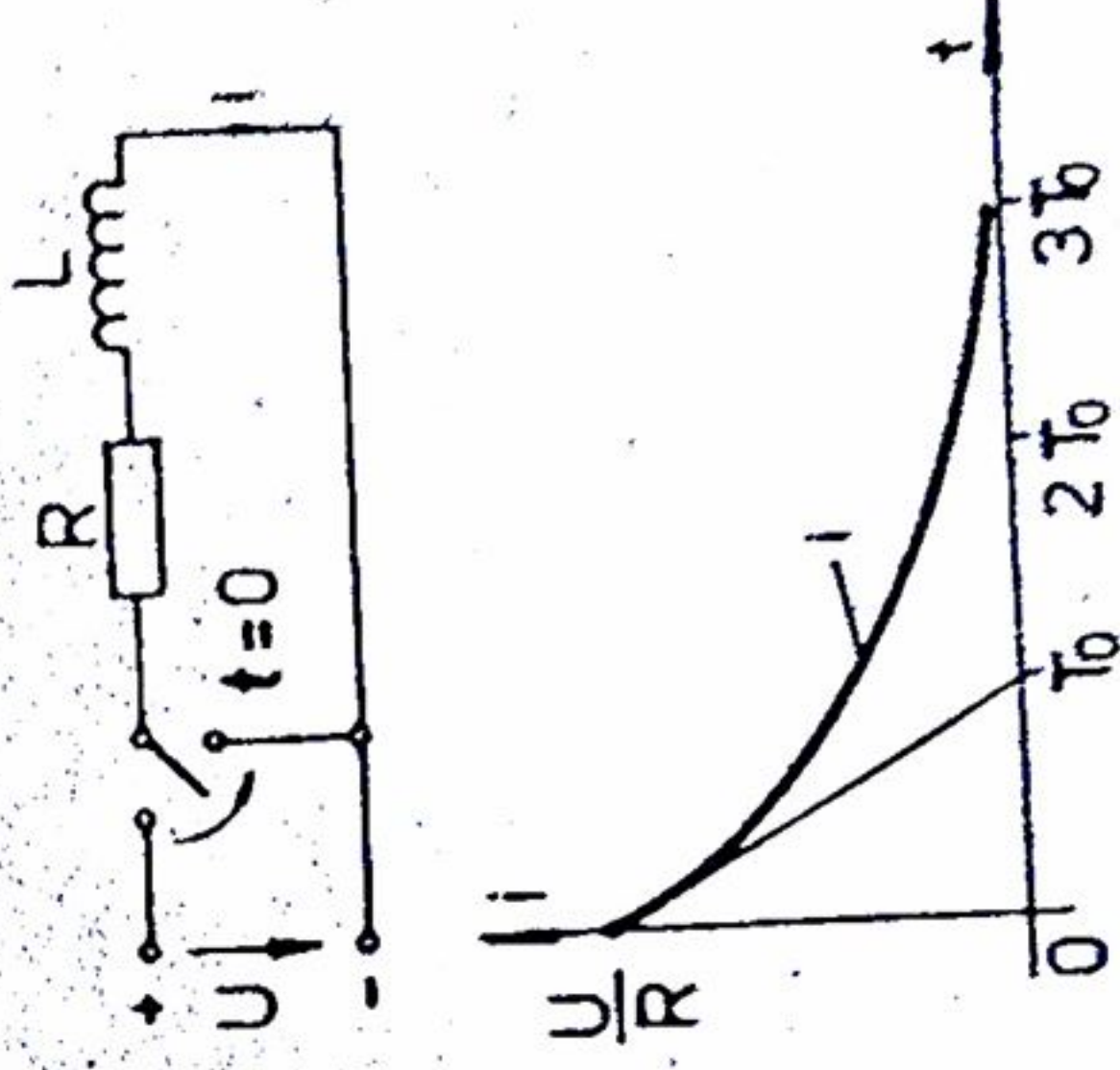


Fig. 6.2



staționar sub tensiunea la borne  $U$  (fig.6.2) și în același moment,  $t = 0$ , circuitul  $R, L$  se scurtcircuitază.

Din (6.1) se obține  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$ , cu soluția:  $i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

Constanta  $A$  se determină din condiția inițială:  $i(0) = \frac{U}{R} = A$  și rezultă (constanta de

$$\text{timp } T_0 = \frac{L}{R}): \quad i(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{T_0}}. \quad (6.8)$$

Aplicația 3. Să se determine curentul  $i$  dintr-un circuit cu rezistența  $R$  și inductivitatea  $L$  legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală sinusoidală cu t.e.m.:  $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma)$ , cuplarea având loc la timpul  $t = 0$ , când  $u$  are valoarea  $u = \sqrt{2}U \sin \gamma$ . Din (6.1) se obține ecuația diferențială neomogenă:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\sqrt{2}U}{L} \sin(\omega t + \gamma) \quad (6.9)$$

a cărei soluție reprezintă o sumă dintre soluția generală a ecuației omogene (componenta tranzitorie):

$$i_1 = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (6.10)$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene (6.9). Se alege ca soluție particulară chiar soluția de regim permanent:

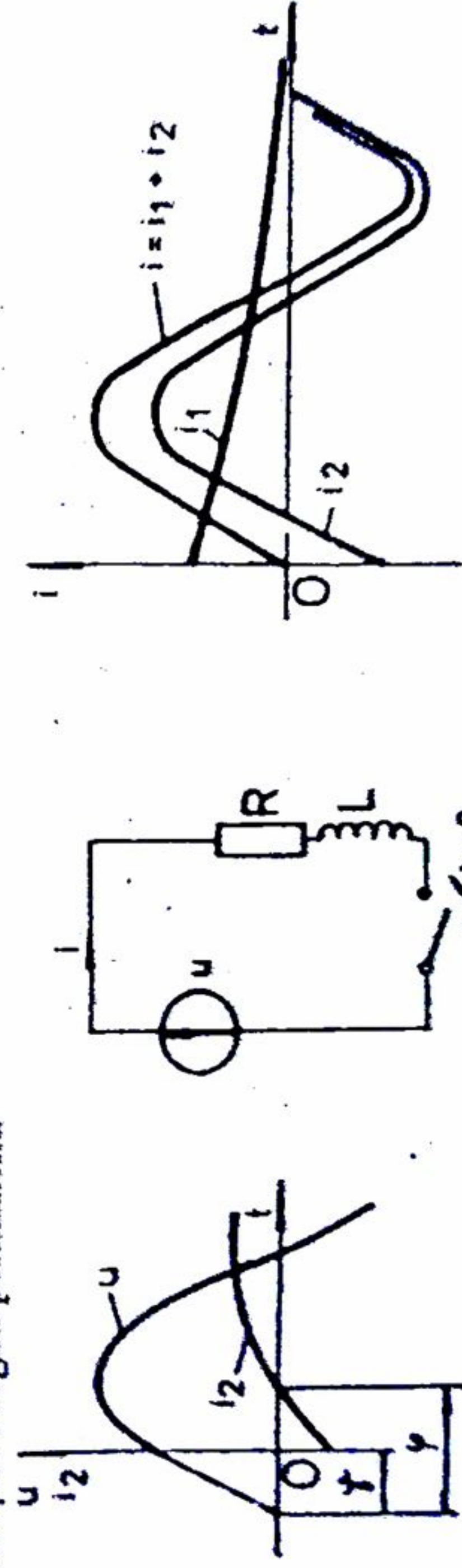


Fig.6.3

$$i_2 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma - \varphi) \quad (6.11)$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ și } \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \quad (6.12)$$

Constanta  $A$  se determină din condiția inițială,

$$i(0) = i_1(0) + i_2(0) = A + \sqrt{2}I \sin(\gamma - \varphi) = 0 \quad (6.13)$$

obținându-se rezultatul (fig.6.3) ( $\gamma < \varphi$ ):



$$i(t) = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I \left[ \sin(\varphi - \gamma) e^{-\frac{R}{L}t} + \sin(\omega t + \gamma - \varphi) \right] \quad (6.14)$$

Dacă cuplarea are loc la timpul  $t = 0$ , când  $u = 0$ , atunci

$$i(t) = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I \left[ \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} + \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (6.15)$$

Dacă cuplarea are loc la un moment  $t = 0$ , când  $\gamma = \varphi$ , componenta tranzitorie dispare, iar curentul are valoarea:  $i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$ . Dacă  $\gamma > \varphi$  rezultă o componentă tranzitorie  $i_1 < 0$ .

### 6.1.2 Circuite cu rezistență și capacitate

Se consideră un circuit cu rezistența  $R$  și capacitatea  $C$  legate în serie și alimentate la tensiunea momentană  $u$ , care produce în circuit curentul momentan  $i$ . Se obține ecuația diferențială neomogenă (fig. 6.4) :

$$Ri + u_c = u, \quad (6.16)$$

unde 
$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt, \quad (6.17)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad (6.18)$$

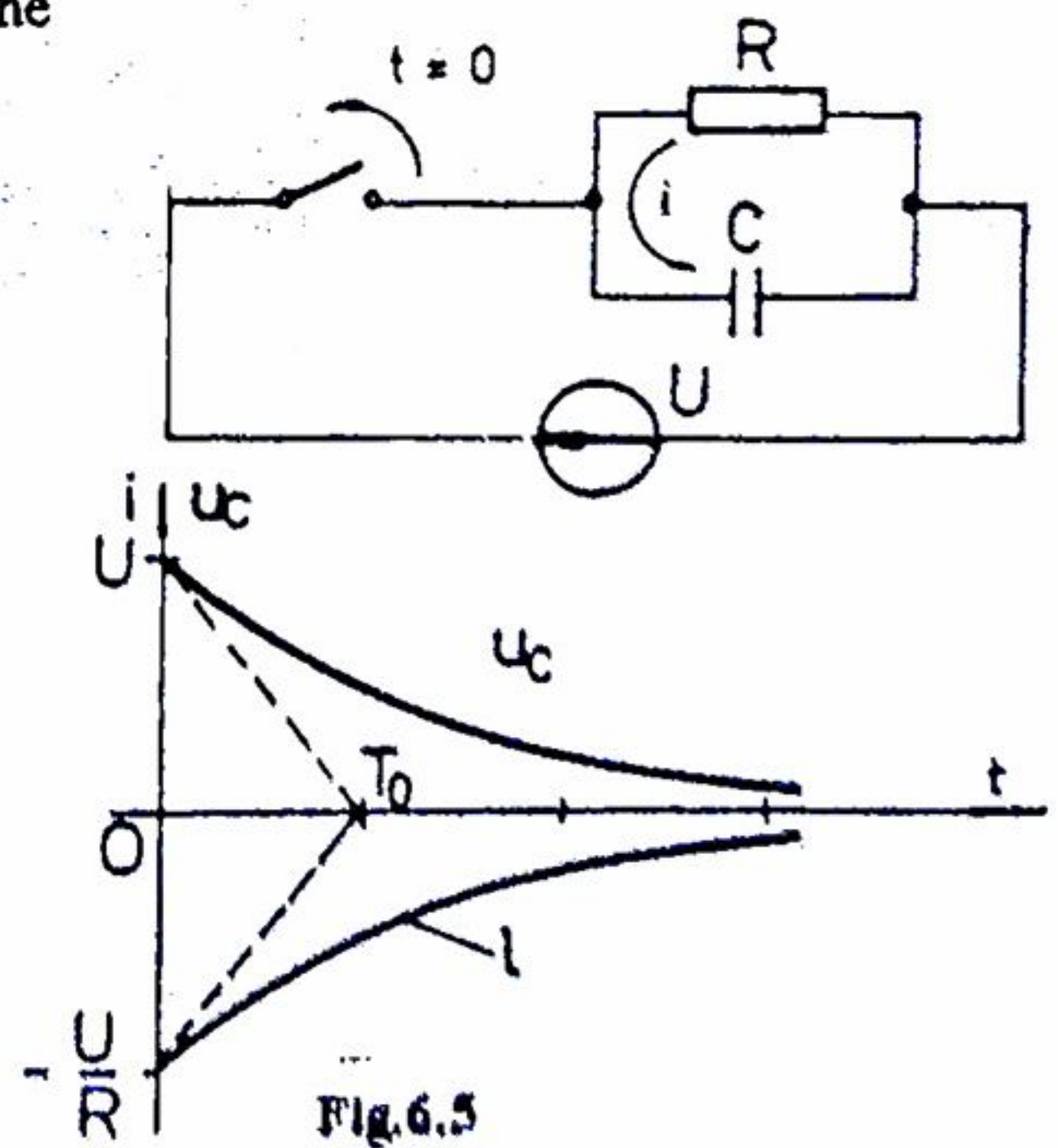
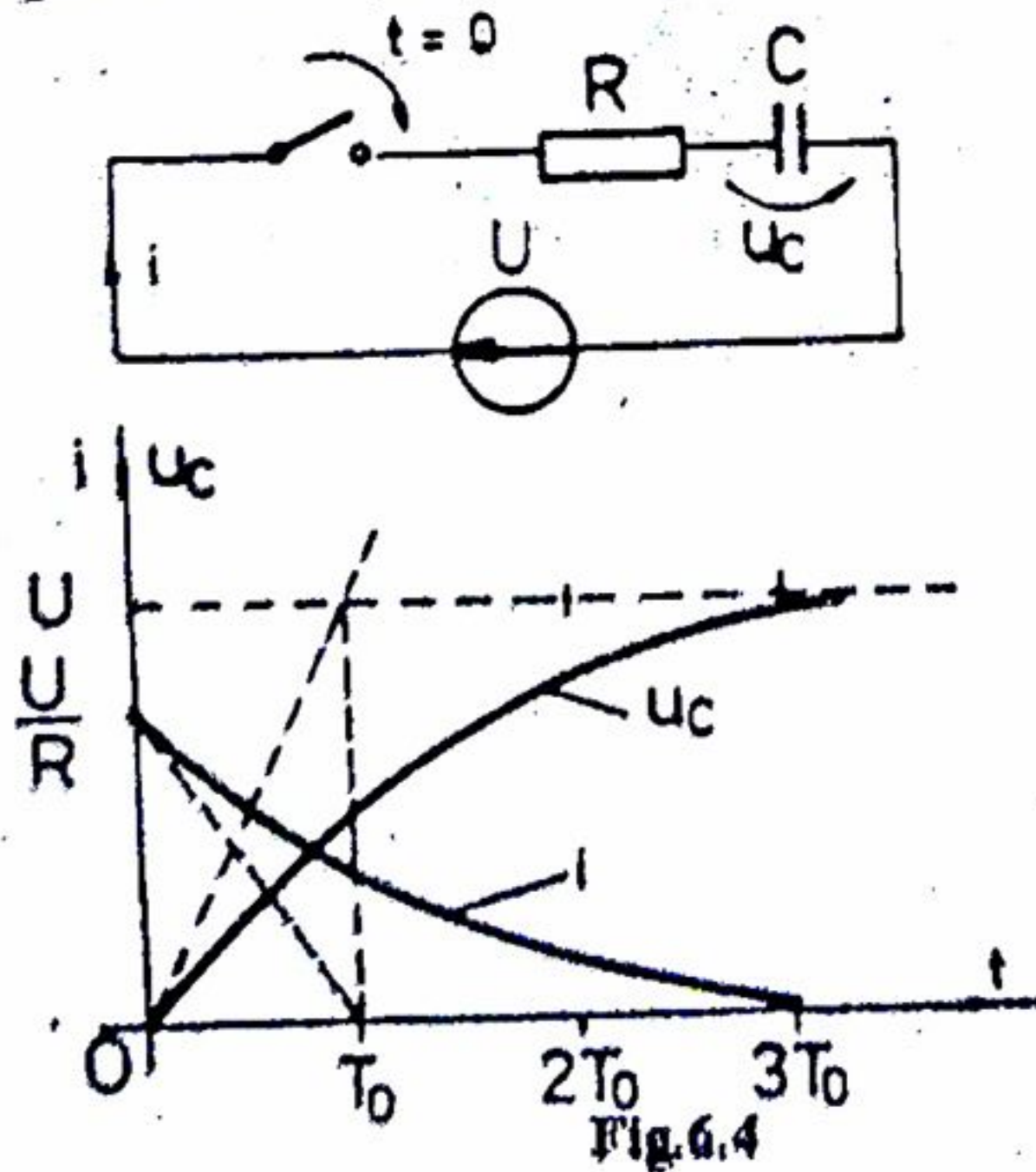
Din fig. (6.16) și (6.18) se obține ecuația diferențială (6.19) și soluția ei (6.20) :

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u, \quad (6.19)$$

$$u_c(t) = u_1(t) + u_2(t). \quad (6.20)$$

Componenta  $u_1(t)$  are expresia și reprezintă soluția generală a ecuației omogene

$$u_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}, \quad (6.21)$$





$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0, \quad (6.22)$$

iar componenta  $u_2(t)$  este o soluție particulară a ecuației (6.16). Constanta  $A$  se determină din condiția inițială,

$$u_c(0_+) = u(0_-) = u_{c0} \quad (6.23)$$

Relația (6.23) exprimă continuitatea tensiunii  $u_c$  în momentul  $t = 0$  al cuplării (sau comutării) circuitului.

Aplicația 1. Să se afle curentul  $i$  dintr-un circuit cu rezistența  $R$  și capacitatea  $C$  legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală de curent continuu, cu t.e.m.  $U$ .

Din (6.19) se obține :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{U}{RC}, \text{ cu soluția } u_c(t) = u_1 + u_2 = Ae^{-\frac{t}{RC}} + U, \text{ unde } u_1 = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

reprezintă componenta tranzitorie, iar  $u_2 = U$  - componenta permanentă, la timpul  $t = \infty$ , a tensiunii pe armăturile condensatorului. Constanta  $A$  se obține din condiția  $u_c(0) = A + U = 0$ , deci:  $A = -U$  și rezultă (fig.6.4):

$$u_c = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (6.24)$$

Constanta de timp  $T_0 = RC$ , reprezintă subtangenta în orice punct  $M$  al curbelor  $u_c$  sau  $i$  din fig.6.4. Curentul  $i$  se obține din (6.18) și (6.24) :

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T_0}}. \quad (6.25)$$

Pentru încărcarea condensatorului este necesară o energie electrostatică:

$$W = \frac{1}{2} CU^2, \text{ iar prin efectul Joule-Lenz se consumă energia } W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2} CU^2 = W,$$

adică de la sursă se consumă energia :

$$W_s = W + W_J = CU^2. \quad (6.26)$$

Aplicația 2. Să se studieze regimul tranzitoriu produs prin decuplarea circuitului paralel  $R, C$ , care a funcționat în regim staționar sub tensiunea la borne  $U$  (fig.6.5).

Din (6.19) se obține:  $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = 0$ ;  $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ , unde  $A$  se determină din condiția:  $u_c(0) = A = U$  și deci (cu constanta de timp  $T_0 = RC$ ), fig.6.5 :

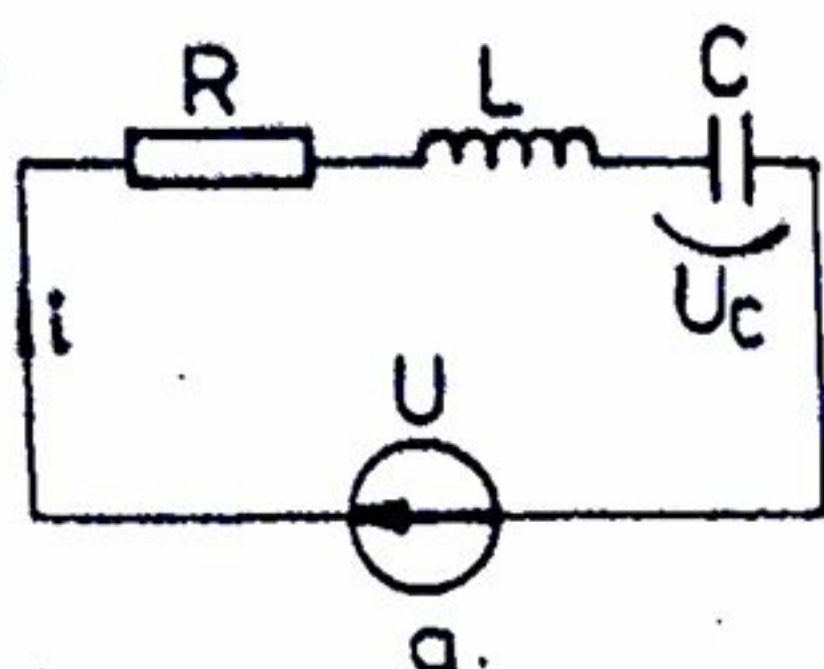
$$u_c(t) = Ue^{-\frac{t}{T_0}} \quad (6.27)$$

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T_0}} \quad (6.28)$$



### 6.1.3 Circuit cu rezistență, inductivitate și capacitate

Se consideră un circuit cu rezistența  $R$ , inductivitatea  $L$  și capacitatea  $C$  legate în serie și alimentate, la  $t = 0$ , la tensiunea momentană  $u$ , care produce în circuit curentul momentan  $i$  (fig. 6.6.a). Se obține ecuația diferențială



liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți, neomogenă:  $Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u$ . Cu notațiile:

$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$ ,  $i = C \frac{du_c}{dt}$ ,  $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_c}{dt^2}$ , se poate scrie:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u, \quad (6.29)$$

a cărei ecuație caracteristică:  $r^2 LC + rRC + 1 = 0$ , are rădăcinile:

$$r_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{și}$$

$$r_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Soluția ecuației diferențiale (fig. 6.29) este:  $u_c(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , unde  $u_1(t)$  reprezintă soluția generală a ecuației omogene:  $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ , iar

$u_2(t)$  este o soluție particulară a ecuației neomogene (6.29), care poate fi chiar soluția de regim permanent. În funcție de valorile rădăcinilor

$r_1$  și  $r_2$  ale ecuației caracteristice (deci în funcție de valorile elementelor de circuit  $R, L, C$ ), soluția generală

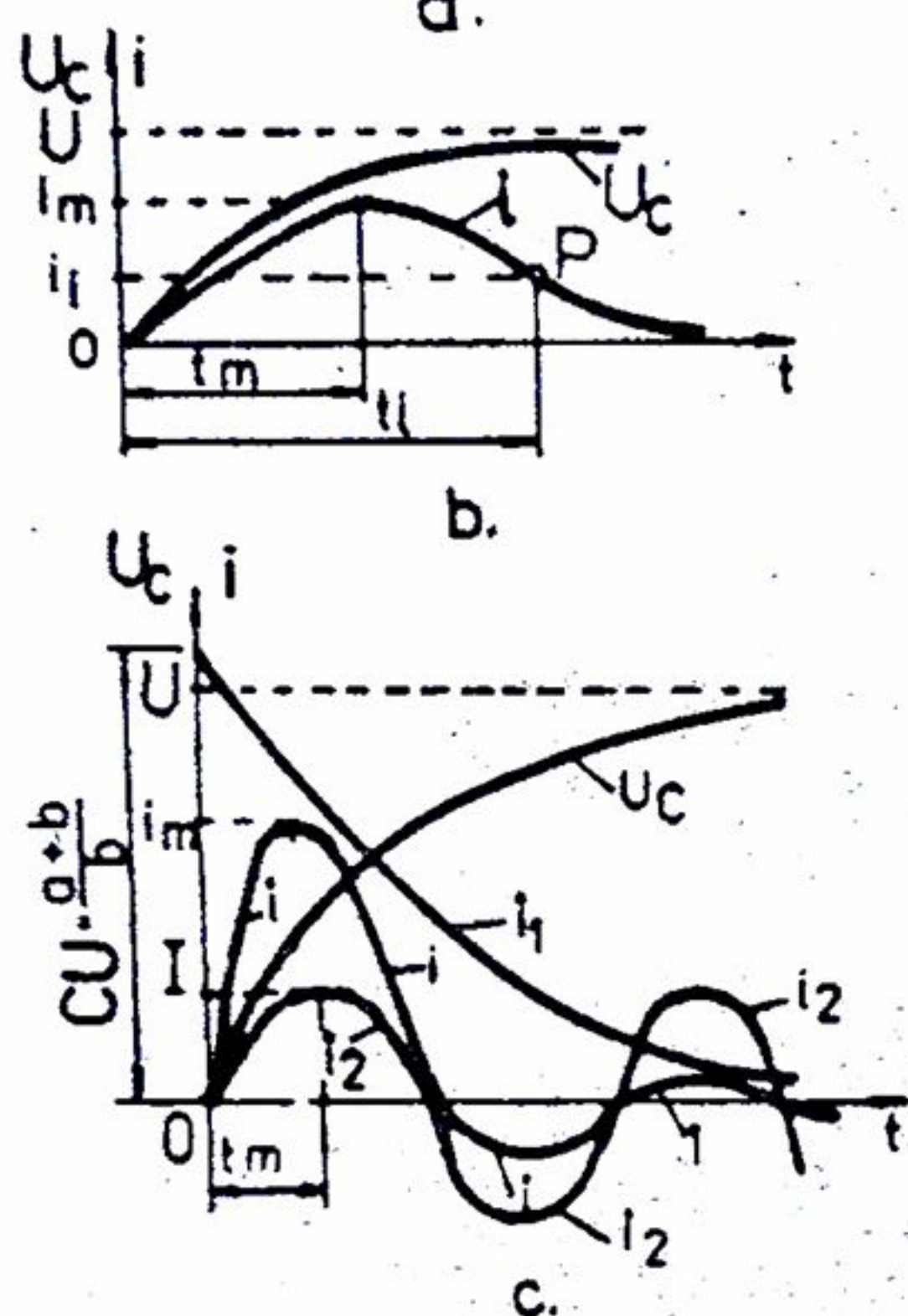


Fig. 6.6

$u_1(t)$  are următoarele expresii:

- pentru  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$  (rădăcini reale, negative și distincte,  $r_{1,2} = -a \pm b$ ):

$$u_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-at} (Ae^{bt} + Be^{-bt}); \quad (6.30)$$

- pentru  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$  (rădăcinile reale, negative și egale,  $r_1 = r_2 = -a$ ):

$$u_1(t) = e^{-at} (A + Bt) \quad (6.31)$$

- pentru  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$  (rădăcinile complexe, conjugate,  $r_{1,2} = -a \pm jb$ ):

$$u_1(t) = (A \cos bt + B \sin bt) e^{-at}. \quad (6.32)$$



În toate cazurile, constantele A și B se determină din condiții inițiale.

Aplicație. Să se studieze regimul tranzitoriu la un circuit cu rezistența R, inducțivitatea L și capacitatea C legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală de curent continuu, cu t.e.m. U, la timpul  $t = 0$ .

Din (6.29) se obține  $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U$ , cu soluția generală  $u_1$  (6.30),

(6.31) sau (6.32) și soluția particulară  $u_2 = U$  (componenta permanentă, la timpul  $t = \infty$ , a tensiunii pe armăturile condensatorului).

Soluția generală este:

1. Pentru  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$  (6.30)

$$u_1 = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{și rezultă: } u_c(t) = u_1 + u_2 = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + U;$$

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = C(r_1 Ae^{r_1 t} + r_2 Be^{r_2 t}).$$

Constantele A și B se determină din condițiile:  $u_c(0) = 0$  și  $i(0) = 0$ , formându-se sistemul:  $A + B + U = 0$ ;  $r_1 A + r_2 B = 0$  cu soluțiile:

$$A = U \frac{r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{și} \quad B = U \frac{r_1}{r_2 - r_1}, \quad \text{unde: } r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Tensiunea condensatorului și curentul din circuit sunt reprezentate în fig. 6.6.b (regimul aperiodic). Valoarea maximă a curentului este  $i_m = i(t_m)$ . Timpul  $t_m$  se obține din

$$\frac{di}{dt} = C(r_1^2 Ae^{r_1 t} + r_2^2 Be^{r_2 t}) = 0; \quad t_m = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2b}.$$

Punctul de inflexiune P al curentului are coordonatele  $t_i$  și  $i_i$ , unde  $i_i = i(t_i)$ , iar  $t_i$  se

$$\text{obține din: } \frac{d^2 i}{dt^2} = C(r_1^3 Ae^{r_1 t} + r_2^3 Be^{r_2 t}) = 0; \quad t_i = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{b} = 2t_m.$$

$$\text{Sarcina electrică } q \text{ a condensatorului: } q = \int_0^\infty i dt = C(A + B) = CU.$$

2. Pentru  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$  (6.31)

Soluția generală este:  $u_1 = (A + Bt)e^{-at}$ , și rezultă:

$$u_c(t) = u_1 + u_2 = (A + Bt)e^{-at} + U; \quad i(t) = C \frac{du_c}{dt} = Ce^{-at} [B - a(A + Bt)].$$

Constantele A și B se determină din condițiile:  $u_2(0) = 0$  și  $i(0) = 0$ , formându-se sistemul:  $A + U = 0$ ;  $B - aA = 0$ , cu soluțiile:  $A = -U$ ;  $B = -aU$ . Rezultă regimul aperiodic



critic (fig. 6.6.b) :  $u_c(t) = U[1 - (1 + at)e^{-at}]$ ;  $i(t) = Ca^2 Ute^{-at} = \frac{U}{L} te^{-at}$ .

Din:  $\frac{di}{dt} = 0$  și  $\frac{d^2i}{dt^2} = 0$  se obțin mărimile:  $t_m = \frac{1}{a}$ ,  $t_i = \frac{2}{a} = 2t_m$ ,

$$i_m = i(t_m) = \frac{CaU}{e}, \quad i_i = i(t_i) = \frac{2CaU}{e^2}.$$

3. Pentru  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$  (6.32)

Soluția generală este:  $u_1 = (A \cos bt + B \sin bt)e^{-at}$  și rezultă :

$$u_2(t) = u_1 + u_2 = (A \cos bt + B \sin bt)e^{-at} + U;$$

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = Ce^{-at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt), \text{ unde: } C_1 = bB - aA \text{ și } C_2 = aB + bA.$$

Constantele A și B se determină din condițiile  $u_c(0)=0$  și  $i(0)=0$ , rezolvând sistemul:

$$A+U=0; \quad bB-aA=0, \text{ cu soluțiile: } A = -U \text{ și } B = -\frac{aU}{b}. \text{ Rezultă regimul oscilant amortizat}$$

(fig. 6.6.c)

$$u_c(t) = U \left[ 1 - \left( \cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right) e^{-at} \right]; \quad i(t) = CU \frac{a^2 + b^2}{b} e^{-at} \sin bt, \text{ sau: } i(t) = i_1 i_2,$$

$$\text{unde: } i_1 = CU \frac{a^2 + b^2}{b} e^{-at} \text{ și } i_2 = \sin bt. \text{ Din } \frac{di}{dt} = 0 \text{ și } \frac{d^2i}{dt^2} = 0, \text{ se obțin mărimile:}$$

$$t_m = \frac{1}{b} \arctg \frac{b}{a}, \quad i_m = i(t_m), \quad t_i = \frac{1}{b} \left( \arctg \frac{2ab}{a^2 - b^2} + k\pi \right), \quad k=0,1,2,\dots; \quad i_i = i(t_i).$$

## 6.2 METODE OPERATIONALE

### 6.2.1 Transformata Laplace

Transformata Laplace a unei funcții original  $f(t)$  se notează cu  $\mathcal{L}[f(t)]$  sau  $F(s)$  și se obține din integrala Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.33)$$

unde  $s$  este un număr complex (nesubliniat în mod convențional) de forma:  $s=a+jb$ ;  $j = \sqrt{-1}$ . Transformata Laplace are următoarele proprietăți mai importante:



- este liniară  $\mathcal{L}[Af_1(t) + Bf_2(t)] = A \mathcal{L}[f_1(t)] + B \mathcal{L}[f_2(t)]$
- poate fi aplicată derivatei funcției original  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$
- poate fi aplicată integralei funcției original  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$ .

Pentru a efectua transformata Laplace a unei funcții original  $f(t)$  aceasta se introduce în integrala Laplace (6.33) și apoi se rezolvă integrala. Fie de calculat transformata (imaginea) funcției exponențiale:  $f(t) = e^{at}$ . Din (6.33) se obține succesiv:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}.$$

În mod similar se obține imaginile diverselor funcții original. În tabelul 6.1 se dau originile  $f(t)$  și imaginile respective  $F(s)$  ale unor funcții mai uzuale.

Tabelul 6.1

Poz	$f(t)$	$F(s)$	Poz	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$ IMPULS UNITAR	1	9.	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
2.	K - constant	K/s	10.	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
3.	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	11.	$t \sin \omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
4.	$te^{at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	12.	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
5.	$t^2 e^{at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	13.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
6.	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	14.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	15.	shat	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	16.	chat	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

### 6.2.2 Legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff în formă operațională

Fie circuitul serie R,L,C fără cuplaj magnetic, care, la timpul  $t = 0$  se cuplează la o sursă de t.e.m. sinusoidală,  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ . Rezultă expresia cunoscută:



$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$ , unde  $i$  este curentul din circuit. Cu proprietățile transformatei

(6.33) se obține:  $U(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s) = \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s)$ , unde:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (6.34)$$

reprezintă impedanța operațională a circuitului cu condiții inițiale nule. Rezultă legea lui Ohm în formă operațională:

$$U(s) = Z(s)I(s). \quad (6.35)$$

Teoremele lui Kirchhoff sunt: 
$$\begin{cases} \sum I(s) = 0 \\ \sum Z(s)I(s) = \sum U(s) \end{cases} \quad (6.36), (6.37)$$

Tensiunea  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$  are imaginea (tabelul 6.1):

$$U(s) = \sqrt{2}U \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.38)$$

În cazul când t.e.m. la care se conectează circuitul este continuă ( $U$ ), din tabelul 6.1, rezultă:

$$U(s) = \frac{U}{s}. \quad (6.39)$$

La circuitele paralele cu  $R, L, C$ , impedanța operațională este obținută din relația:

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \quad (6.40)$$

Pentru circuite cu impedanțele  $Z_1(s), Z_2(s), \dots, Z_n(s)$  în paralel, rezultă impedanța echivalentă:

$$Z(s) = \frac{1}{\sum \frac{1}{Z_i(s)}} \quad (6.41)$$

Pentru un circuit mixt:  $Z_1(s)$  în serie cu grupul  $Z_2(s)$  și  $Z_3(s)$  în paralel, impedanța echivalentă este

$$Z(s) = Z_1(s) + \frac{Z_2(s)Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)} \quad (6.42)$$

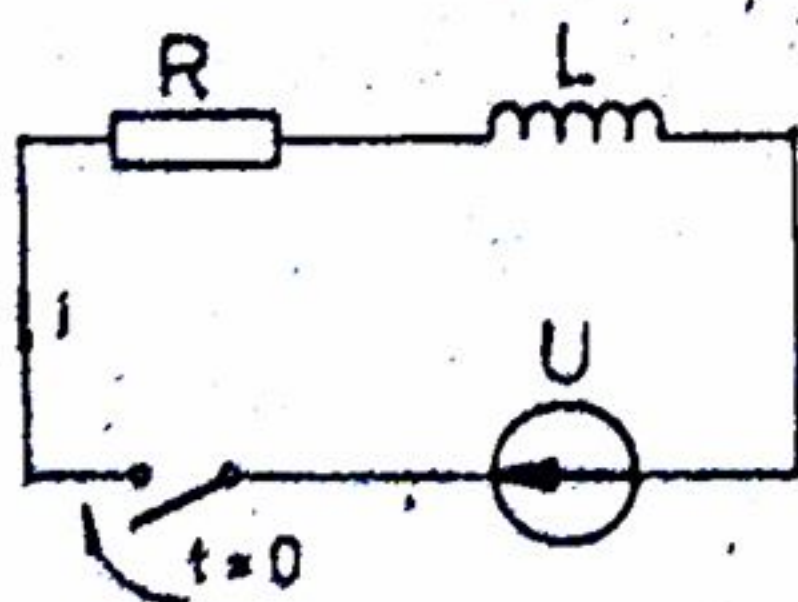


Fig. 6.7

Aplicația 1. Să se determine curentul  $i$  dintr-un circuit cu rezistența  $R$  și inductivitatea  $L$  legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală sinusoidală:  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , cuplarea având loc la timpul  $t = 0$ , când  $u$  are valoarea zero (fig. 6.7)

Impedanța operațională a circuitului este (6.34):

$Z(s) = R + sL$ , iar tensiunea operațională are expresia (6.38):



$$U(s) = \sqrt{2}U \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \text{ Se obține curentul operațional}$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{\sqrt{2}\omega U}{L} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{\sqrt{2}\omega U}{L} F(s).$$

Fracția  $F(s)$  nu se regăsește în tabelul 6.1, deoarece se descompune în fracții simple de forma  $\frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} = \frac{A}{s + \frac{R}{L}} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}$  unde  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt constante care se

determină prin identificare:

$$1 = s^2(A + B) + s\left(B\frac{R}{L} + C\right) + A\omega^2 + C\frac{R}{L}, \text{ deci: } A + B = 0; B\frac{R}{L} + C = 0; A\omega^2 + C\frac{R}{L} = 1 \text{ cu}$$

$$\text{soluțiile: } A = \frac{L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{L^2}{Z^2}, B = -\frac{L^2}{Z^2}, C = \frac{RL}{Z^2}.$$

$$\text{Curentul operațional ia forma } I(s) = \sqrt{2} \frac{U\omega L}{Z \cdot Z} \left( \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{R}{\omega L} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right).$$

$$\text{Din tabelul 6.1 se obțin originalele, } i(t) = \sqrt{2}I \sin \varphi \left( e^{-\frac{R}{L}t} + \text{ctg} \varphi \sin \omega t - \cos \omega t \right),$$

$$\text{unde } I = \frac{U}{Z}; \sin \varphi = \frac{\omega L}{Z}; \text{ctg} \varphi = \frac{R}{\omega L}.$$

Rezultă curentul din circuit (fig. 6.8)

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} + \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi) = i_1 + i_2.$$

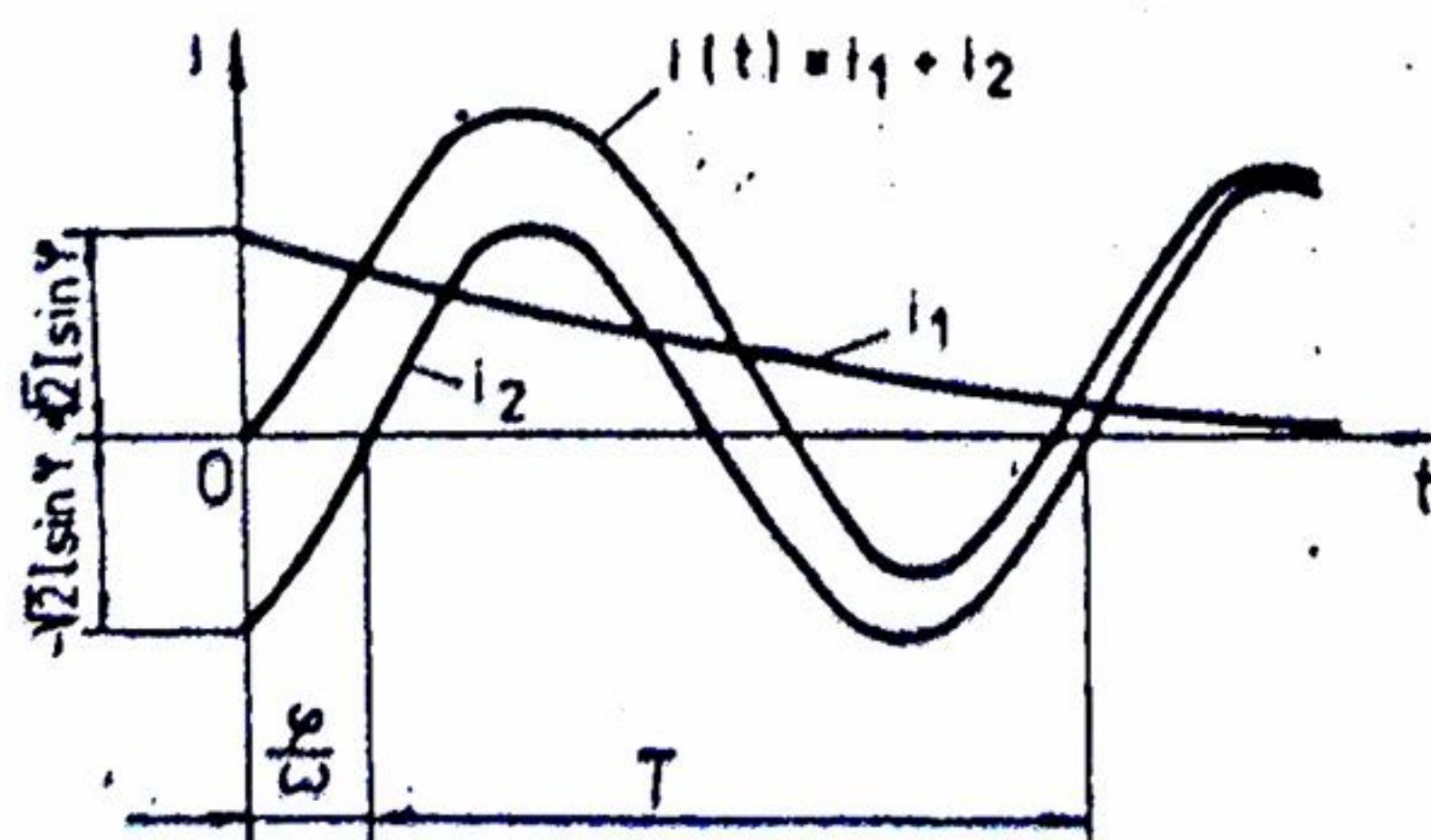


Fig. 6.8

Aplicația 2 . Să se determine curentul  $i$  dintr-un circuit cu rezistența  $R$ , inductivitatea  $L$  și capacitatea  $C$  legate în serie, care se cuplează la o sursă ideală de t.e.m. sinusoidală,  $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , (fig. 6.9). Impedanța operațională a circuitului este (6.34):

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}, \text{ iar tensiunea}$$



operațională este (6.38):  $U(s) = \sqrt{2}U \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ . Se obține curentul

$$\text{operațional: } I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{\sqrt{2}\omega U}{L} \frac{s}{(s^2 + \omega^2) \left( s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right)}$$

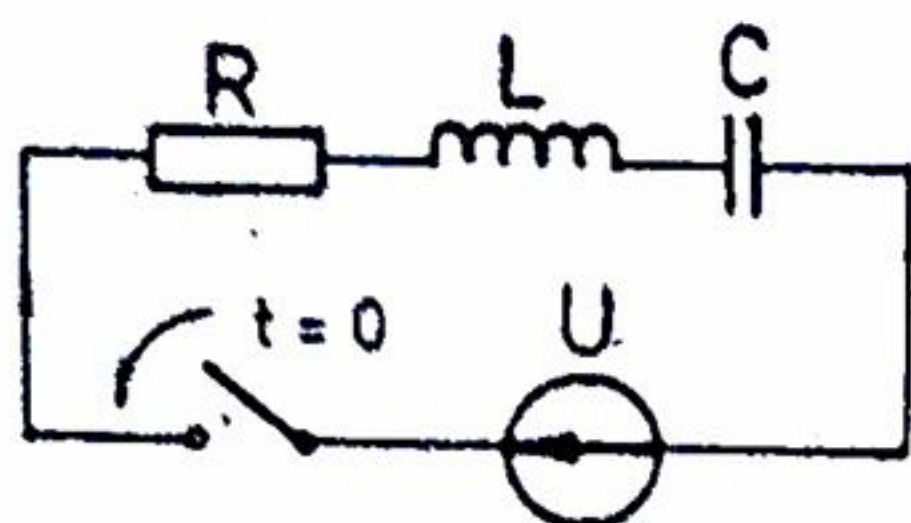


Fig.6.9

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt:

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -a \pm b.$$

Pentru  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ , rezultă curentul:

$$I(s) = \frac{\sqrt{2}\omega U}{L} \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{\sqrt{2}U\omega}{L} F(s).$$

Funcția  $F(s)$  se descompune în fracții simple:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s - r_1)(s - r_2)} = \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{D}{s - r_1} + \frac{E}{s - r_2}$$

unde  $A, B, D$  și  $E$  sunt constante reale, care se determină prin identificare (v. aplicația 1).

Rezultă:  $A = \frac{L \sin \varphi}{\omega Z}$ ,  $B = \frac{L \cos \varphi}{Z}$ ,  $D = -\frac{L}{Z} \left( \frac{\sin \varphi}{\omega} + \frac{\cos \varphi}{2b} \right)$ ,  $E = \frac{L \cos \varphi}{2bZ}$ , unde:

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}; X = \omega L - \frac{1}{\omega C}; Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Soluțiile ( $A, B, D, E$ ) se introduc în fracția  $F(s)$  descompusă și rezultă expresia curentului operațional:  $I(s) = \frac{\sqrt{2}U\omega}{L} \left( A \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + D \frac{1}{s - r_1} + E \frac{1}{s - r_2} \right)$ .

Din tabelul 6.1 se obțin originalele

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U\omega}{L} e^{-at} (De^{bt} + Ee^{-bt}) + \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi), \text{ unde:}$$

$$I = \frac{U\sqrt{\omega^2 A^2 + B^2}}{L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U}{Z}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

**Aplicația 3.** Să se afle curenții din laturile circuitului reprezentat în fig.6.10, la care se cunosc  $U, R_1, R_2$  și  $L$ .



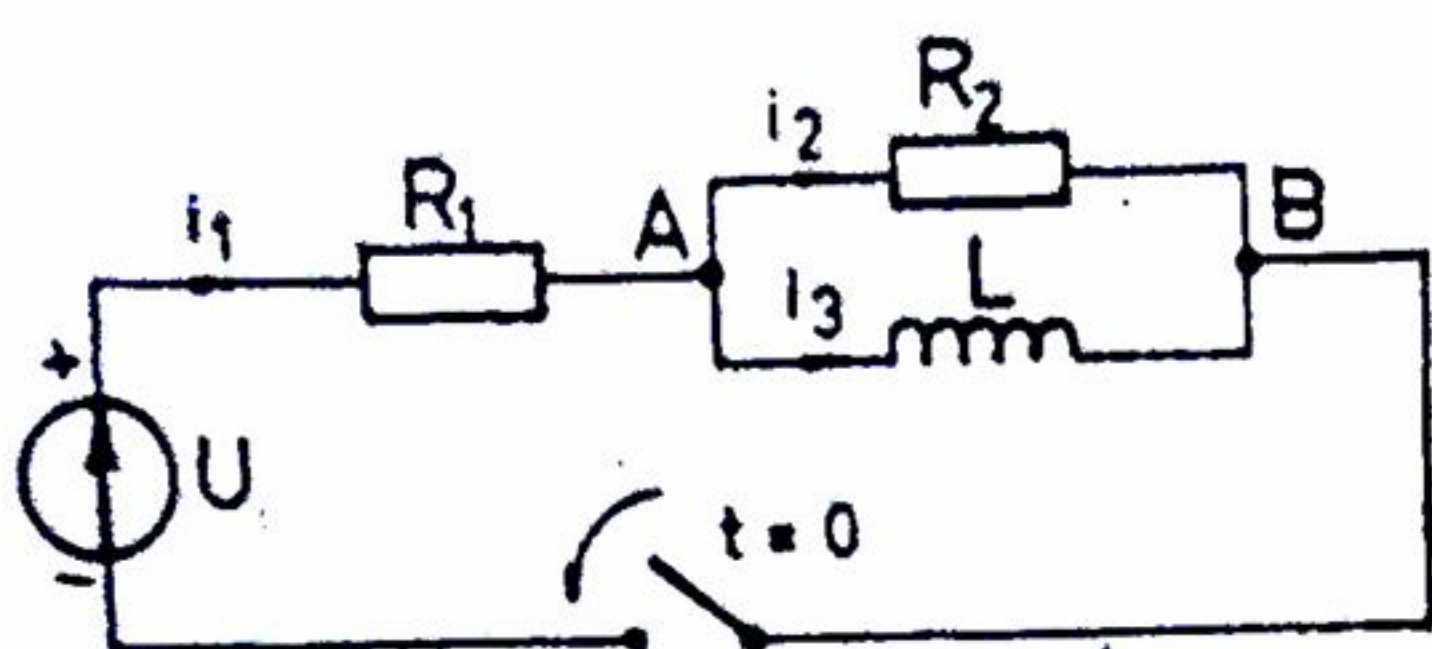


Fig. 6.10

Rezultă:  $U(s) = \frac{U}{s}$  și  $Z(s) = R_1 + \frac{R_2 s L}{R_2 + s L}$ ;

$$I_1(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{U}{s} \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 s L}{R_2 + s L}};$$

$$I_1(s) = \frac{U}{R_1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{s + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} \right]$$

Se determină tensiunea operațională între punctele A și B:

$$U_{AB}(s) = I_1(s) Z_{AB}(s) = \frac{U}{s} \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 s L}{R_2 + s L}} \frac{R_2 s L}{R_2 + s L}$$

Rezultă curenții din ramurile paralele:

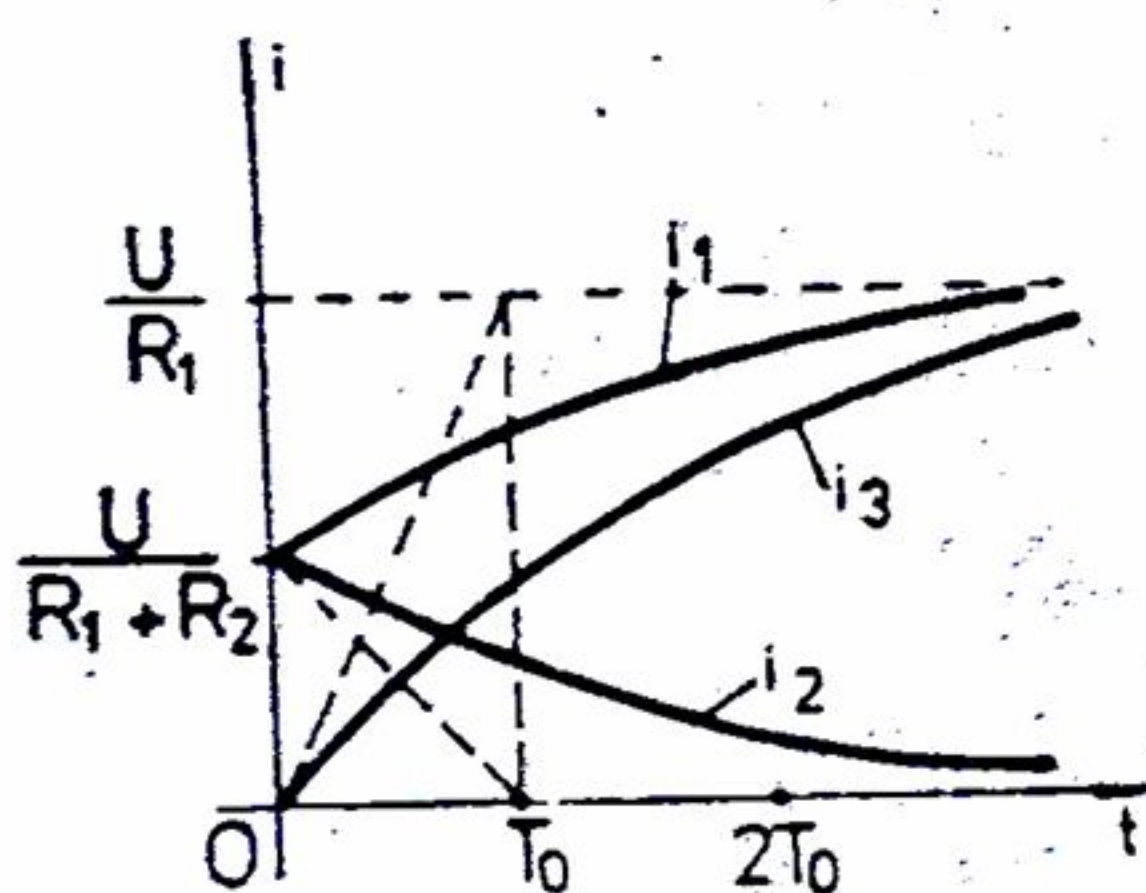


Fig. 6.11

$$I_2(s) = \frac{U_{AB}(s)}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \frac{1}{s + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}};$$

$$I_3(s) = \frac{U_{AB}(s)}{s L} = \frac{U}{R_1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}} \right] \quad \text{Se}$$

verifică:  $\sum I(s) = 0$ . Din tabelul 6.1 se obțin originalele curenților tranzitorii (fig. 6.11).

$$i_1(t) = \frac{U}{R_1} \left( 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{T_0}} \right); \quad i_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{T_0}}; \quad i_3(t) = \frac{U}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \right), \quad \text{unde } T_0$$

este constanta de timp:  $T_0 = L \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

Alte aplicații simple sunt prezentate în fig. 6.12 - 6.15



Alte aplicații simple sunt prezentate în fig.6.12 - 6.15.

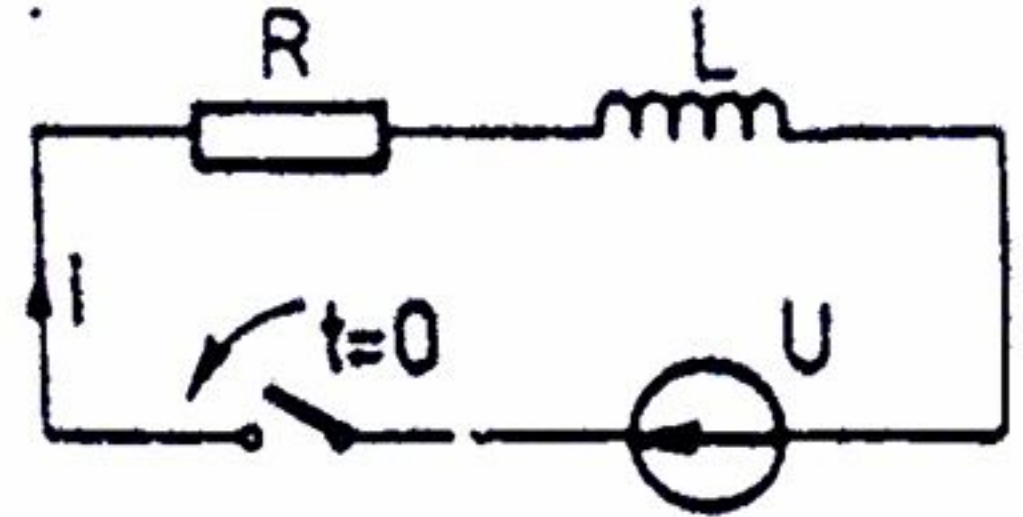
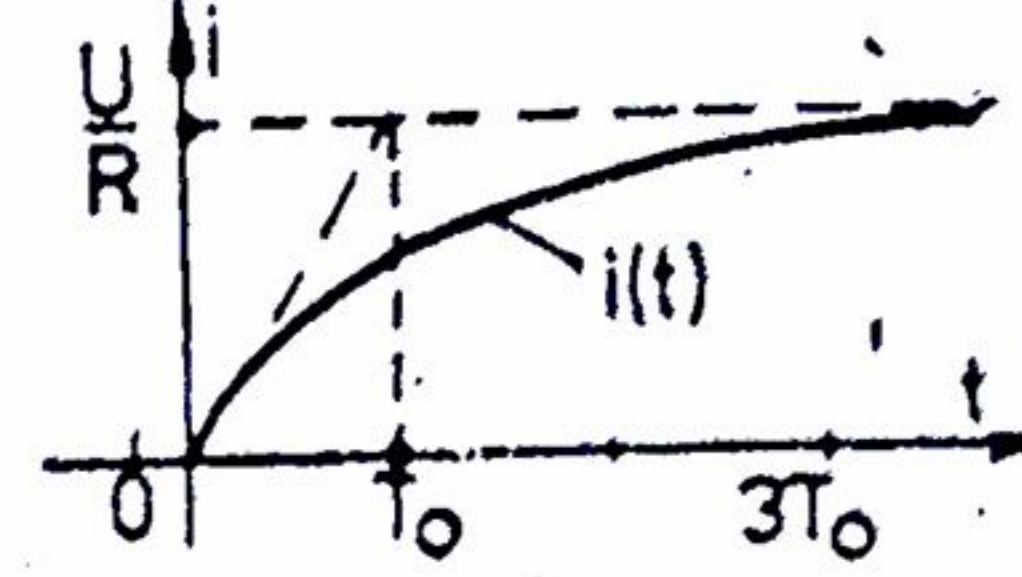
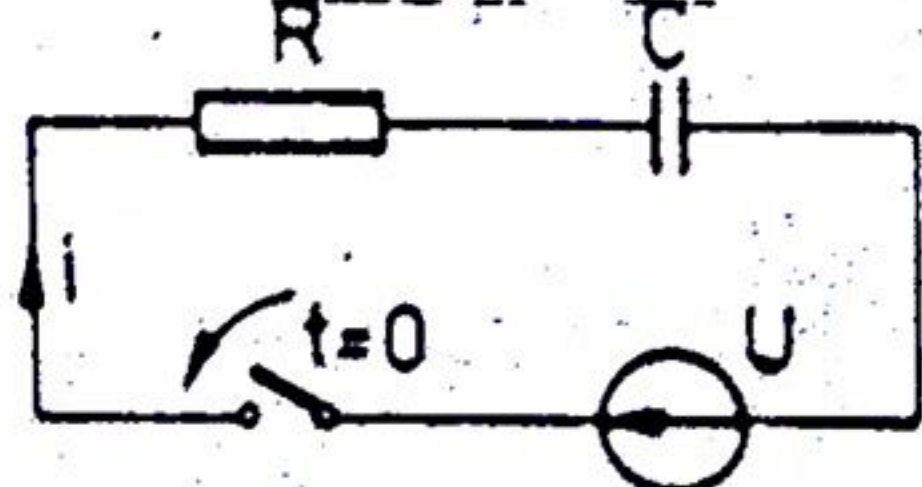
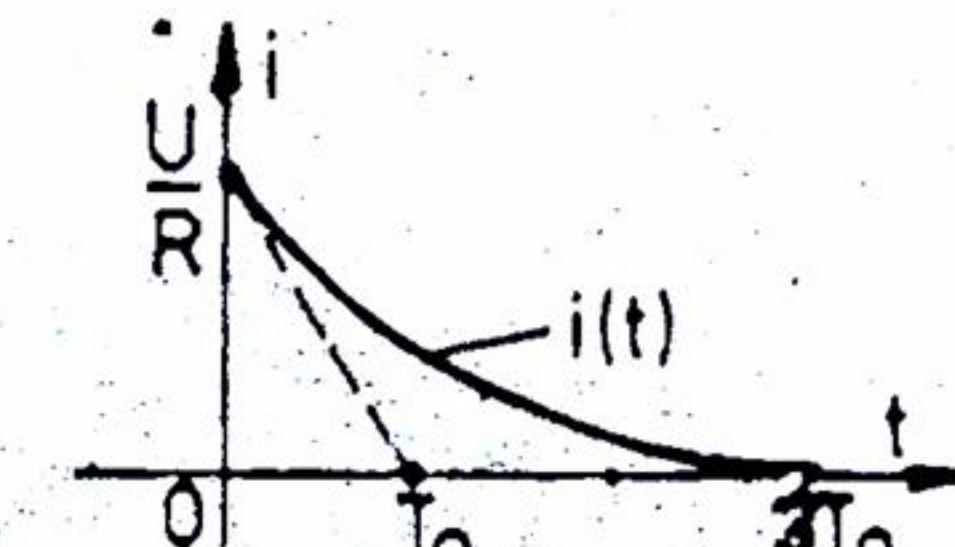
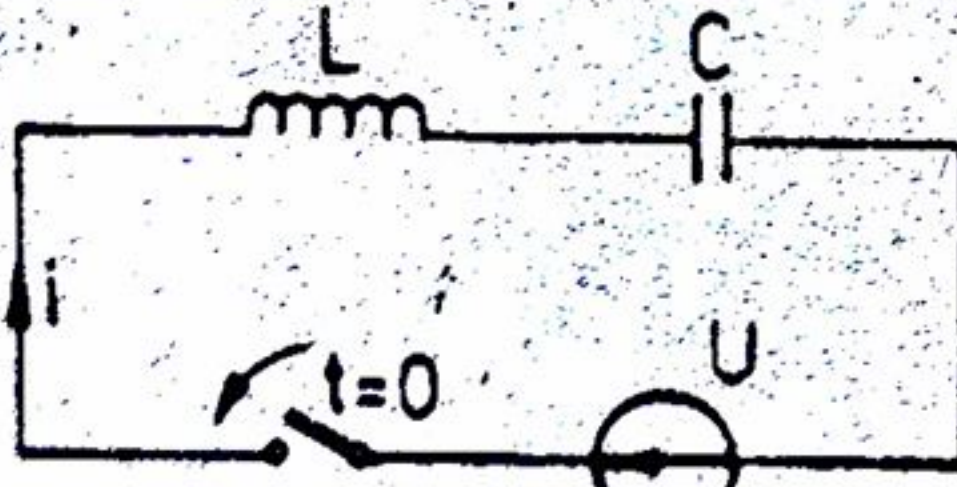
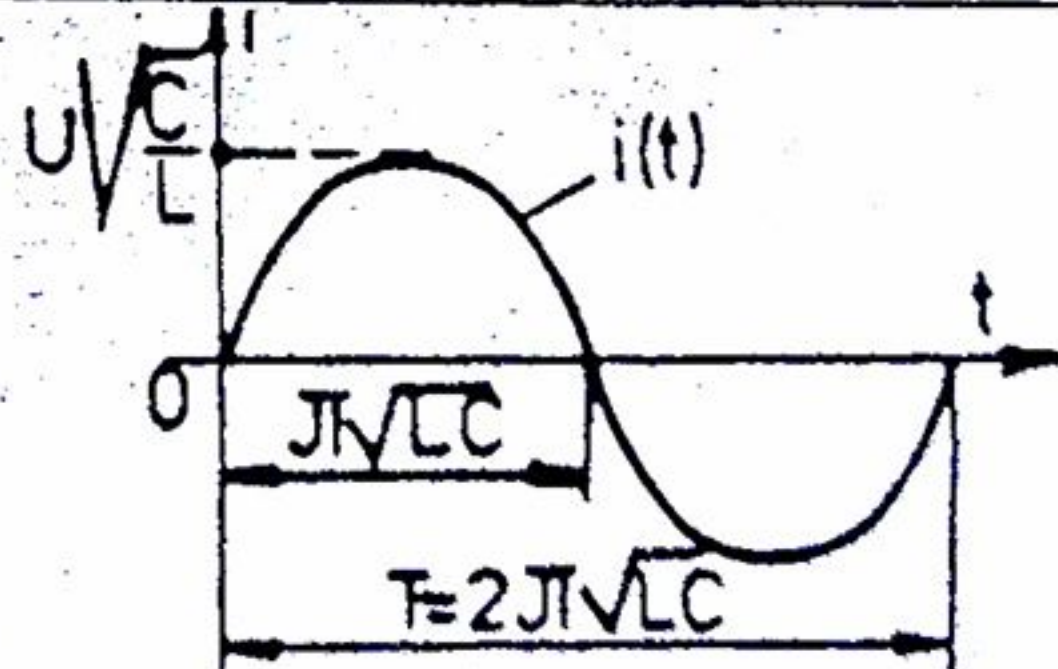
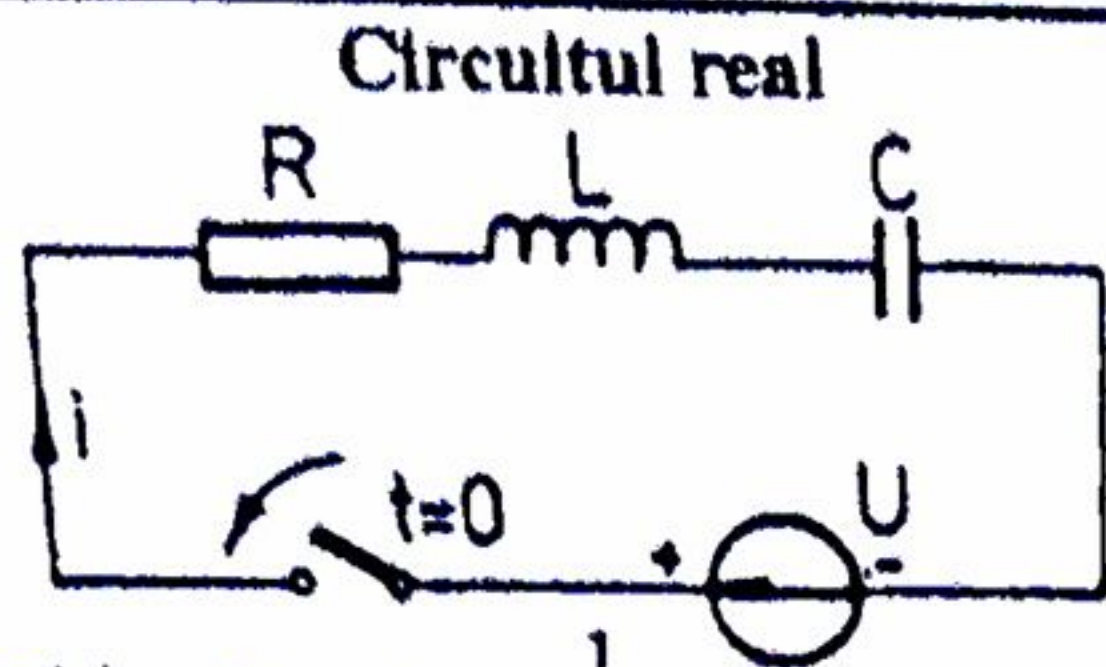
a	 $Z(s) = R + sL$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $T_0 = \frac{L}{R}$ $I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{U}{L} \frac{1}{s(s + \frac{R}{L})}$ $i(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \right)$
b	 $Z(s) = R + \frac{1}{sC}$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $T_0 = RC$ $I(s) = \frac{U}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$ $i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T_0}}$
c	 $Z(s) = sL + \frac{1}{sC}$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $I(s) = U \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1/\sqrt{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$ $i(t) = U \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$

Fig.6.12





$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

- Cazul I:  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$

- Cazul II:  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$

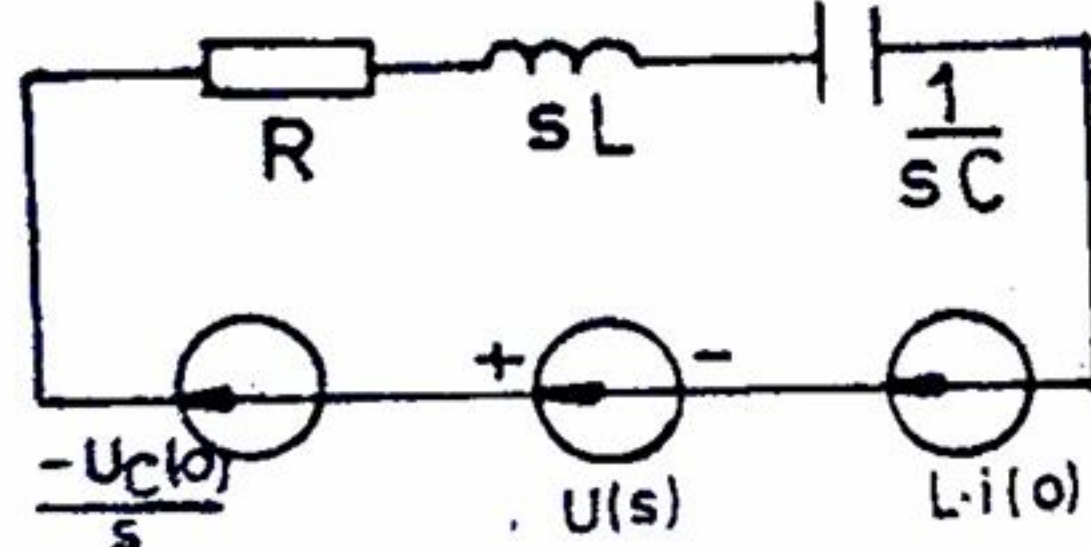
- Cazul III:  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$r_{1,2} = -a \pm b$$

$$U(s) = \frac{U}{s}$$

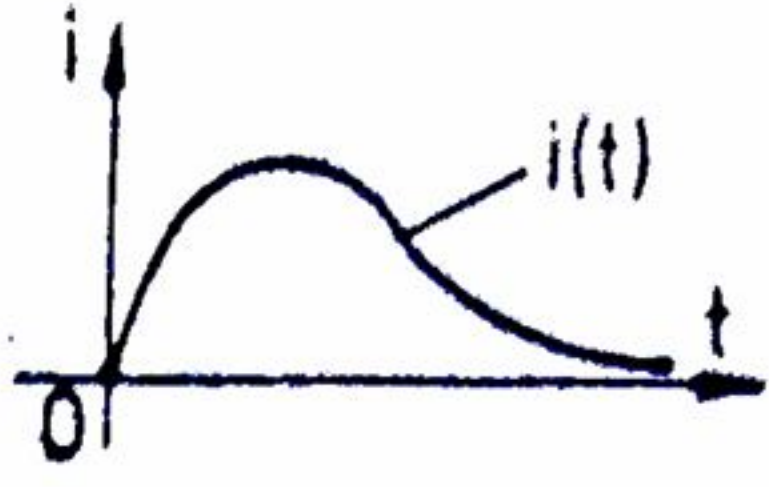
**Circuitul operațional**



(condiții inițiale nule)

$$\begin{cases} Li(0) = 0 \\ \frac{U_c(0)}{s} = 0 \end{cases}$$

-Cazul I:



(Regim aperiodic)

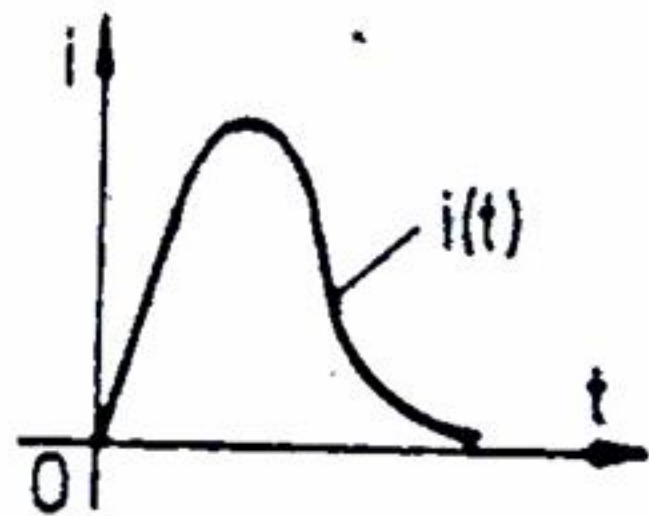
$$I(s) = \frac{U}{L(s-r_1)(s-r_2)}$$

$$i(t) = \frac{U}{L} \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$$

$$r_1 = -a + b; r_2 = -a - b$$

$$i(t) = \frac{U}{2bL} e^{-at} (e^{bt} - e^{-bt})$$

Cazul II:

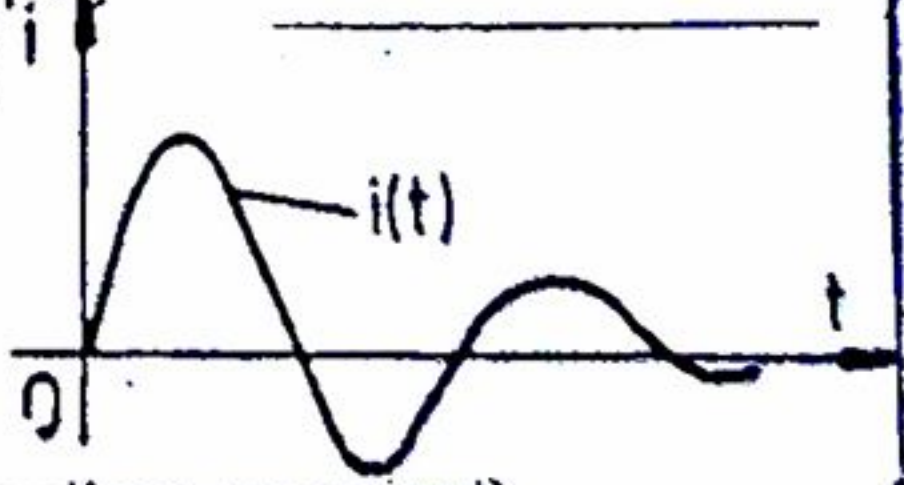


(Regim aperiodic critic)

$$I(s) = \frac{U}{L(s-r)^2}; i(t) = \frac{U}{L} t e^{rt}$$

$$r_1 = r_2 = r = -a$$

Cazul III:



(Regim oscilant amortizat)

$$I(s) = \frac{U}{L(s-r_1)(s-r_2)}$$

$$i(t) = \frac{U}{L} \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$$

$$r_1 = -a + jb; r_2 = -a - jb$$

$$i(t) = \frac{U}{2bL} e^{-at} \sin bt$$

Fig.6.13



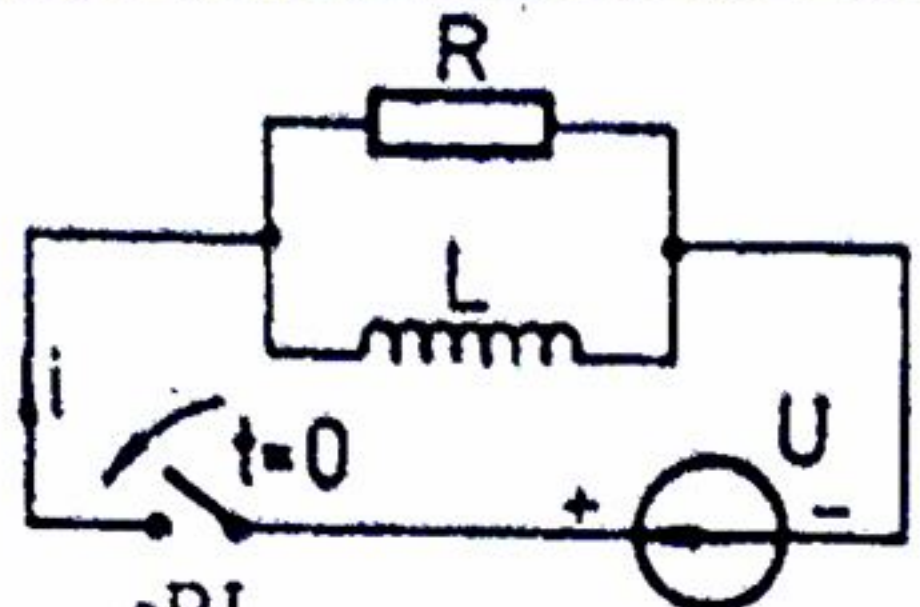
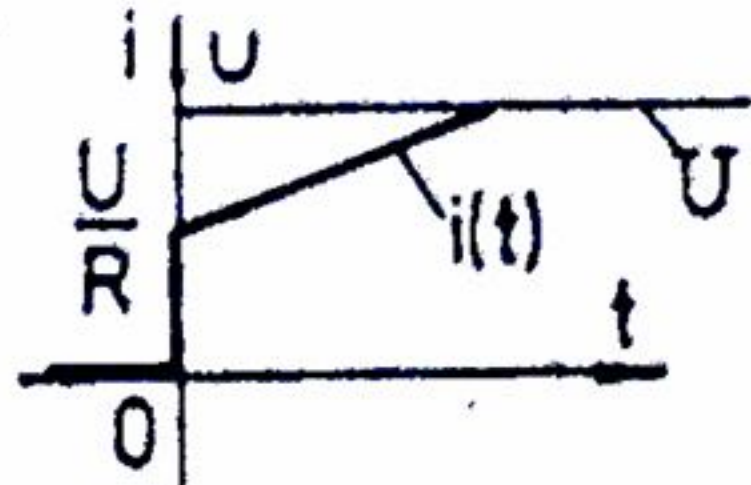
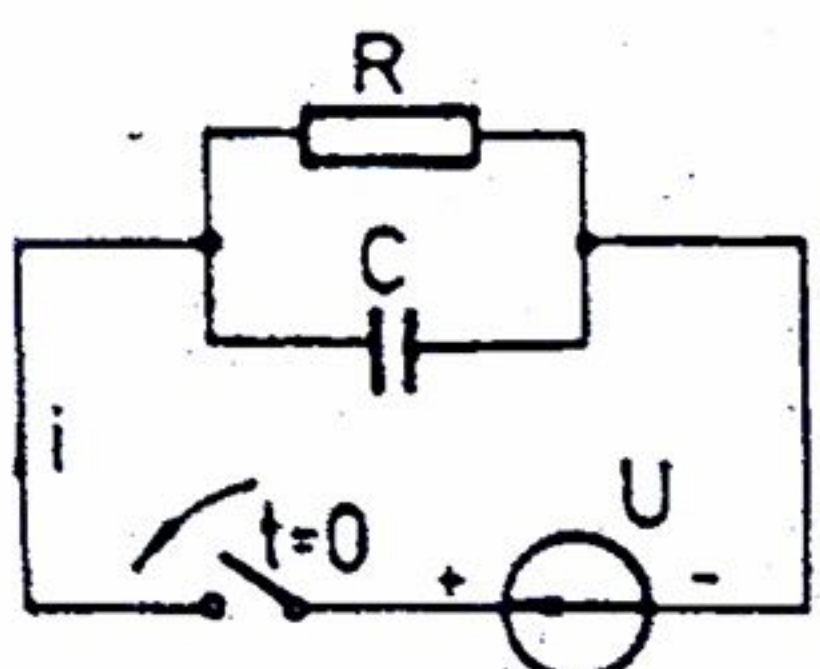
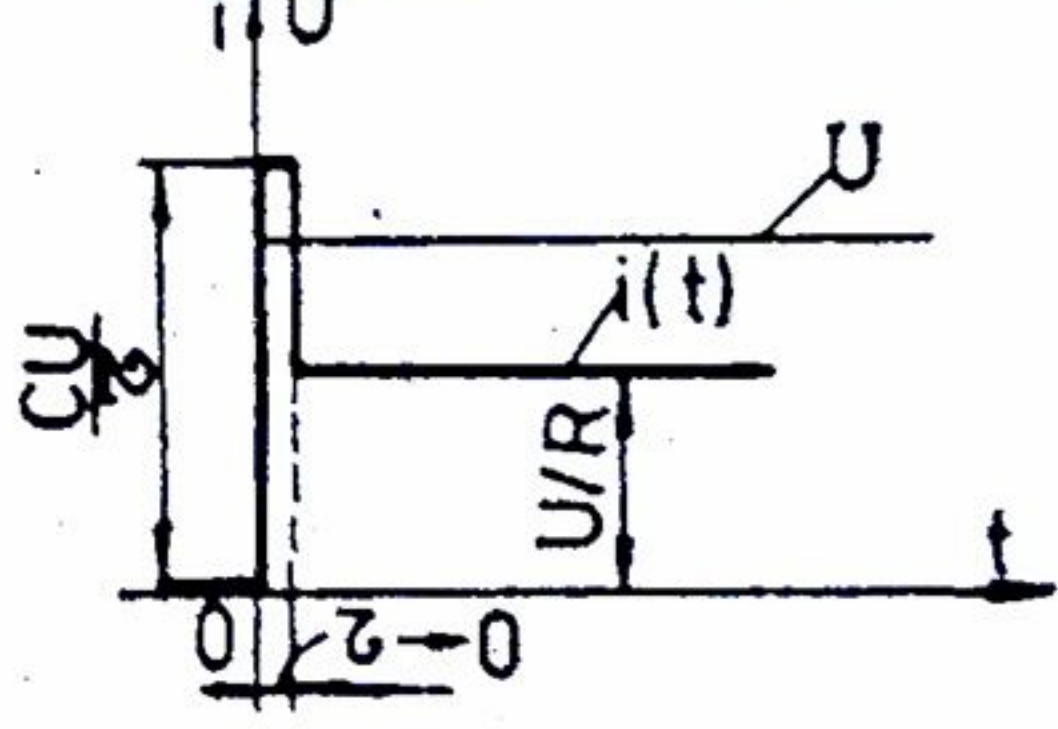
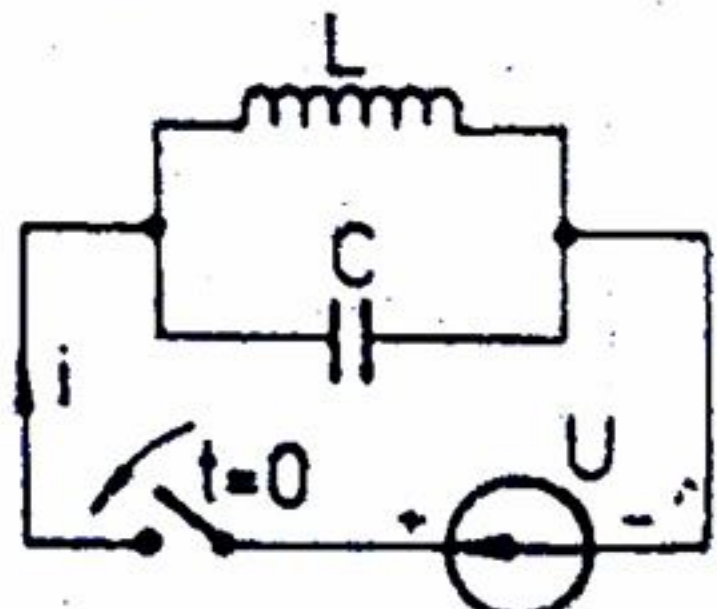
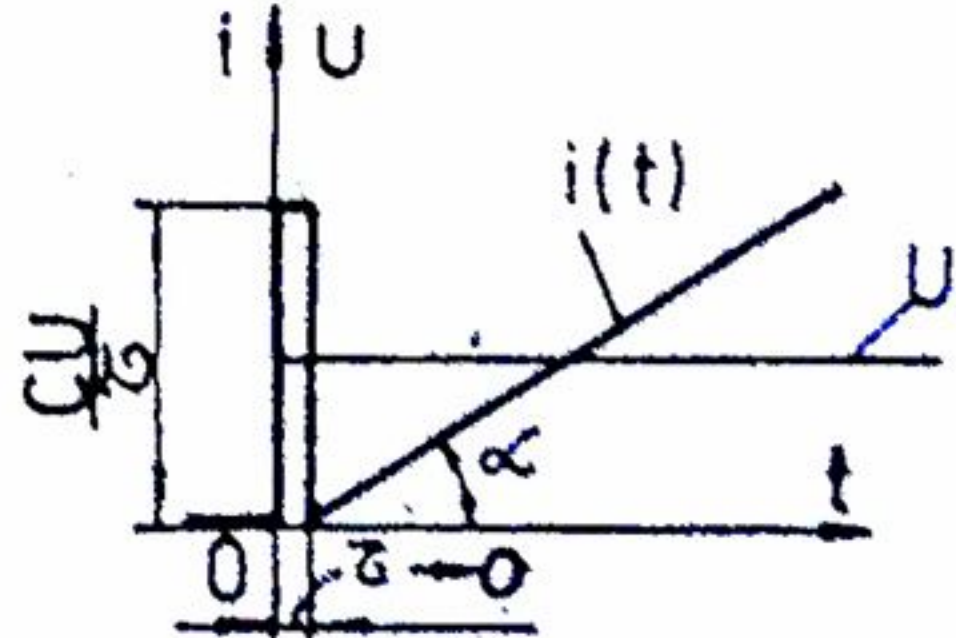
<p>a</p>	 $Z(s) = \frac{sRL}{R + sL}$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $I(s) = \frac{U}{L} \frac{1}{s^2} + \frac{U}{R} \frac{1}{s}$ $i(t) = \frac{U}{L} t + \frac{U}{R}$
<p>b</p>	 $Z(s) = \frac{R}{sRC + 1}$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $I(s) = CU \left( 1 + \frac{1}{RC} \frac{1}{s} \right)$ $i(t) = CU \left[ \delta(t) + \frac{1}{RC} \right]$
<p>c</p>	 $Z(s) = \frac{sL}{s^2 LC + 1}$ $U(s) = \frac{U}{s}$	 $I(s) = CU \left( 1 + \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2} \right)$ $i(t) = CU \left[ \delta(t) + \frac{1}{LC} t \right]$

Fig. 6.14



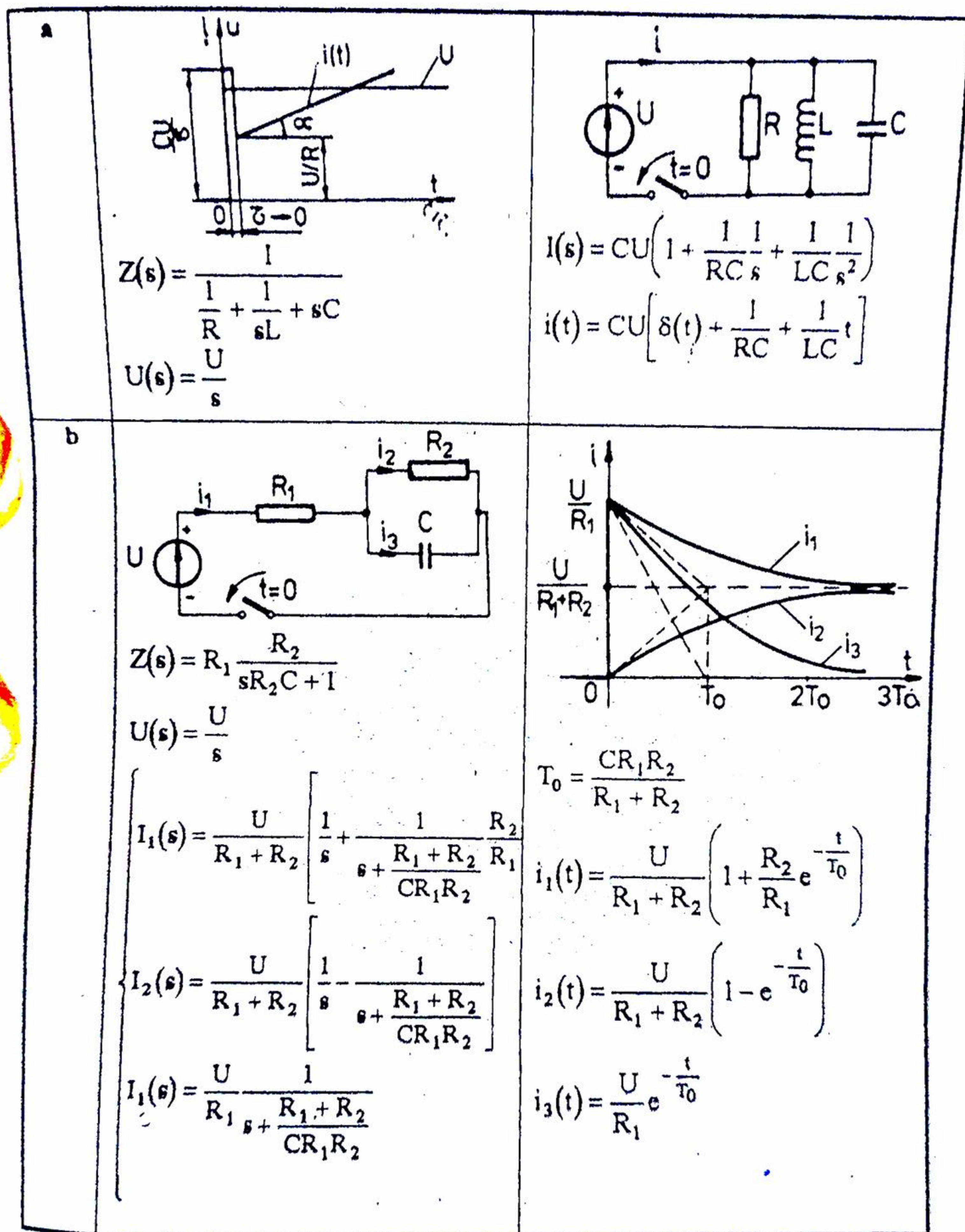


Fig. 6.15



### 6.2.3 Circuite electrice în regim tranzitoriu cu condiții inițiale nenule

Fie o latură de circuit (fig. 6.16.a), la care se poate scrie:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_M}{dt} + u_c = u + u_n, \quad (6.43)$$

în care, admitând că condensatorul a fost încărcat în prealabil cu sarcina electrică

$$q(0) = \int_{-\infty}^0 i dt \quad (6.44)$$

rezultă tensiunea pe condensator :

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (6.45)$$

Expresia:

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt = U_c(0) \quad (6.46)$$

reprezintă tensiunea pe condensator la timpul  $t = 0$ , deci

$$u_c = U_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (6.47)$$

Rezultă expresia

$$u + u_n = Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_M}{dt} + U_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt, \quad (6.48)$$

a cărei transformată Laplace este:

$$U(s) + U_n(s) + Li(0) + Mi_M(0) - \frac{U_c(0)}{s} = I(s) \left[ R + sL + \frac{1}{sC} \right] + I_M(s)M \quad (6.49)$$

în care  $Li(0)$ ,  $Mi(0)$  și  $-\frac{U_c(0)}{s}$  sunt surse de t.e.m. fictive în formă operațională. Cu notațiile  $U_e(s)$  pentru t.e.m. echivalentă operațională și  $Z(s)$  pentru inpedanța operațională rezultă:

$$U_e(s) = U(s) + Li(0) + Mi_M(0) - \frac{U_c(0)}{s}; \quad (6.50)$$

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}; \quad (6.51)$$

$$U_e(s) + U_n(s) = I(s)Z(s) + I_M(s)M \quad (6.52)$$

Teorema întâi a lui Kirchhoff în formă operațională este:

$$\sum I(s) = 0 \quad (6.53)$$

Dacă se scrie (6.52) pentru toate laturile unei bucle închise și apoi se însumează expresiile, se obține "teorema a doua a lui Kirchhoff în forma operațională" (în care se admite  $i_M = 0$ ):

$$\sum Z(s)I(s) = \sum U_e(s) \quad (6.54)$$

unde  $\sum U_n(s) = 0$ , deoarece bucla este închisă.



Pentru a studia (a rezolva) un circuit cu  $N$  noduri,  $B$  bucle fundamentale și  $L$  laturi, în regim tranzitoriu, cu condiții inițiale nenule, prin metoda transformării Laplace, se stabilește circuitul operațional, având laturile similare celei din fig.6.16.b,

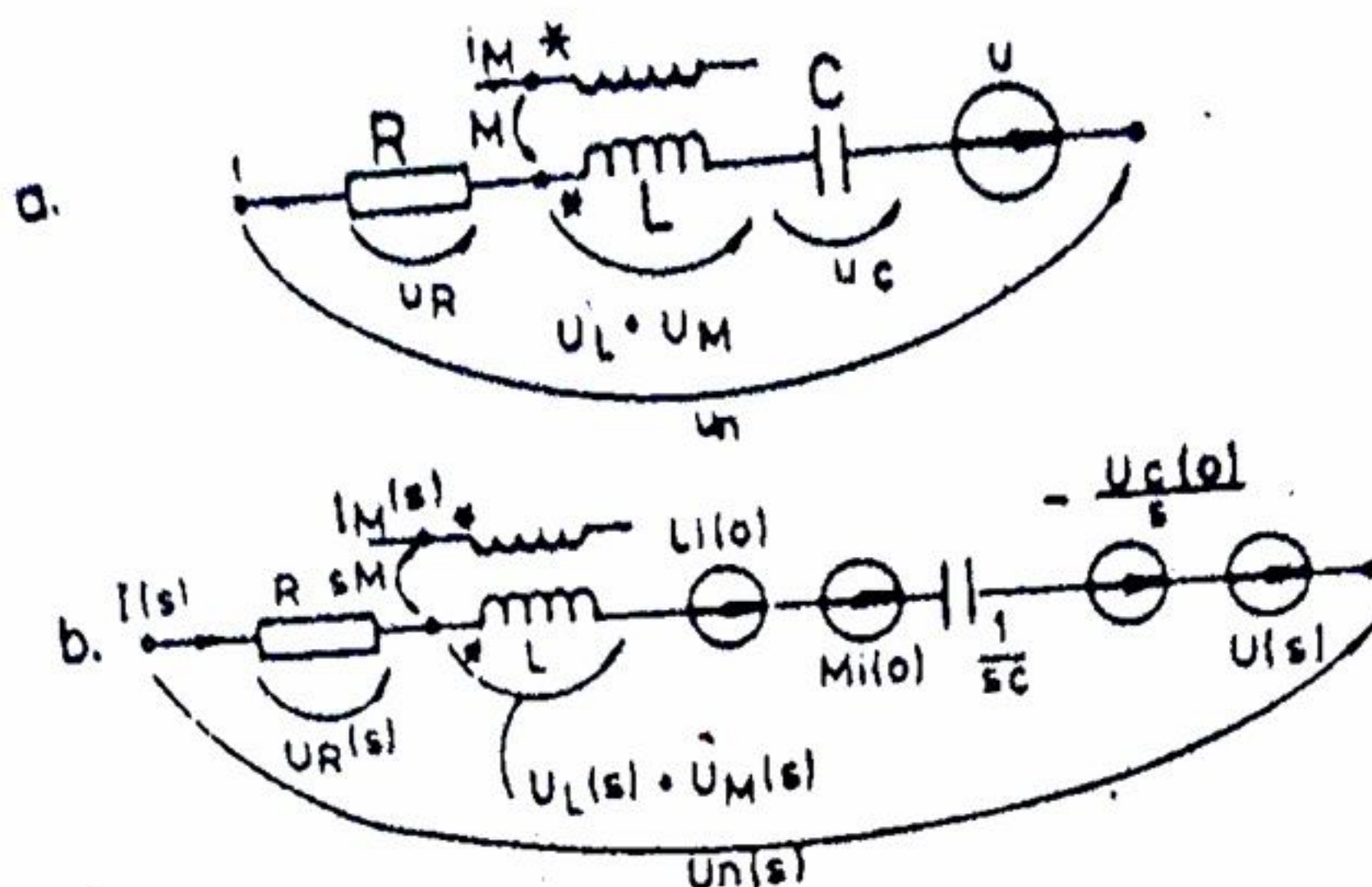


Fig.6.16

la care se poate atașa relația (6.49), apoi se scriu de  $(N-1)$  ori relația (6.53) și de  $B$  ori relația (6.54), se rezolvă sistemul de  $L$  ecuații cu  $L$  necunoscute în  $I(s)$  și se efectuează transformarea Laplace inversă:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} [I(s)] \quad (6.55)$$

pentru fiecare curent din cele  $L$  laturi ale circuitului, utilizând una din metodele de inversiune sau tabelele cu transformate Laplace.

**Aplicația 1.** Circuitul din fig.6.17 este alimentat în regim permanent la t.e.m.  $U_1$ , cu întrerupătorul  $K$  deschis. La timpul  $t = 0$  se închide întrerupătorul. Să se afle tensiunea din secundar  $u_2 = u_2(t)$  știind că  $R_2 = R_3 = R$  (deci, din motive de simetrie,  $i = i'$  și  $i_2 = i_3$ ).

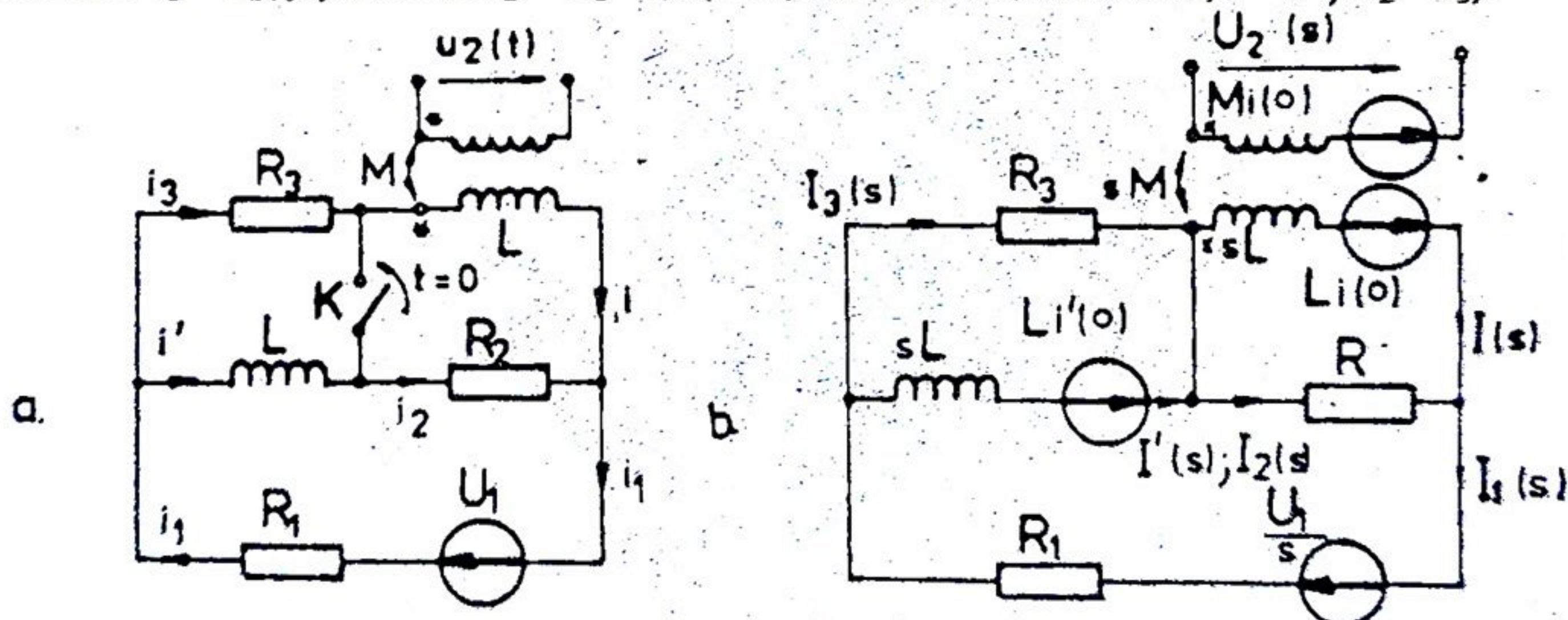


Fig.6.17

Din condițiile inițiale se obține:  $Li(0) = L \frac{i_1(0)}{2} = \frac{L}{2} \frac{U_1}{R_1 + \frac{R}{2}} = L \frac{U_1}{R + 2R_1}$ .

Rezultă sistemul:  $I_1(s) = I(s) + I_2(s)$ ;  $R_1 I_1(s) + 2R_2 I_2(s) = \frac{U_1}{s}$ ,

$sLI(s) - R_2 I_2(s) = Li(0) = L \frac{U_1}{R + 2R_1}$  din care se obține  $I(s)$  prin eliminarea  $I_1(s)$  și  $I_2(s)$ .



Deci  $U_2(s) = sMI(s) - Mi(0)$ ;  $i(0) = \frac{U_1}{R + 2R_1}$ ;  $U(s) = a \frac{1}{s + b}$  unde:

$$a = \frac{U_1 MR(R + R_1)}{L(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}; \quad b = \frac{1}{T_0} = \frac{R_1 R}{L(R_1 + 2R)}$$

Rezultă originalul:  $u_2(t) = ae^{-bt} = ae^{-\frac{t}{T_0}}$

**Aplicația 2.** Circuitul din fig. 6.18 funcționează în regim staționar cu întrerupătorul K închis. La timpul  $t=0$  întrerupătorul se deschide. Se cere  $i(t)$ , dacă  $u_1(t) = U_1 \sin(\omega t + \gamma)$  și  $u_2(t) = U_2$  (c.c.).

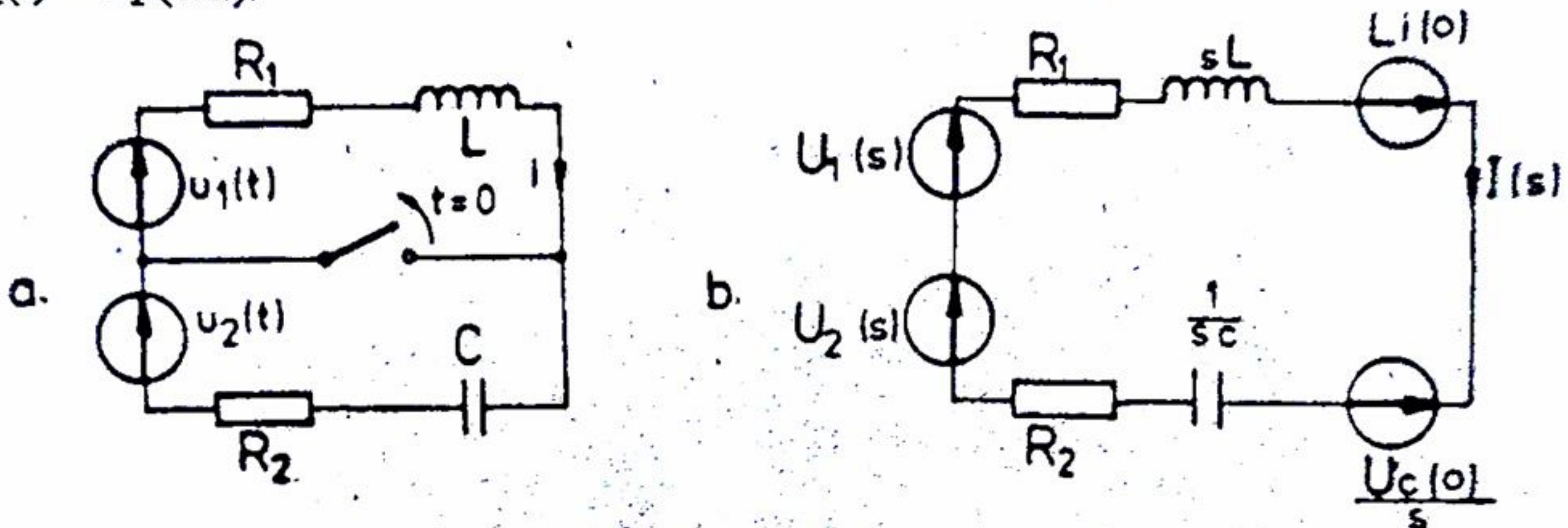


Fig. 6.18

Rezultă:  $Li = L \frac{U_1 \sin(\gamma - \varphi)}{(R_1^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$ ;  $\varphi = \arctg \frac{L}{R_1}$ ;  $U_c(0) = U_2$ ;  $U_2(s) = \frac{U_2}{s}$ ;

$$U_1(s) = \frac{U_1(s \sin \gamma + \omega \cos \gamma)}{s^2 + \omega^2}, \quad Z(s) = R_1 + R_2 + sL + \frac{1}{sC},$$

$$I(s) = \frac{U_1(s) + U_2(s) + Li(0) - \frac{U_c(0)}{s}}{Z(s)}$$

După înlocuirea mărimilor cunoscute se obține:

$$I(s) = A_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} + A_2 \frac{s}{s^2 + \omega^2} + A_3 \frac{1}{s - r_1} + A_4 \frac{1}{s - r_2}, \text{ unde } A_1, A_2, A_3 \text{ și } A_4 \text{ depind}$$

de valorile  $R_1, R_2, L$  și  $C$ , iar:  $r_{1,2} = -\frac{R_1 + R_2}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

Rezultă:  $i(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + A_3 e^{r_1 t} + A_4 e^{r_2 t}$ .